РУКОВОДСТВО

ГЕОМЕТРІИ

И

СОБРАНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

для гимназій, реальныхъ училищъ и учительскихъ институтовъ.

составили

А. МАЛИНИНЪ и Ѳ. ЕГОРОВЪ.

МОСКВА.

Изданіе книгопродавца Ѳ. И. Салаева.

1879.

Типографія М. Н. Лаврова и К°,
Леонтьевскій переул., домъ № 14.

Предисловіе.

Составляя предлагаемый учебникъ, мы имѣли въ виду: 1) расположить матеріалъ геометріи по возможности въ строгой и вмѣстѣ съ тѣмъ доступной ученикамъ системѣ; 2) каждую комбинацію геометрическихъ элементовъ только тогда вводить въ разсмотрѣніе, когда возможно показать геометрическое ея существованіе; 3) ввести въ курсъ вполнѣ обстоятельно и возможно ранѣе рѣшеніе задачъ на построеніе. Для этого, разсмотрѣвши прямую линію, взаимное положеніе прямыхъ (углы) и частные случаи, сюда относящіеся (перпендикулярность и параллельность), мы разсматриваемъ окружность и ея отношенія къ каждому изъ разсмотрѣнныхъ прежде элементовъ; а затѣмъ уже переходимъ къ разсмотрѣнію фигуръ и ведемъ далѣе изложеніе въ томъ порядкѣ, который сохраняется болѣе или менѣе во всѣхъ учебникахъ геометріи. Такое расположеніе, представляя ясную для учениковъ систему (сперва ученіе о линіяхъ, потомъ о фигурахъ), позволило намъ достигнуть бо́льшаго порядка въ изложеніи отдѣльныхъ главъ и избѣжать возвращенія къ одному и тому же предмету по нѣскольку разъ. Такъ мы могли придать бо́льшую цѣльность и законченность отдѣлу о фигурахъ, изложивъ всѣ ихъ свойства (кромѣ относящихся къ подобію) въ одномъ мѣстѣ и по ясной для учениковъ программѣ: свойства сторонъ, с[illegible] угловъ, соотношеніе между углами и сторона[illegible]авенств[illegible]игуръ. Точно такъ же бо́льшую цѣльность и законченно[illegible] статья объ окружности. Вслѣдствіе принятаго рас[illegible]нія намъ не пришлось, напр., изложивъ статью о треуг[illegible], снова возвращаться къ нимъ послѣ параллельныхъ линій, для того чтобы вывести выраженіе суммы угловъ треугольника. Кромѣ того, введя въ статью объ окружности подробное изслѣдованіе взаимнаго положенія прямой линіи и окружности, а также двухъ окружностей, мы могли ввести послѣ этой главы вполнѣ обстоятельно рѣшеніе задачъ на построеніе. При другомъ расположеніи матеріала геометріи, желая послѣ статьи о треугольникахъ ввести рѣшеніе задачъ на построеніе, обыкновенно даютъ нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ окружности, или по крайней мѣрѣ понятіе объ этой кривой линіи. Но этого далеко недостаточно для полнаго разъясненія задачъ, ибо для изслѣдованія возможности задачи, числа рѣшеній и т. д. необходимо знать условія пересѣченія и касанія окружности и прямой, а также двухъ окружностей, такъ какъ большинство задачъ приводится къ отысканію точекъ пересѣченія и касанія прямой съ окружностью или двухъ окружностей, и рѣшая напр. задачу о построеніи треугольника по даннымъ сторонамъ его, мы, получивъ два треугольника, удовлетворяющіе условіямъ задачи, не можемъ безъ упомянутыхъ свѣдѣній утверждать, что такихъ треугольниковъ можетъ быть *только два.*

Геометріи въ курсѣ среднихъ учебныхъ заведеній придается съ полной справедливостью значеніе практической логики. Но чтобы преподаваніе геометріи дѣйствительно получило такое значеніе, учащійся съ самаго начала курса долженъ получить понятіе о характерѣ геометрическихъ доказательствъ и въ связи съ этимъ понятія о составѣ геометрической теоремы и о необходимости извѣстныхъ допущеній или аксіомъ. Всѣ эти понятія удобнѣе вывести изъ анализа какихъ либо отдѣльныхъ теоремъ, и мы выбрали для этой цѣли теоремы о сравнительной величинѣ ломаныхъ, имѣющихъ общія конечныя точки; теоремы эти и помѣщены тотчасъ послѣ изложенія свойствъ прямой. Играя роль вспомогательныхъ теоремъ въ главѣ о треугольникахъ, онѣ строго къ ней не относятся и потому могутъ быть выдѣлены въ особый отдѣлъ.

Давши въ первой главѣ самыя необходимыя понятія о методѣ геометріи, мы сочли полезнымъ снова вернуться къ этому предмету, когда учащіеся уже достаточно овладѣютъ на частныхъ случаяхъ пріемами геометрическихъ доказательствъ, чтобы сдѣлать общій обзоръ всѣхъ этихъ пріемовъ и указать на соотношенія, существующія между прямой, обратной и противоположной теоремами. Такой пересмотръ, кромѣ весьма важнаго образовательнаго значенія, можетъ послужить хорошимъ средствомъ для повторенія и уясненія всего пройденнаго. Удобный для этого случай представился при изложеніи теоріи предѣловъ (глава X).

При опредѣленіи длины окружности мы предпочли допустить безъ доказательства, что объемлющая ломаная больше объемлемой кривой линіи; иначе говоря—мы приняли безъ доказательства, что окружность есть предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Чтобы не вводить такого допущенія, можно было бы, какъ это сдѣлано въ нѣкоторыхъ руководствахъ геометріи, поставить прежде однородную теорему о площади круга и уже изъ нея сдѣлать выводъ относительно окружности; но не говоря уже о непослѣдовательности такого изложенія, оно грѣшитъ и правильностью, такъ какъ изъ сравнительной величины площадей фигуръ нельзя дѣлать заключеніе о ихъ периметрахъ; иначе не было бы и вопросовъ о фигурахъ, имѣющихъ наибольшую площадь при одинакихъ периметрахъ, и т. под.

Основанія, по которымъ за длину кривой принимается предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ ломаныхъ, когда прямыя, ихъ составляющія, стремятся къ нулю, изложены нами въ мелкомъ шрифтѣ.

Книга наша снабжена достаточнымъ запасомъ задачъ (1576). Эти задачи, начиная съ главы V, когда число ихъ могло быть значительно увеличено, распредѣлены на три категоріи: 1) задачи на вычисленіе, 2) на доказательство теоремъ и 3) на построеніе.

Каждая теорема, которая только допускала это, снабжена задачами на вычисленіе; задачи эти, особенно въ началѣ преподаванія, важны въ томъ отношеніи, что при помощи ихъ понятія изъ новой для учащагося области пространства переводятся въ знакомую ему область числа.

Задачи на доказательство теоремъ подобраны въ первыхъ главахъ такъ, чтобы учащіеся или упражнялись въ тѣхъ пріемахъ доказательства, съ которыми имъ пришлось ознакомиться въ пройденной главѣ, или подготовлялись къ пріемамъ, которые встрѣтятся въ слѣдующей главѣ; такъ послѣ главы о перпендикулярахъ помѣщено нѣсколько теоремъ, требующихъ наложенія, съ чѣмъ ученики познакомились въ этой главѣ, и нѣсколько теоремъ объ углахъ двухъ прямыхъ линій съ сѣкущей, что понадобится для теоремы о параллеляхъ. Примѣняя эти пріемы самостоятельно, ученики лучше могутъ вдуматься въ ихъ сущность и понять ихъ, чѣмъ будутъ избавлены отъ заучиванія доказательствъ наизусть. Въ послѣдующихъ главахъ мы выбирали для упражненія въ самостоятельномъ доказательствѣ учениками теоремы, болѣе интересныя по своему содержанію и совокупность которыхъ представляла бы нѣчто цѣлое; такимъ образомъ мы ввели много теоремъ, относящихся къ высотамъ треугольника; къ линіямъ, дѣлящимъ пополамъ углы треуг.; къ вписаннымъ кругамъ; теоремы о наибольшихъ и наименьшихъ фигурахъ по площади и по периметру и т. под.

Задачамъ на построеніе мы предпослали изложеніе способовъ рѣшенія, показавъ на нѣсколькихъ образцахъ примѣненіе этихъ способовъ. Кромѣ того, желая указать учащимся на связь, существующую между различными частями математики, преподаваемыми въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, мы изложили способъ рѣшенія геометрическихъ задачъ путемъ составленія уравненій и построенія корней ихъ. Сообразно съ этимъ, у насъ указано, какимъ образомъ строятся различныя формулы. Всѣ главныя задачи на построеніе рѣшены въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ курса. Въ стереометріи мы ограничились задачами на вычисленіе.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ I. ПЛАНИМЕТРІЯ.

ЧАСТЬ II. СТЕРЕОМЕТРІЯ.

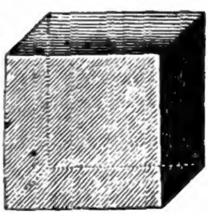
ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано:	Должно читать:
38	2 сверху	DC	DG.
40	3 сверху	$a=g$	$a>g$
132	7 сверху	*нѣсколько частей*	*нѣсколько равныхъ частей*
137	16 сверху	b и c	b и b
174	23 сверху	BC и AC	AC и BC
177	9 снизу	B и C	C и B
178	19 сверху	H и G	G и H
184	15 снизу	Черезъ точку	Черезъ точку M

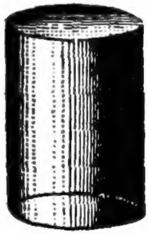
ВВЕДЕНІЕ.

1. Всякій предметъ, существующій въ природѣ, наз. *физическимъ тѣломъ*; такъ напр. кусокъ дерева, камень, книга — все это тѣла. Тѣла имѣютъ различныя свойства, которыми они отличаются другъ отъ друга; но есть и такія свойства, которыя принадлежатъ всѣмъ тѣламъ безъ исключенія; такъ напр. всѣ тѣла состоятъ изъ какого нибудь вещества, имѣютъ вѣсъ, форму, величину, способны нагрѣваться и т. под. Въ числѣ такихъ *общихъ* свойствъ тѣлъ свойство имѣть величину и форму зависитъ отъ того, что всякое тѣло занимаетъ нѣкоторую часть пространства; это общее свойство тѣлъ наз. *протяженностью*. Такъ какъ разсматривать въ одно и тоже время всѣ свойства тѣлъ было бы затруднительно, то протяженность разсматриваютъ отдѣльно отъ другихъ свойствъ, и для этого воображаютъ тѣла, не состоящія изъ вещества; такія, на самомъ дѣлѣ несуществующія, тѣла наз. *тѣлами геометрическими*. Итакъ *геометрическимъ тѣломъ наз. ограниченная со всѣхъ сторонъ часть пространства*. *Предѣлъ* или граница *тѣла*, иначе говоря—то, что отдѣляетъ тѣло отъ окружающаго его пространства, наз. *поверхностью* тѣла. На чер. 1-мъ представлено тѣло, наз. *кубомъ*; оно, какъ видно, ограничено шестью отдѣльными гранями, которыя всѣ вмѣстѣ и составляютъ поверхность его. Поверхность тѣла, представленнаго на чер. 2-мъ и наз. *цилиндромъ*, состоитъ изъ трехъ различныхъ частей: нижней, верхней и боковой. *Предѣлъ* или граница *поверхности* наз. *линіей*; такъ каждая грань поверхности куба ограничена четырьмя линіями, которыя отдѣляютъ эту грань отъ сосѣднихъ съ ней граней. Верхняя поверхность цилиндра отдѣляется отъ боковой поверхности также линіей. *Предѣлъ* или граница *линіи* наз. *точкой*; такъ каждая линія, отдѣляющая одну грань куба отъ другой, ограничена двумя точками. Если мы разрѣжемъ сверху внизъ цилиндръ (чер. 2), то и линіи, которыя отдѣляютъ верхнюю и нижнюю поверхность его отъ боковой поверхности, также будутъ разрѣзаны на двѣ части, причемъ каждая часть будетъ ограничена двумя точками.

Чер. 1.



Чер. 2.

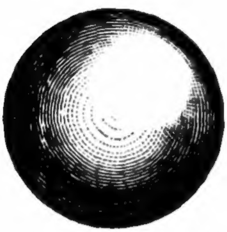


2. Всякое тѣло занимаетъ пространство по тремъ направленіямъ— справа на лѣво, спереди назадъ, сверху внизъ; иначе говоря, *тѣло имѣетъ три измѣренія*—длину, ширину и вышину; вышина наз.

иногда толщиной (напр. толщина книги), а иногда глубиной (напр. глубина ямы). Въ нѣкоторыхъ тѣлахъ, напр. въ кубѣ, всѣ измѣренія вполнѣ замѣтны; въ другихъ же, напр. въ кускѣ необдѣланнаго камня, въ шарѣ (чер. 3) и т. под. они не такъ явственны.

Поверхность, какъ граница тѣла, *имѣетъ только два измѣренія — длину и ширину*; *линія*, какъ предѣлъ поверхности, *имѣетъ только одно измѣреніе — длину*; *точка* — предѣлъ линіи — *не имѣетъ никакого измѣренія*, никакой величины.

Чер. 3.



Геометрическія тѣла, поверхности и линіи наз. *геометрическими протяженіями:* тѣло есть протяженіе трехъ измѣреній, поверхность —двухъ, линія—одного измѣренія.

Всякая часть тѣла есть также тѣло, ибо она имѣетъ всѣ три измѣренія; часть поверхности есть также поверхность; часть линіи есть линія. Точка же частей не имѣетъ. Поэтому было бы невѣрно сказать, что линія состоитъ изъ точекъ, поверхность представляетъ рядъ послѣдовательныхъ линій, или тѣло состоитъ изъ поверхностей.

Если мы вообразимъ, что точка движется и оставляетъ за собой слѣдъ (подобно тому, какъ движеніе острія карандаша по бумагѣ оставляетъ дѣйствительный слѣдъ, или какъ остріе быстро движущейся тлѣющей спички оставляетъ кажущійся огненный слѣдъ), то этотъ слѣдъ и будетъ линія. Представивъ себѣ, что движется линія, мы получимъ поверхность; отъ движенія поверхности получится тѣло. Такой взглядъ на образованіе геометрическихъ тѣлъ, поверхностей, линій посредствомъ движенія приноситъ большую пользу во многихъ случаяхъ; не слѣдуетъ только упускать изъ виду, что этотъ способъ происхожденія геометрическихъ протяженій можно только вообразить, но ни въ какомъ случаѣ нельзя выполнить на самомъ дѣлѣ.

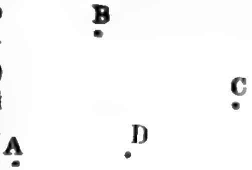
3. *Поверхности, линіи и точки отдѣльно отъ тѣлъ существовать не могутъ*; но при рѣшеніи различныхъ вопросовъ часто приходится разсматривать ихъ отдѣльно; напр. если дѣло идетъ о высотѣ башни, намъ нѣтъ надобности разсматривать всѣ измѣренія башни, и мы будемъ разсматривать только протяженіе объ одномъ измѣреніи; при опредѣленіи величины озера мы обращаемъ вниманіе только на величину его верхней, наружной поверхности; до глубины же озера намъ нѣтъ дѣла; если наконецъ мы хотимъ узнать, сколько воды помѣстится въ какомъ нибудь бассейнѣ, то должны обратить вниманіе на всѣ три измѣренія этого бассейна.

4. Чтобы удобнѣе было изслѣдовать геометрическія протяженія, ихъ представляютъ на чертежѣ; но при этомъ не должно забывать, что тѣ точки или черты, которыя мы проводимъ на бумагѣ или на доскѣ, суть только изображенія точекъ или линій геометрическихъ; на самомъ же дѣлѣ онѣ имѣютъ и длину и ширину и толщину, слѣд.

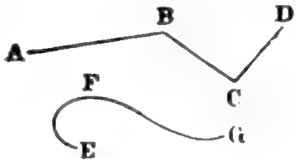
суть физическія тѣла. Точки означаются буквами; такъ на чер. 4-мъ поставлены четыре точки A, B, C, D; означая точки различными буквами, мы имѣемъ возможность изъ нѣсколькихъ точекъ отличить именно ту, о которой мы хотимъ говорить. Линіи означаютъ нѣсколькими буквами, поставленными при различныхъ точкахъ; такъ на чер. 5 представлены линіи $ABCD$ и EFG.

5. Разсматривая линіи, отдѣляющія одну отъ другой грани куба (чер. 1) и отдѣляющія боковую поверхность цилиндра (чер. 2) отъ его верхней и нижней поверхности, замѣчаемъ между ними существенное различіе: первыя суть линіи *прямыя*; вторыя наз. *кривыми* линіями. Каждый хорошо понимаетъ, какую линію надо назвать прямой, какую кривой; но опредѣлить вполнѣ точно, что такое прямая линія, невозможно: понятіе о прямой линіи принадлежитъ къ такъ называемымъ *основнымъ* понятіямъ, каковы напр. понятія — пространство, время, которыхъ опредѣлить нельзя. Линія, состоящая изъ прямыхъ, какъ напр. линія, ограничивающая грань куба, или линія $ABCD$ (чер. 5), наз. *ломаной*. Итакъ *ломаной линіей наз. такая, которая состоитъ изъ прямыхъ линій, но сама не есть прямая*; наконецъ *тѣ линіи, которыя не прямыя и не ломаныя*, наз. *кривыми*; такова линія, ограничивающая верхнюю или нижнюю часть поверхности цилиндра, а также линія EFG (чер. 5).

Чер. 4.

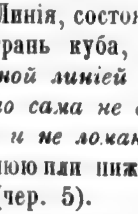


Чер. 5.



6. Поверхности бываютъ также *прямыя* и *кривыя*; каждая грань куба, а также верхняя и нижняя поверхность цилиндра, суть прямыя поверхности или *плоскости*; а боковая поверхность цилиндра, также и поверхность шара, суть поверхности кривыя. Ребро обыкновенной линейки, если только линейка вѣрна (а мы вскорѣ узнаемъ, какъ повѣрить линейку), представляетъ прямую линію; къ каждой грани куба можно гдѣ угодно приложить линейку ребромъ, и она будетъ плотно прилегать къ грани, такъ что между линейкой и гранью не останется никакого промежутка; точно также можно приложить линейку къ верхней и нижней поверхности цилиндра; стало быть по плоскости можно провести прямыя линіи во всѣхъ направленіяхъ, и эти линіи будутъ лежать на плоскости всѣми своими точками. Но если мы приложимъ линейку къ боковой поверхности цилиндра или тѣла, изображеннаго на чер. 6-мъ и наз. *конусомъ*, то она не во всѣхъ направленіяхъ будетъ прилегать плотно къ поверхности каждаго изъ этихъ тѣлъ; къ шару и вовсе нельзя приложить

Чер. 6.



линейку такъ, чтобы она прилегала къ его поверхности; иначе говоря—по боковой поверхности цилиндра и конуса можно провести прямыя линіи только по нѣкоторымъ направленіямъ; а по поверхности шара и вовсе нельзя провести прямыхъ линій. Такимъ образомъ *прямой поверхностью* или *плоскостью* наз. *такая, по которой можно представить себѣ прямыя линіи во всякомъ направленіи; поверхности же,* не имѣющія этого свойства, т. е. такія, *по которымъ или вовсе нельзя провести прямыхъ линій или можно провести ихъ только по нѣкоторымъ направленіямъ, наз. поверхностями кривыми.*

7. *Изслѣдованіе свойствъ геометрическихъ протяженій и способовъ ихъ измѣренія составляетъ предметъ геометріи.* Слово *геометрія* значитъ *землемѣріе* и указываетъ на первоначальное происхожденіе этой науки изъ потребности измѣрять разстоянія и участки на поверхности земли. Научное развитіе геометріи принадлежитъ древнимъ Грекамъ, отъ которыхъ къ намъ перешло и ея названіе. Изъ греческихъ ученыхъ замѣчателенъ въ особенности Евклидъ (300—250 г. до Р. Х.). Геометрія раздѣляется на *начальную* или элементарную и *высшую*. Начальная геометрія разсматриваетъ только простѣйшія протяженія, а именно прямую линію, плоскость; тѣла, ограниченныя плоскостями; изъ кривыхъ линій въ ней разсматривается только одна линія, наз. *окружностью*; это та линія, которая ограничиваетъ верхнюю и нижнюю поверхность цилиндра; изъ тѣлъ съ кривыми поверхностями въ начальной геометріи разсматриваются цилиндръ, конусъ и шаръ. Начальная геометрія раздѣляется на *планиметрію* и *стереометрію*; въ первой разсматриваются протяженія, которыя помѣщаются на одной плоскости; во второй—протяженія, которыя не могутъ быть помѣщены на одной плоскости. Планиметрія наз. также геометріей на плоскости, а стереометрія—геометріей въ пространствѣ.

ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

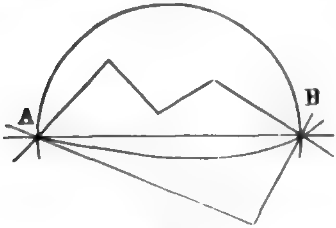
ГЛАВА I.

Прямыя и ломаныя линіи.

8. Свойства прямой линіи. *Каждую прямую линію мы можемъ представить себѣ продолженною въ обѣ стороны до безконечности.* Если вообразимъ на прямой линіи какую нибудь точку, то эта точка раздѣлитъ прямую на двѣ части; но каждая часть все еще будетъ неограничена съ одной стороны; поэтому *для ограниченія прямой необходимы двѣ точки.*

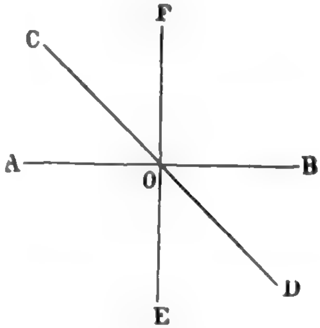
Возьмемъ двѣ точки A и B (чер. 7); черезъ нихъ можно вообразить безчисленное множество ломаныхъ и кривыхъ линій; но прямую линію только одну. Итакъ *черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую линію*; это свойство прямой, отличаю-

Чер. 7.



Чер. 8.

Чер. 9.



щее ее отъ другихъ линій, можно выразить еще такъ: *положеніе прямой линіи опредѣляется двумя точками.*

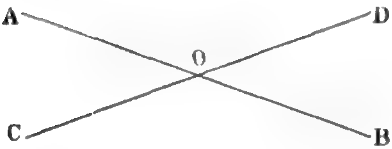
На чертежѣ прямая линія означается двумя буквами, поставленными при какихъ нибудь ея точкахъ, напр. линія CD (чер. 8); если линія будетъ ограниченная, то буквы ставятъ при концахъ ея, напр. прямая AB; ограниченную прямую означаютъ также иногда одной буквой, напр. прямая m, прямая a.

Черезъ какую нибудь точку O (чер. 9) можно провести множество прямыхъ линій AB, CD, EF....; такъ какъ точка O лежитъ на всѣхъ этихъ линіяхъ, то ее называютъ *общей* точкой прямыхъ AB, CD....

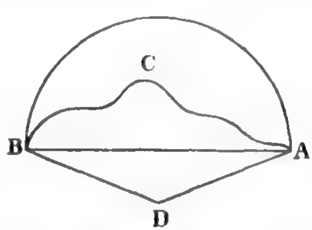
Если какія нибудь двѣ точки A и B лежатъ на двухъ прямыхъ линіяхъ, напр. на CD и EF, то линіи CD и EF сливаются въ одну, *совпадаютъ*, потому что черезъ двѣ точки A и B нельзя провести двухъ прямыхъ линій. И такъ *если двѣ прямыя линіи имѣютъ двѣ общія точки, то онѣ совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи.* Поэтому двѣ несовпадающія прямыя не могутъ имѣть болѣе одной общей точки; напр. линіи AB и CD (чер. 10) имѣютъ общую точку O и несовпадаютъ при этомъ; потому другой общей точки онѣ имѣть не могутъ. Такія прямыя линіи наз. *пересѣкающимися.* Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что *двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ.*

Возьмемъ двѣ точки A и B (чер. 11); между ними можно, какъ

Чер. 10.



Чер. 11.



мы знаемъ, провести нѣсколько кривыхъ и ломаныхъ линій и только одну прямую AB; прямая AB будетъ короче линій ACB или ADB...; вообще прямая есть самая короткая изъ всѣхъ линій, имѣющихъ съ ней общія конечныя точки; иначе говоря—*прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*; поэтому разстояніе одной точки отъ другой считается по прямой линіи, и измѣрить это разстояніе значитъ опредѣлить длину прямой линіи, проведенной между данными точками.

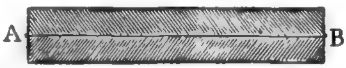
9. Черченіе прямой линіи. Прямыя линіи чертятся посредствомъ линейки; кладутъ линейку на бумагу или на доску и проводятъ по краю ея черту карандашемъ, мѣломъ и т. под. Если при этомъ не назначено точекъ, черезъ которыя должна проходить прямая линія, то линейку можно положить въ какомъ угодно мѣстѣ бумаги или доски—и тогда можно провести сколько угодно прямыхъ линій. Точно также можно провести множество прямыхъ и въ томъ случаѣ, если будетъ дана только одна точка, черезъ которую должна проходить прямая; въ обоихъ этихъ случаяхъ задача будетъ *неопредѣленною* *.

* Задача наз. *неопредѣленною*, если она допускаетъ множество рѣшеній; такова напр. слѣдующая задача: 24 пуда муки разсыпаны поровну въ нѣсколько мѣшковъ; сколько мѣшковъ? Мѣшковъ можетъ быть различное количество, смотря по тому, сколько насыпано муки въ каждый мѣшокъ; если напр. въ каждомъ мѣшкѣ по пуду, то мѣшковъ 24: если по полпуду, то 48; если по 2 фунта, то мѣшковъ 480 и т. д.

Если бы требовалось провести прямую такъ, чтобы она проходила черезъ 3, 4..., вообще больше, чѣмъ черезъ 2 данныя точки, то это требованіе не всегда можно было бы исполнить; иначе говоря, такая задача не всегда была бы возможна. Дѣйствительно, мы знаемъ, что чрезъ каждыя двѣ изъ данныхъ точекъ можно провести прямую линію; но можетъ случиться, что остальныя данныя точки не лежатъ на этой прямой. Итакъ чтобы задача о проведеніи прямой была *возможна* и *опредѣленна*, она должна быть дана въ такомъ видѣ: *черезъ двѣ данныя точки A и B провести прямую линію.* Тогда кладемъ линейку на бумагу или на доску такъ, чтобы точки A и B (чер. 12) лежали на ребрѣ ея, и потомъ проводимъ черту по краю линейки. Черта эта будетъ представлять прямую линію и слѣд. задача будетъ рѣшена вѣрно, если линейка вѣрна, т. е. если ребро ея дѣйствительно представляетъ прямую линію. Чтобъ повѣрить линейку, намѣчаютъ на бумагѣ двѣ точки и проводятъ черезъ нихъ линію, какъ указано выше; потомъ поворачиваютъ линейку около ребра (чер. 13) и опять проводятъ по тому же ребру линію; если эта линія совпадаетъ съ той, которая проведена прежде, то линейка вѣрна; если же нѣтъ (чер. 14), то линейка не вѣрна.

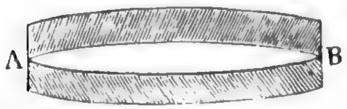
Чер. 12.

Чер. 13.



Если нужно *продолжить данную прямую AB* (чер. 15), то прикладываютъ къ ней линейку такъ, чтобы какія нибудь двѣ точки C и B прямой находились на ребрѣ; потомъ проводятъ по ребру линію *.

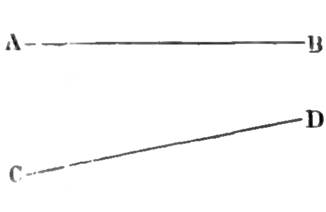
Чер. 14.



Чер. 15.

10. Сравненіе прямыхъ линій. Положимъ, что требуется *сравнить* прямыя AB и CD (чер. 16), т. е. узнать, равны ли онѣ, и если не равны, то какая изъ нихъ больше. Для этого надо наложить одну линію на другую, напр. CD на AB, такъ чтобы точка C совпала съ A и прямая CD пошла по AB; затѣмъ надо смотрѣть, куда упадетъ точка D. Если

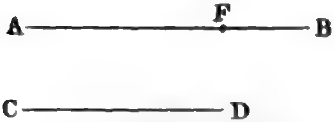
Чер. 16.



* Прямыя линіи проводятся также посредствомъ шнурка, натертаго мѣломъ, углемъ, вообще какимъ нибудь красящимъ веществомъ: укрѣпивши этотъ шнурокъ въ двухъ точкахъ на доскѣ или бумагѣ такъ, чтобы онъ былъ нати-

D упадетъ въ B, то прямая CD *совмѣстилась* съ AB и слѣд. эти прямыя равны между собою. Если D упадетъ между точками A и B, напр. въ точкѣ F (чер. 17), то CD меньше AB; наконецъ, если D упадетъ въ точку E (чер. 18) на продолженіи AB, то $CD > AB$.

Чер. 17.



Чер. 18.

Чтобы выполнить это наложеніе на самомъ дѣлѣ, употребляютъ *циркуль*. Циркуль состоитъ (чер. 19) изъ двухъ ножекъ a и b, которыя соединены между собою винтомъ такъ, что могутъ раздвигаться больше или меньше; оканчиваются ножки стальными остріями; одна изъ ножекъ вынимается, и вмѣсто нея можно вставить мѣдный рейсфедеръ съ карандашемъ или перомъ. Въ хорошемъ циркулѣ ножки, будучи сдвинуты, даютъ только одинъ проколъ на бумагѣ. Чтобы наложить прямую CD на AB (чер. 16), *беремъ* CD *циркулемъ*, т. е. ставимъ одну ножку въ точку C, а другую въ D, и затѣмъ, не измѣняя растворенія циркуля, ставимъ одну ножку его въ A, а другую на линіи AB или на ея продолженіи, смотря по тому, какая изъ данныхъ линій больше.

Рѣшеніе задачи о сравненіи двухъ прямыхъ показываетъ также, какъ *на данной прямой отложить часть, равную другой данной прямой*.

11. Сложеніе и вычитаніе прямыхъ линій. Если на прямой AB (чер. 20) возьмемъ точки C и D, то AB будетъ состоять изъ прямыхъ AC, CD и DB; слѣд. прямую AB можно разсматривать какъ сумму прямыхъ AC, CD и DB, а также и какъ сумму прямыхъ AC и CB или AD и DB; т. е. $AB = AC + CD + DB$ и $AB = AC + CB$.

Чер. 19.

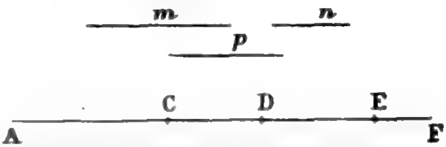
Чер 20.

Наоборотъ, CB есть разность прямыхъ AB и AC, т. е. $CB = AB - AC$. Отсюда заключаемъ, что *прямыя линіи можно складывать и вычитать*.

нутъ, приподнимаютъ его за средину и потомъ опускаютъ; ударившись о бумагу или доску, шнурокъ оставитъ на нихъ слѣдъ, который и будетъ прямая линія. Какимъ образомъ проводятся прямыя линіи по поверхности земли—мы увидимъ въ послѣдствіи.

Чтобы найти сумму прямыхъ m, n, p (чер. 21), беремъ произвольную прямую AF, откладываемъ на ней циркулемъ отъ точки A часть $AC = m$; потомъ отъ C часть $CD = n$; наконецъ отъ D часть $DE = p$; прямая $AE = m + n + p$.

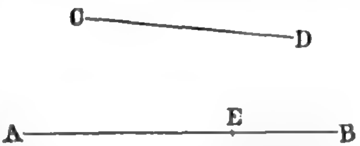
Чер. 21.



Чтобы вычесть прямую CD изъ AB (чер. 22), откладываемъ отъ A часть $AE = CD$; тогда BE будетъ разность AB и CD.

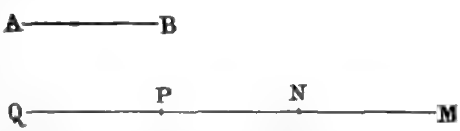
12. Умноженіе прямой линіи. Умножить значитъ взять слагаемымъ нѣсколько разъ или цѣлое множимое или какую нибудь часть его; напр. умножить $^3/_8$ на 5 значитъ $^3/_8$ повторить слагаемымъ 5 разъ; умножить 12 на $^3/_8$ значитъ восьмую часть 12-ти повторить слагаемымъ 3 раза.

Чер. 22.



При этомъ, какъ извѣстно, множитель всегда долженъ быть числомъ отвлеченнымъ; поэтому и прямыя линіи можно умножать только на отвлеченныя числа, а нельзя умножить линію на линію. Если требуется прямую AB (чер. 23) умножить на 3, то стоитъ только на неопредѣленной прямой отложить части MN, NP, PQ, равныя AB; тогда $MQ = 3AB$ и представитъ произведеніе AB на отвлеченное число 3. Еслибы нужно было умножить AB на $^3/_5$, то для этого надо бы прежде AB раздѣлить на 5 равныхъ частей и за тѣмъ одну такую часть увеличить втрое; поэтому умноженіе прямой линіи на дробное число мы можемъ произвести только тогда, когда будемъ знать, какъ дѣлится линія на равныя части.

Чер. 23.

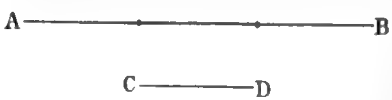


13. Дѣленіе прямыхъ линій. При дѣленіи бываютъ два случая: или надо раздѣлить какую нибудь величину на другую величину, однородную съ первой, или же надо раздѣлить величину на отвлеченное число. Въ первомъ случаѣ частное будетъ отвлеченное число, показывающее, во сколько разъ одна величина больше другой или какую часть одна величина составляетъ отъ другой; напр. раздѣлить 6 фун. на 2 пуда значитъ найти, какую часть двухъ пудовъ составляютъ 6 фун.; такъ какъ 2 пуда $=$ 80 ф., то 6 фун. $= {}^6/_{80} = {}^3/_{40}$ двухъ пуд. Если же мы дѣлимъ какую нибудь величину на отвлеченное число, то или узнаёмъ, какъ велика будетъ какая нибудь часть этой величины (это будетъ въ томъ случаѣ, когда дѣлитель цѣлое число), или опредѣляемъ цѣлую величину по даннымъ ея частямъ (въ случаѣ, если дѣлитель будетъ дробь). Такъ, дѣля 3 пуда на 8, мы находимъ 8-ю часть трехъ пудовъ—она равна 15 фун.; дѣля 3 пуда на $^8/_9$, находимъ величину, которой $^8/_9$ составляютъ 3 пуда; для этого, какъ извѣстно изъ ариѳметики, должно 3 пуда умножить на 9 и произведеніе раздѣлить на 8; тогда и найдемъ $^{27}/_8=3^3/_8$ пуда. Такъ какъ дѣленіе на дробь есть дѣйствіе, составленное изъ двухъ дѣйствій—дѣленія на числителя и умноженія на знаменателя, а умноженіе прямыхъ линій на цѣлое число мы уже показали, то при дѣленіи прямыхъ линій нужно разсмотрѣть только два случая: 1) *раздѣлить прямую на нѣсколько равныхъ частей* и 2) *раздѣлить одну прямую линію на другую.* Для рѣшенія первой изъ этихъ задачъ недостаточно тѣхъ знаній, которыя мы теперь имѣемъ, хотя легко понять, что эта задача возможна; такъ какую нибудь прямую AB мы можемъ умножить на 5, 7...., вообще на всякое цѣлое число; слѣд. эта прямая AB и будетъ пятая, седьмая... части той линіи, которая выражаетъ произведеніе AB на 5, 7....

Займемся же рѣшеніемъ второй задачи, т. е. покажемъ, какъ дѣлить одну прямую линію на другую.

14. Опредѣленіе отношенія между двумя прямыми. Когда находятъ, во сколько разъ одна величина больше другой или какую часть одна величина составляетъ отъ другой, то говорятъ, что опредѣляютъ *геометрическое отношеніе* между величинами; поэтому и задача о дѣленіи одной прямой на другую обыкновенно дается въ такомъ видѣ: *найти геометрическое отношеніе двухъ данныхъ прямыхъ*, напр. AB и CD (чер. 24). Чтобы узнать, во сколько разъ AB больше CD, надо узнать, сколько разъ CD можетъ уложиться въ AB. Для этого беремъ CD циркулемъ и откладываемъ по AB отъ точки A, пока это будетъ возможно. Если

Чер. 24.



при послѣднемъ отложеніи конецъ циркуля упадетъ въ точку B, то CD будетъ содержаться въ AB ровно нѣсколько разъ, а именно на нашемъ чертежѣ три раза; слѣд. AB больше CD въ 3 раза, или геом. отношеніе AB къ CD равно 3; наоборотъ $CD:AB=^1/_3$. Но можетъ случиться, что прямая CD укладывается въ AB (чер. 25) не ровно 3 раза, а съ остаткомъ FB; тогда мы можемъ сказать только, что геом. отн. AB къ CD больше 3, или что CD составляетъ менѣе трети AB; а чтобы въ точности опредѣлить отношеніе между данными линіями, нужно

Чер. 25.

найти такую прямую линію, которая бы содержалась безъ остатка въ обѣихъ данныхъ линіяхъ AB и CD; тогда, отложивъ эту линію по AB и CD и сосчитавъ, сколько разъ она содержится въ каждой изъ данныхъ линій, мы узнаемъ и отношеніе линій. Дѣйствительно, если эта линія содержится въ AB напр. 23 раза, а въ CD семь разъ, то отношеніе AB къ CD и будетъ $^{23}/_{7}$, или CD будетъ составлять $^{7}/_{23}$ AB.

Такая *прямая линія, которая содержится въ двухъ (или нѣсколькихъ) прямыхъ безъ остатка или цѣлое число разъ, наз. общей мѣрою данныхъ линій.*

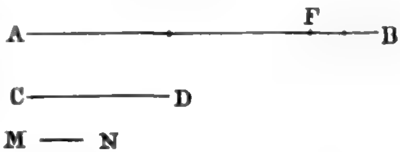
И такъ для опредѣленія отношенія между двумя прямыми нужно умѣть найти ихъ общую мѣру. Покажемъ, какъ это дѣлается.

15. Нахожденіе общей мѣры. Нахожденіе общей мѣры двухъ прямыхъ основывается на слѣдующихъ положеніяхъ.

1) *Общая мѣра можетъ быть равна меньшей изъ данныхъ линій, но не можетъ быть больше ея.* Дѣйствительно, если меньшая прямая содержится въ большей ровно нѣсколько разъ, то она и будетъ общей мѣрой, такъ какъ въ самой себѣ она укладывается одинъ разъ безъ остатка. Всякая же прямая, бо́льшая меньшей линіи, не можетъ уложиться въ этой послѣдней ни одного раза, а потому и не можетъ быть общей мѣрою.

2) *Если меньшая линія не укладывается въ большей цѣлое число разъ, то общая мѣра меньшей прямой и полученнаго при наложеніи остатка будетъ общей мѣрой и для данныхъ прямыхъ.* Дѣйствительно, положимъ, что CD (чер. 26) укладывается въ AB два раза съ остаткомъ FB. Если какая нибудь прямая MN уложится ровно нѣсколько разъ въ CD и FB, то она уложится безъ остатка и въ AB, такъ какъ $AB = AF + FB = 2CD + FB$; а въ каждой CD и въ FB прямая MN, какъ мы сказали, укладывается безъ остатка.

Чер. 26.



Положимъ теперь, что нужно найти общую мѣру прямыхъ KL и GH (чер. 27).Такъ какъ общая мѣра не можетъ быть больше GH, то пробуемъ, не будетъ ли GH общей мѣрой; для этого откладываемъ

Чер. 27.

GH по KL; пусть GH уложится въ KL три раза съ остаткомъ

ML. Общая мѣра между KL и GH будетъ таже, какъ между GH и ML; поэтому ищемъ общую мѣру для GH и ML, и такъ какъ она не можетъ быть больше ML, то пробуемъ, не будетъ ли ML общей мѣрой; для этого откладываемъ ML по GH; пусть она уложится въ GH два раза съ остаткомъ NH. Будемъ искать теперь общую мѣру для ML и NH, такъ какъ она будетъ общей мѣрой прямыхъ GH и ML, а слѣд. и данныхъ прямыхъ KL и GH. Пробуемъ, не будетъ ли NH общей мѣрой между ML и NH, для чего накладываемъ NH по ML и пусть она отложится ровно 3 раза; слѣд. NH есть общая мѣра между ML и NH, а потому и между данными прямыми KL и GH. Сосчитаемъ теперь, сколько разъ общая мѣра NH будетъ содержаться въ каждой изъ данныхъ прямыхъ. Такъ какъ $ML=3NH$, то $GH=2ML+NH=6NH+NH=7NH$; слѣд. $KL=3GH+ML=21NH+3NH=24NH$. Итакъ общая мѣра въ KL содержится 24 раза, а въ GH семь разъ; поэтому отношеніе KL къ GH равно $^{24}/_{7}$; наоборотъ $GH : KL=^{7}/_{24}$.

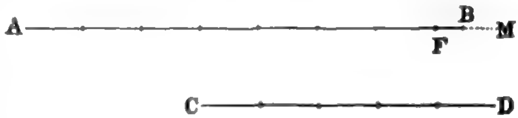
Вообще, если общая мѣра въ какой нибудь прямой AB содержится m разъ, а въ прямой CD содержится n разъ, то $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$; наоборотъ $\frac{CD}{AB}=\frac{n}{m}$.

16. Прямыя соизмѣримыя и не соизмѣримыя. Изъ предъидущаго видно, что нахожденіе общей мѣры имѣетъ большое сходство съ нахожденіемъ общаго наибо́льшаго дѣлителя двухъ чиселъ посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія. Есть однако и существенная разница между этими двумя дѣйствіями: дѣля, при нахожденіи общаго наиб. дѣлит. двухъ чиселъ, бо́льшее число на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый остат. на второй и т. д., мы непремѣнно дойдемъ до такого остатка, который содержится ровно нѣсколько разъ въ предъидущемъ остаткѣ, ибо каждыя два числа непремѣнно имѣютъ общимъ дѣлителемъ единицу; такимъ образомъ при отысканіи общ. наиб. дѣлит. дѣйствіе непремѣнно окончится. При отысканіи же общей мѣры можетъ случиться, что сколько бы мы ни продолжали последовательное наложеніе, мы все будемъ получать остатки и никогда не дойдемъ до такого остатка, который содержался бы въ предъидущемъ ровно нѣсколько разъ; такія линіи слѣд. не будутъ имѣть общей мѣры. *Прямыя, имѣющія общую мѣру*, наз. *соизмѣримыми*; *а не имѣющія ея—несоизмѣримыми.*

17. Опредѣленіе отношенія двухъ несоизмѣримыхъ прямыхъ. Такъ какъ для опредѣленія отношенія между двумя прямыми надо знать ихъ общую мѣру, а несоизмѣримыя прямыя общей мѣры не имѣютъ, то и отношеніе между такими прямыми нельзя опредѣлить совершенно точно; но, какъ мы сейчасъ увидимъ, его можно опредѣлить съ какимъ угодно приближеніемъ; т. е. можно выразить это отношеніе такимъ числомъ, которое отъ истиннаго отличалось бы меньше чѣмъ на

$^1/_{100}$, на $^1/_{1000}$, на $^1/_{75}$..., вообще менѣе, чѣмъ на какую угодно дробь $\frac{1}{n}$. (Очевидно, что нельзя выразить отношеніе такимъ числомъ, которое отъ истиннаго отличалось бы ровно на $^1/_{10}$, $^1/_{100}$.,., такъ какъ тогда придавъ или вычтя $^1/_{10}$, $^1/_{100}$... изъ найденнаго отношенія, смотря по тому, меньше или больше оно истиннаго отношенія, мы бы нашли и это послѣднее; между тѣмъ его найти нельзя). Положимъ же, что требуется *опредѣлить отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ прямыхъ AB и CD* (чер. 28) *съ точностью до* $^1/_5$, т. е. такъ, чтобы это отношеніе разнилось отъ истиннаго меньше чѣмъ на $^1/_5$. Для этого надо раздѣлить прямую CD на 5 равныхъ частей и пятую часть ея откладывать по

Чер. 28.



AB, начиная отъ одного изъ концовъ AB, напр. отъ точки A; пятая доля CD не можетъ уложиться въ AB ровно нѣсколько разъ, потому что тогда она была бы общей мѣрою AB и CD; между тѣмъ данныя линіи несоизмѣримы. Положимъ, что пятая часть CD уложилась въ AB семь разъ съ остаткомъ FB; слѣд. чтобы отложить ее 8 разъ, надо бы продолжить AB до точки напр. M.

Такъ какъ $^1/_5$ CD отложилась въ AF семь разъ, въ AM восемь разъ, а въ CD пять разъ, то отношеніе AF къ CD равно $^7/_5$, а отношеніе AM къ CD равно $^8/_5$; но данная линія AB больше AF и меньше AM, слѣд. отношеніе AB къ CD будетъ $> {^7/_5}$ и $< {^8/_5}$; иначе говоря, отношеніе $AB:CD$ содержится между $^7/_5$ и $^8/_5$. Разность между дробями $^8/_5$ и $^7/_5$ есть $^1/_5$; поэтому отношеніе AB къ CD отъ $^8/_5$ и $^7/_5$ отличается меньше чѣмъ на $^1/_5$, и положивъ $\frac{AB}{CD}={^7/_5}$ или $^8/_5$, мы сдѣлаемъ ошибку меньше чѣмъ на $^1/_5$.

Если бы требовалось опредѣлить отношеніе CD къ AB съ прежней точностью, то надо бы AB раздѣлить на 5 частей и одну часть откладывать по CD.

Если бы требовалось найти отношеніе прямыхъ AB и CD съ точностью до $^1/_{10}$, $^1/_{100}$.., $^1/_n$, то надо бы CD раздѣлить на 10,100... вообще на n равныхъ частей. Замѣтимъ въ заключеніе, что такъ какъ мы еще не умѣемъ дѣлить прямую на равныя части, то и не можемъ пока опредѣлять отношеніе двухъ прямыхъ съ даннымъ приближеніемъ.

18. Измѣреніе прямыхъ. *Измѣрить* какую нибудь *величину значитъ опредѣлить отношеніе ея къ другой величинѣ, однородной съ ней, принятой за единицу.* Для измѣренія линій въ Россіи приняты различныя мѣры: футъ, дюймъ, сажень, и проч. При измѣреніи прямыхъ, начерченныхъ на бумагѣ, обыкновенно единицею служитъ дюймъ. Желая опредѣлить длину прямой AB (чер. 29), берутъ

Чер. 29.

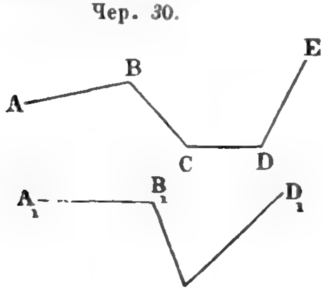
ее циркулемъ и накладываютъ на ребро линейки MN, раздѣленной на десятыя доли дюйма, начиная отъ конца M; если при этомъ другая ножка циркуля упадетъ между 15 и 16 дѣленіями, то длина $AB > {}^{15}/_{10}$ и $< {}^{16}/_{10}$ дюйм.; слѣд. положивъ $AB = 1{,}5$ или $1{,}6$ дюйм., мы дѣлаемъ ошибку менѣе 0,1 дюйма или опредѣляемъ отношеніе прямой AB къ дюйму съ точностью до 0,1.

Такимъ образомъ длину всякой прямой мы можемъ выразить числомъ, измѣривъ ее какой либо единицей; наоборотъ, зная число, выражающее длину какой нибудь прямой, мы можемъ начертить или, какъ говорятъ, *построить* эту прямую; такъ если прямая $=4$ вершкамъ, то отложивъ на произвольной прямой линіи отъ какой нибудь точки ея 4 раза прямую въ 1 верш., мы и получимъ прямую $=4$ верш. Частó не указываютъ, въ какой именно единицѣ выражена прямая числомъ; напр. говорятъ прямая a; для построенія ея принимаемъ за единицу какую нибудь произвольную прямую и чертимъ линію, содержащую a такихъ единицъ.

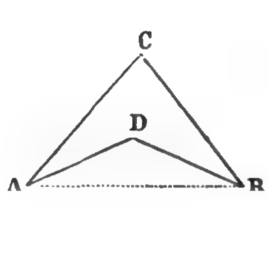
19. Ломаныя линіи. Если нужно узнать, на сколько одна ломаная линія, напр. $ABCDE$ (чер.30) больше или меньше другой $A_1B_1C_1D_1$, то сложивъ отдѣльныя прямыя $AB, BC\ldots\ldots$ и $A_1B_1, B_1C_1\ldots$, изъ которыхъ состоитъ та и другая ломаныя линіи, мы получимъ двѣ прямыя, изъ коихъ одна будетъ равна одной ломаной, другая—другой. Найдя разность этихъ прямыхъ, мы будемъ знать и разность ломаныхъ. Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, для сравненія ломаныхъ нѣтъ надобности прибѣгать къ такому способу, а можно ломаныя сравнивать и непосредственно. Мы здѣсь укажемъ только одинъ такой случай, который пригодится намъ въ послѣдствіи.

20. Возьмемъ прямую AB (чер. 31) и двѣ точки C, D, лежащія

Чер. 30.



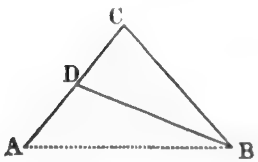
Чер. 31.



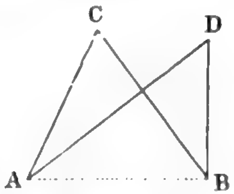
внѣ этой прямой и притомъ по одну сторону ея. Соединивъ C и D съ A и B, получимъ двѣ ломаныхъ ACB и ADB, состоящихъ каждая изъ двухъ прямыхъ. Эти ломаныя могутъ расположиться одна внутри другой, какъ представлено на чер. 31 и 32, или же могутъ пересѣкаться (чер. 33)*. Въ первомъ случаѣ (чер. 31 и 32) ломаная ACB наз. *внѣшней*, а ADB—*внутренней*. Весьма легко сравнить ломаныя ACB и ADB въ томъ случаѣ, когда (чер. 32) у нихъ есть общая часть AD; при этомъ остальными частями ихъ будутъ ломаная DCB и прямая DB, проведенныя между точками D и B. Такъ какъ $DB<DCB$, потому что прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, то и $AD+DB<AD+DCB$, или $ADB<ACB$, потому что если къ неравнымъ величинамъ (DB и DCB) придать поровну (по AD), то суммы получатся не равныя, и меньщая сумма получится отъ меньшей величины. Итакъ если ломаныя имѣютъ общую часть, то ломаная внутренняя меньше ломаной внѣшней.

Когда обѣ ломаныя не имѣютъ общей части (чер. 34), то для сравненія ихъ продолжимъ одну изъ прямыхъ, составляющихъ внутреннюю ломаную, напр. AD, до пересѣченія съ внѣшней въ точкѣ F**. Разсматривая ломаныя ACB и AFB, замѣчаемъ, что онѣ имѣютъ общую часть FB и что первая изъ нихъ есть внѣшняя; точно также ломаныя AFB и ADB имѣютъ общую часть AD, и первая изъ нихъ есть внѣшняя; поэтому, на основаніи предъидущаго случая, $ACB>AFB$; а $AFB>ADB$; слѣд. и подавно $ACB>ADB$; т. е. и въ этомъ случаѣ, а слѣд. и вообще *внѣшняя ломаная больше внутренней*.

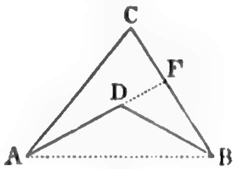
Чер. 32.



Чер. 33.

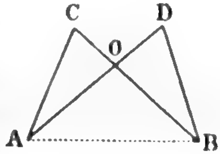


Чер. 34.



21. Если ломаныя ACB и ADB (чер. 35) пересѣкаются, то отдаляя точку C или точку D по линіямъ AC и BD, можно попеременно дѣлать то линію $ACB>ADB$, то наоборотъ $ADB>ACB$; въ этомъ случаѣ слѣд. нельзя

Чер. 35.



* Замѣтимъ, что ломаныя ACB и ADB (чер. 33) могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, потому что другая точка могла бы получиться только отъ пересѣченія *ограниченныхъ* прямыхъ AC и DB; а для этого прямая AC должна идти между AD и AB, и тогда обѣ конечныя точки прямой BC находились бы по одну сторону прямой AD и слѣд. между BC и AD не послѣдовало бы пересѣченія.

** Пересѣченіе это должно необходимо послѣдовать, потому что прямая AD можетъ быть продолжена вправо до безконечности и потому должна выйти изъ вывести заключенія объ относительной длинѣ ломаныхъ линій; но за то, какъ сейчасъ увидимъ, можно вывести другое важное свойство ломаныхъ.

На основаніи свойства прямой имѣемъ

$$AO+CO>AC$$

и $OD+OB>DB$. Если мы сложимъ почленно эти неравенства, то отъ сложенія первыхъ частей неравенствъ получимъ $AD+BC$, потому что $AO+OD=AD$ и $CO+OB=CB$; а отъ сложенія вторыхъ частей получимъ $AC+DB$. Такъ какъ первыя части неравенствъ больше вторыхъ, то и сумма первыхъ частей больше суммы вторыхъ, слѣд. $AD+CB>AC+DB$; т. е. *сумма пересѣкающихся частей ломаныхъ больше суммы частей не пересѣкающихся*. Итакъ мы нашли, что *если двѣ ломаныя, состоящія каждая изъ двухъ прямыхъ, имѣющія общія конечныя точки и расположенныя по одну сторону прямой, соединяющей эти точки, находятся одна внутри другой, то ломаная внѣшняя больше внутренней; а если онѣ пересѣкаются, то въ нихъ сумма пересѣкающихся прямыхъ больше суммы не пересѣкающихся.*

22. Еслибы намъ до этого вывода предложили сказать, что больше въ чер. 35-мъ—сумма ли пересѣкающихся или сумма не пересѣкающихся прямыхъ, то мы затруднились бы дать отвѣтъ по одному взгляду на чертежъ; а если бы и могли, то на такое сужденіе по глазомѣру нельзя полагаться: чувства наши не рѣдко обманываютъ насъ; такъ, если мы стоимъ въ концѣ длиннаго корридора, то намъ кажется, что противоположный конецъ его и уже и ниже того конца, въ которомъ мы находимся; между тѣмъ на самомъ дѣлѣ корридоръ вездѣ имѣетъ одинакую вышину и ширину. Можно бы достигнуть нашего вывода о сравнительной величинѣ $AC+DB$ и $AD+CB$, найдя въ дѣйствительности ту и другую сумму и сравнивъ полученныя такимъ образомъ прямыя; но и такой выводъ не можетъ быть вполнѣ точнымъ, такъ какъ онъ зависитъ отъ того, на сколько точны инструменты, посредствомъ которыхъ будетъ исполненъ чертежъ, необходимый для сравненія прямыхъ, а также и отъ искусства того, кто будетъ дѣлать чертежъ. Такъ, если мы примѣнимъ этотъ способъ къ чер. 36-му, то увидимъ, что суммы $AC+BD$ и $AD+BC$ будутъ такъ мало отличаться одна отъ другой, что мы можемъ счесть ихъ равными. Наконецъ, главный недостатокъ разсматриваемаго пріема состоитъ въ томъ, что сдѣланный при помощи его выводъ можетъ быть отнесенъ только къ тому чертежу, надъ

Чер. 36.

ограниченной части плоскости ACB, причемъ пересѣкаться съ AB она не можетъ, такъ какъ уже имѣетъ съ ней одну общую точку A

которымъ онъ сдѣланъ; распространить же его на всѣ подобные чертежи, сдѣлать его *общимъ* нельзя, такъ какъ, очевидно, такихъ чертежей можетъ быть безчисленное множество.

Всѣхъ этихъ недостатковъ можно избѣжать, дѣлая выводы такъ, какъ мы сдѣлали въ первый разъ, т. е. помощью разсужденій. Дѣйствительно, 1) этотъ пріемъ относится ко всѣмъ чертежамъ, потому что во всякомъ чертежѣ всегда отрѣзки пересѣкающихся прямыхъ, прилегающіе къ каждой изъ прямыхъ непересѣкающихся, составятъ ломаную линію, имѣющую съ одной изъ непересѣкающихся прямыхъ общія конечныя точки, и слѣд. всегда сумма этихъ отрѣзковъ будетъ больше прямой непересѣкающейся; 2) онъ не зависитъ отъ точности чертежа: мы говоримъ, что отрѣзки AO и OC (чер. 35) составляютъ ломаную линію не потому, что мы видимъ это на чертежѣ, а потому, что между точками A и C, мы знаемъ, проведена уже прямая AC и слѣдов. другая линія AOC будетъ уже не прямою; а какъ AOC состоитъ изъ прямыхъ, то она *должна быть* ломаною. Замѣтимъ, что выводъ, получаемый помощью разсужденій, можетъ быть сдѣланъ и безъ чертежа: чертежъ служитъ только для облегченія; иначе намъ пришлось бы воображать всѣ тѣ линіи, о которыхъ идетъ дѣло.

23. Выводъ относительно свойствъ ломаныхъ линій мы сдѣлали, основываясь на двухъ, извѣстныхъ намъ, свойствахъ прямой линіи, а именно: 1) что прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками и 2) что между двумя точками можно провести только одну прямую. Кромѣ того мы пользовались еще слѣдующими соображеніями: 1) если къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, то бо̀льшую сумму получимъ отъ большей величины; 2) если изъ трехъ величинъ первая больше второй, а вторая больше третьей, то первая и подавно больше третьей; 3) если къ двумъ неравнымъ величинамъ прибавимъ—къ бо̀льшей бо̀льшую величину, а къ меньшей меньшую, то первая сумма будетъ больше второй. Всѣ эти свойства прямой линіи и вообще величинъ на столько просты, что истинность ихъ становится очевидною для каждаго, кто только вдумается въ ихъ выраженіе и пойметъ, о чемъ идетъ рѣчь. Въ самомъ дѣлѣ, никто не можетъ представить себѣ между двумя точками линію короче прямой; никто не можетъ допустить, чтобы отъ сложенія двухъ равныхъ величинъ съ неравными получились равныя суммы. Выводы о свойствахъ ломаныхъ, сдѣланные нами на основаніи вышеизложенныхъ, несомнѣнно вѣрныхъ, свойствъ величинъ, также должны быть вѣрны.

24. Аксіомы и теоремы. Такимъ образомъ геометрическія протяженія, какъ и вообще величины, имѣютъ свойства двухъ родовъ: одни свойства вполнѣ очевидны; другія не могутъ быть признаны несомнѣнными съ перваго взгляда, и въ истинности ихъ мы убѣждаемся только послѣ нѣкоторыхъ разсужденій. Истины, которыя вполнѣ очевидны, наз. *аксіомами*; истины, въ справедливости которыхъ мы убѣждаемся только послѣ нѣкоторыхъ разсужденій, наз. *теоремами*. Рядъ разсужденій, убѣждающихъ насъ въ справедливости какой нибудь теоремы (геометрической или вообще математической), наз. *доказательствомъ*. При доказательствѣ теоремъ приходится основываться или на аксіомахъ или на прежде доказанныхъ теоремахъ; такъ при доказательствѣ теоремы, что вообще ломаная внутренняя меньше ломаной внѣшней, мы основывались на доказанномъ раньше случаѣ, когда обѣ ломаныя имѣли общую часть. Кромѣ аксіомъ, перечисленныхъ нами, есть еще нѣсколько; напр. двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою; если отъ равныхъ величинъ отнять поровну, то и остатки получимъ равныя, и т. под.

Безъ аксіомъ обойтись нельзя; дѣйствительно, еслибъ приведенныя нами аксіомы и можно было доказать, то при доказательствахъ надо бы основываться на истинахъ, еще болѣе простыхъ и очевидныхъ, которыя надо было бы принять безъ доказательства; стало быть прежнія аксіомы сдѣлались бы теоремами, но за то явились бы аксіомы новыя. Впрочемъ надо всячески стараться сокращать число аксіомъ, и если какое либо свойство геометрическаго протяженія кажется очевиднымъ, то прежде, чѣмъ признать его аксіомой, необходимо убѣдиться, что его невозможно доказать на основаніи принятыхъ раньше аксіомъ и доказанныхъ теоремъ.

25. Разсматривая доказанную нами теорему о внѣшней и внутренней ломаной, мы замѣчаемъ въ ней двѣ части: во второй части дѣлается *заключеніе* о сравнительной величинѣ обѣихъ ломаныхъ; а въ первой объясняется, при какихъ обстоятельствахъ или *условіяхъ* можно сдѣлать это заключеніе. Такъ изъ теоремы видно, что не всегда можно заключить, что внутренняя ломаная меньше внѣшней, а лишь тогда, когда каждая изъ нихъ состоитъ изъ двухъ прямыхъ линій, когда ломаныя имѣютъ общія конечныя точки и расположены по одну сторону прямой, соединяющей эти точки. Подобнымъ образомъ, и всѣ вообще *теоремы состоятъ изъ двухъ частей: условія и заключенія*.

26. Бываютъ теоремы, на столько простыя, что доказательство ихъ состоитъ только въ указаніи на какую либо аксіому или прежде-доказанную теорему; такія теоремы наз. *слѣдствіями*.

27. Двѣ такія теоремы, что одно изъ условій первой теоремы является заключеніемъ во второй, а заключеніе первой является въ числѣ условій второй, наз. *взаимнообратными*; при этомъ одна изъ теоремъ (какая угодно) наз. *прямой*, а другая—*обратной*. Если доказана прямая теорема, то нельзя дѣлать заключенія, что и обратная теорема вѣрна. Возьмемъ напр. ариѳметическую теорему: если множитель какого либо произведенія дѣлится безъ остатка на какое нибудь число, то и произведеніе раздѣлится на это число; такъ 6 дѣлится на 2, а потому и $6 . 5=30$ раздѣлится на 2. Обратная теорема: если произведеніе дѣлится на какое нибудь число, то одинъ изъ множителей этого произведенія раздѣлится на тоже число—не всегда справедлива; такъ $8.6=48$ дѣлится на 12, но ни 8 ни 6 не дѣлятся на 12.

28. Задачи. 1) Сколько прямыхъ линій можно провести между 3, 4, 5, 6.... n точками, если каждыя три точки не лежатъ на одной прямой?

2) Опредѣлить наибольшее число точекъ пересѣченія 3, 4, 5, 6...n прямыхъ?

3) На плоскости дано 9 точекъ, изъ которыхъ 4 лежатъ на одной прямой; между остальными же нѣтъ трехъ, лежащихъ на одной прямой какъ между собою, такъ и съ первыми четырьмя; сколько различныхъ прямыхъ можно провести, соединяя эти точки по двѣ?

4) Рѣшить предъид. зад., полагая, что дано 12 точекъ и изъ нихъ на одной прямой лежатъ 4? 5? 6?

5) Рѣшить зад. 4, полагая, что дано 15 точекъ и изъ нихъ на одной прямой лежатъ 4? 5? 6?

6) На прямой AB между точками A и B даны точки C, D, K; опредѣлить: $AC+CD+DK$? сумму CD, DK и KB? $AB-DK$? разность AB и CD? $AD+DK+KB-AC$? $AC+CK+KB-CD$? $AK-DK$? разность между AB и суммою CD и DK? Суммою и разностью какихъ прямыхъ можно замѣнить AD? AK? CK?

7) Прямую AC продолжить до точки B такъ, чтобы $AB=5AC$? $AC={}^1/_3\,AB$? $AC={}^1/_5\,AB$?

8) На прямой AN отъ точки A послѣдовательно отложены $AC=$ $=CD=DK=KL=LM=MB$; опредѣлить $AC.5$? $3CD$? $\frac{AB}{AC}$? $AB:AK$? $\frac{AB}{AM}$? $\frac{AC}{AB}$? $\frac{AK}{AB}$? $AD:AM$? $\frac{AL}{AB}$? ${}^1/_3 CL$? ${}^2/_3 CB$?

9) На прямой AN отъ точки A отложены послѣдовательно AC, $CD=2AC$, $DK=3CD$, $KB=2DK$; опредѣлить отношенія: AB къ KA? AB къ DK? $CK:DB$? $AD:KB$? $AD:DB$? $CK:AB$? $AB:CD$?

10) Изъ двухъ прямыхъ AB и CD вторая укладывается въ первой 4 раза съ остаткомъ; остатокъ укладывается въ CD три раза съ остаткомъ; этотъ второй остатокъ укладывается въ первомъ остаткѣ 5 разъ съ остаткомъ; третій остатокъ содержится во второмъ остаткѣ ровно 2 раза. Опредѣлить отношеніе AB и CD?

11) На прямой AB отъ точки A отложены послѣдовательно AC, $CD=3AC$, $DK=2CD$, послѣ чего остался остатокъ $KB<AC$; опредѣлить съ возможной при этомъ построеніи точностью отношенія: $\frac{AB}{AK}$? $\frac{AB}{DK}$? $\frac{DB}{CK}$? $\frac{CB}{AK}$? $\frac{CB}{DK}$? $\frac{CB}{CD}$? $\frac{AB}{CD}$? $\frac{AB}{AD}$? $\frac{DB}{CD}$? $\frac{DB}{AD}$? $\frac{DB}{AK}$?

12) На прямой MN отъ точки O отложены въ обѣ стороны прямыя OA и OB, равныя между собою; на той же прямой дана точка C такъ, что B находится между A и C; доказать, что разстояніе C отъ средины AB равно полусуммѣ разстояній C отъ A и B?

13) На прямой MN отъ точки O отложены $OA=OB$ и дана точка C между A и B; доказать, что разстояніе C отъ средины AB равно полуразности разстояній C отъ A и B?

14) Начертить прямую AB и измѣрить ее съ точностью до 0,1 дюйм.?

15) Построить числа 3, 5, 7, принимая за единицу прямую AB?

16) Построить число 4, принимая за единицу прямую AB, и затѣмъ построить числа $3^1/_2$, $7^1/_4$, $5^1/_3$, принимая за единицу прежде построенную прямую?

17) Изъ двухъ прямыхъ AB и CD вторая укладывается въ первой 3 раза съ остаткомъ; этотъ остатокъ укладывается въ меньшей изъ прямыхъ 3 раза съ остаткомъ; этотъ второй остатокъ содержится въ первомъ 5 разъ съ остаткомъ; наконецъ третій остатокъ содержится во второмъ 2 раза. Опредѣлить въ дюймахъ длину AB, если $CD=1$ аршину?

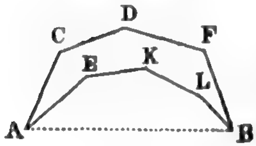
18) На прямой, проходящей черезъ точки A и B, дана точка C, такъ что $AC=5{,}72$ дюйм., $BC=2{,}512$ дюйм.; опредѣлить длину AB и разстояніе C отъ средины AB, если C находится между A и B? если C не находится между A и B?

19) На прямой $AB=100$ дюйм. даны точки C и D; $CD=35$ дюйм.; средина L прямой CD отстоитъ отъ средины M линіи AB на 10 дюйм.; опредѣлить разстоянія C и D отъ A, если L находится между A и M? если L находится между M и B?

20) Выпрямить данную ломаную $ABCDE$ (т. е. найти прямую, равную длинѣ ломаной)?

21) Найти разность ломаныхъ $ABCDE$ и $FKMN$?

Чер. 37.



22) Три точки, не лежащія на одной прямой, соединить прямыми и доказать, что каждая изъ прямыхъ больше разности двухъ другихъ?

23) Между прямыми AB, BC и CA, соединяющими точки A, B, C, взять точку O и доказать, что сумма разстояній этой точки отъ A, B, C больше полусуммы данныхъ прямыхъ?

24) При построеніи, указанномъ въ предъид. зад., доказать, что $OA+OB+OC<AB+BC+CA$?

25) Доказать, что изъ двухъ выпуклыхъ* ломаныхъ линій $ACDFB$ и $AEKLB$ (чер. 37), имѣющихъ общія конечныя точки и расположенныхъ по одну сторону прямой, соединяющей эти точки, внѣшняя больше внутренней?

ГЛАВА II.

Углы.

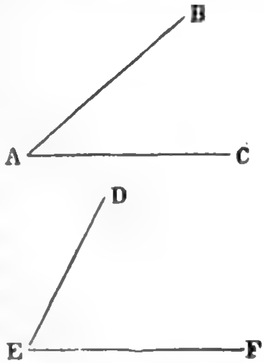
29. Возьмемъ двѣ точки A и E (чер. 38) и проведемъ изъ каждой точки по двѣ произвольныя прямыя AB и AC, ED и EF. Разсматри-

---

* *Выпуклой* ломаной наз. такая, которую прямая можетъ пересѣчь не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

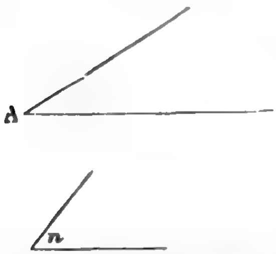
вая обѣ пары прямыхъ, замѣчаемъ, что взаимное положенiе прямыхъ AB и AC иное, чѣмъ положенiе прямыхъ второй пары; именно AB наклонена къ AC не такъ, какъ ED наклонена къ EF. Чтобы болѣе опредѣленно можно было изслѣдовать взаимное положенiе двухъ прямыхъ, выходящихъ изъ одной точки, разсматриваютъ *уголъ*, образуемый этими прямыми. Такимъ образомъ уголъ образуется двумя прямыми, выходящими изъ одной точки, или двумя пересѣкающимися прямыми. Точка пересѣченiя прямыхъ, образующихъ уголъ, наз. *вершиною* угла; а самыя прямыя—*сторонами* или боками угла. Уголъ означается тремя буквами, изъ которыхъ одна ставится при вершинѣ, а двѣ другiя на сторонахъ угла; буква, стоящая при вершинѣ, пишется и произносится между двумя другими буквами; такъ углы, изображенные на чер. 38, надо писать и произносить BAC, DEF или CAB, FED, а не ABC или EFD. Иногда уг. означается и одной буквой, поставленной при его вершинѣ. напр. уг. A (чер. 39), или буквой, поставленной внутри угла, напр. уг. n. Вмѣсто слова уголъ употребляется знакъ $\angle$.

Чор. 38.

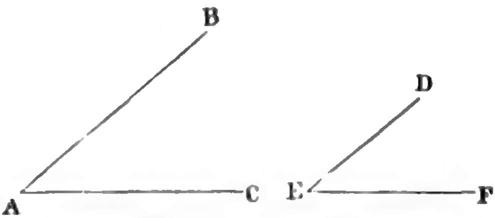


30. Сравненiе угловъ. Чтобъ узнать, равны ли два угла BAC и DEF (чер. 40), надо наложить одинъ изъ нихъ на другой, напр.

Чер. 39.

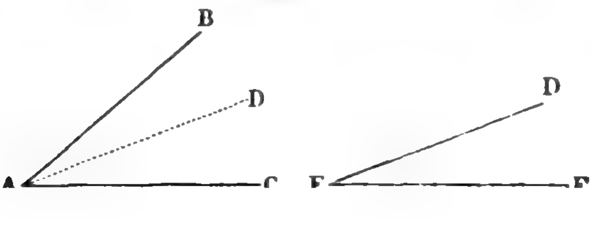


Чер. 40.



DEF на BAC, такъ чтобы вершина E совмѣстилась съ вершиной A и сторона EF пошла по сторонѣ AC. Если при этомъ сторона ED пой-

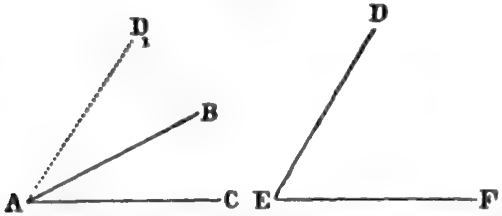
Чер. 41.



детъ по AB, то уголъ DEF *совмѣщается* съ уг. BAC, и такіе углы равны. Если же сторона ED пойдетъ внутри уг. CAB (чер. 41), принявъ положеніе AD_1, или внѣ его (чер. 42), то углы не будутъ равны, и въ первомъ случаѣ уг. BAC больше DEF на уг. BAD_1; во второмъ BAC меньше DEF на уг. BAD_1.

31. Такъ какъ о равенствѣ двухъ угловъ мы заключаемъ по тому, что они совмѣщаются, при совмѣщеніи же (чер. 40) конечныя точки D и F сторонъ уг. DEF могутъ и не совпасть съ конечными точками B и C сторонъ угла BAC, то слѣд. *величина угла не зависитъ отъ длины его сторонъ*, а зависитъ только отъ наклоненія ихъ другъ къ другу, что и должно быть, такъ какъ углы разсматриваются для опредѣленія взаимнаго положенія пересѣкающихся прямыхъ, а не величины этихъ прямыхъ.

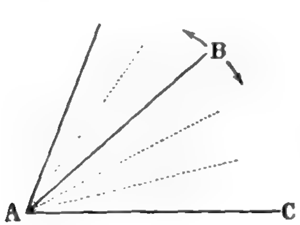
Чер. 42.



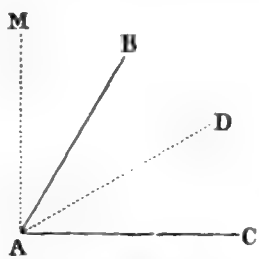
Наклоненіе сторонъ уг. BAC (чер. 43) будетъ измѣняться, если мы, оставивъ сторону AC неподвижною, будемъ вращать сторону BA около вершины A; тогда уг. BAC будетъ увеличиваться или уменьшаться, смотря по направленію вращенія. Отсюда заключаемъ, что уголъ есть величина.

32. Выполнить на самомъ дѣлѣ наложеніе одного угла на другой мы теперь еще не можемъ; въ послѣдствіи будетъ указано, какъ это сдѣлать помощью циркуля. Тогда же мы покажемъ, какъ производить надъ углами ариѳметическія дѣйствія. Но чтобы убѣдиться въ возможности производства этихъ дѣйствій, возьмемъ уг. BAC (чер. 44) и проведемъ изъ вершины его двѣ прямыя: AD внутри

Чер. 43.



Чер. 44.

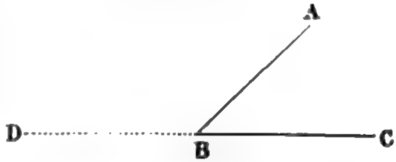


угла и AM—внѣ его; тогда уг. MAC будетъ представлять сумму уг. MAB, BAD и DAC; $\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD$. Если же при этомъ углы MAB, BAD и DAC равны между собою, то уг. MAC

будетъ равенъ произведенію уг. MAB на 3; $MAB = \frac{MAC}{3}$; $MAD = {}^2/_3\ MAC$; отношеніе уг. MAC къ DAC равно 3.

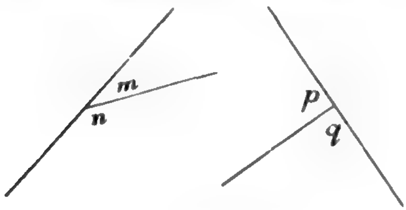
33. Смежные углы. Возьмемъ уг. ABC (чер. 45) и продолжимъ одну изъ его сторонъ, напр. CB, за вершину B; тогда получимъ уг. ABD; этотъ уг. съ даннымъ уг. ABC имѣетъ общую вершину B и общую сторону BA; а двѣ остальныя стороны ихъ BC и BD составляютъ одну прямую CD. Углы ABC и ABD, а также углы m и n, p и q (чер. 46), наз. *смежными* углами. Итакъ *смежными углами наз. такіе два угла, у которыхъ одна сторона общая, а двѣ другія стороны составляютъ одну прямую линію.*

Чер. 45.

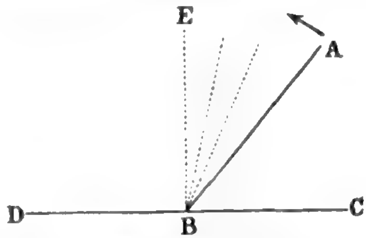


34. Если мы представимъ себѣ, что въ смежныхъ уг. (чер. 47) общая сторона AB будетъ вращаться около вершины B влѣво, то уг.

Чер. 46.

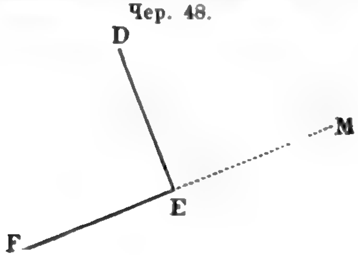


Чер. 47.

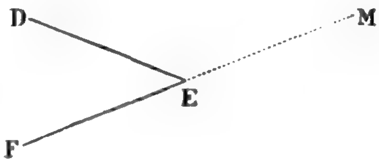


ABC будетъ увеличиваться, а уг. ABD уменьшаться, и сторона AB можетъ принять такое положеніе BE, что оба угла DBE и CBE сдѣлаются равными между собою. Въ этомъ случаѣ каждый изъ смежныхъ уг. наз. прямымъ. Итакъ *прямымъ угломъ наз. каждый изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ.* Поэтому, чтобы узнать, будетъ ли какой нибудь уг. FED (чер. 48) прямымъ или нѣтъ, надо сравнить его съ смежнымъ ему угломъ, продолживъ для этого одну

Чер. 48.



Чер. 49.

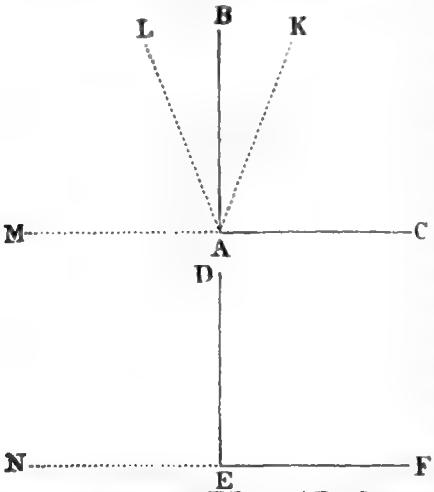


изъ сторонъ его, напр. FE; если окажется, что $FED=DEM$, то оба они будутъ прямые. Если же данный уг. DEF (чер. 49) не будетъ равенъ своему смежному, то какъ онъ, такъ и уг. DEM, не будутъ прямыми уг.; въ этомъ случаѣ бо̀льшій изъ нихъ, именно DEM, наз. *тупымъ*; а меньшій, т. е. уголъ DEF, наз. *острымъ*.

И такъ *тупымъ угломъ наз. бо̀льшій, а острымъ угломъ меньшій изъ смежныхъ угловъ.*

35. Свойство прямыхъ угловъ. По самому опредѣленію прямаго угла, смежные прямые углы равны между собою. Посмотримъ, будутъ ли равны несмежные прямые углы. Чтобы узнать это, надо два прямыхъ угла BAC и DEF (чер. 50) наложить одинъ на другой указаннымъ выше (§ 30) способомъ. Но мы не можемъ выполнить въ дѣйствительности это наложеніе; да еслибы и могли, то въ этомъ было бы мало пользы, потому что, какъ выше сказано (§ 22), изъ такого наложенія при помощи инструментовъ нельзя вывести достаточно строгаго заключенія. Поэтому мы *вообразимъ*, что уг. DEF наложенъ на BAC такъ, что вершины ихъ и стороны EF и AC совпали, и разсудимъ, какъ при этомъ должны расположиться остальныя стороны ED и AB. Сторона ED можетъ, какъ мы знаемъ, принять одно изъ трехъ положеній: 1) или она пойдетъ вправо отъ AB, напр. по линіи AK; 2) или влѣво отъ AB по линіи AL; 3) или ED совпадетъ съ AB. Чтобы опредѣлить, какое изъ этихъ положеній приметъ ED, надо воспользоваться условіемъ, что накладываемые углы прямые, т. е. такіе, что каждый изъ нихъ равенъ своему смежному. Поэтому продолжимъ прямыя CA и FE; тогда получимъ уг. $BAM=BAC$ и $DEN=DEF$. Когда мы уг. DEF наложимъ на BAC такъ, чтобы E упала въ A и EF совпала съ AC, то и продолженія этихъ сторонъ AM и EN также должны совпасть, потому что прямыя линіи, имѣющія только двѣ общія точки, совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи. Если мы предположимъ, что прямая ED пойдетъ по AK, то уг. $DEF<$уг. BAC, а $BAM<DEN$, потому что сторона ED угла DEF идетъ внутри уг. BAC, и сторона ED уг. DEN идетъ внѣ угла BAM. Но такъ какъ $BAM=BAC$, то слѣд. $DEF<BAC$; а $BAC<DEN$, поэтому и подавно $DEF<DEN$. Итакъ сторона ED пошла бы вправо отъ AB только въ такомъ случаѣ, если бы уг. DEF былъ

Чер. 50.

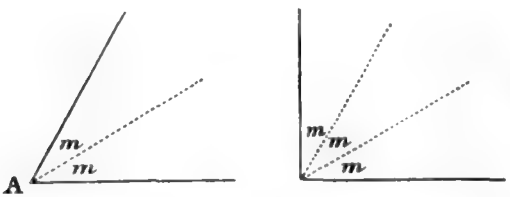


меньше уг. DEN; но эти углы равны, поэтому ED не можетъ идти вправо отъ AB. Точно также можно доказать, что для того, чтобы сторона ED пошла влѣво отъ AB, нужно, чтобы уг. DEF былъ больше DEN. Такимъ образомъ ED не можетъ идти ни вправо, ни влѣво отъ AB, а потому она должна совпасть съ AB, и слѣд. уг. BAC=уг. DEF. Что мы сейчасъ сказали о прямыхъ уг. BAC и DEF, можно повторить и о всякихъ двухъ прямыхъ углахъ; слѣд. *всѣ прямые углы равны между собою;* иначе говоря—прямой уголъ имѣетъ всегда одну и туже величину, тогда какъ острые или тупые углы могутъ быть больше и меньше: *прямой уголъ есть величина постоянная.*

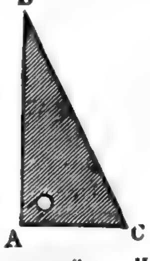
36. Измѣреніе угловъ. Измѣрить уголъ значитъ найти отношеніе его къ другому углу, принятому за единицу; за единицу угловъ принимаютъ уголъ прямой, какъ величину постоянную. Прямой уг. означаютъ обыкновенно буквой d (droit). Такимъ образомъ, если уг. A (чер. 51)$={}^2/_3d$, то это значитъ, что въ уг. A укладывается два раза уг. m, составляющій треть прямаго угла; если тупой уг. $b={}^7/_5\,d$, то въ углѣ b уложится прямой уголъ и останется еще остатокъ, въ которомъ два раза уложится пятая часть прямаго угла. Способъ измѣренія угловъ мы теперь показать не можемъ, ибо для этого нужно умѣть находить отношеніе угловъ, причемъ придется накладывать одинъ уголъ на другой.

37. Черченіе прямыхъ угловъ. Для черченія прямыхъ угловъ употребляется приборъ ABC (чер. 52), наз. *наугольникомъ;*

Чер. 51.

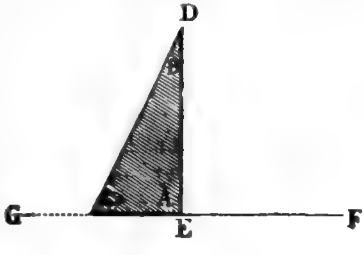


Чер. 52.



это дощечка, которой ребра BA и AC образуютъ прямой уг. Чтобъ начертить прямой уг., нужно приложить наугольникъ къ бумагѣ или доскѣ и обчертить его ребра AB и AC, начиная отъ точки A. Полученный уголъ будетъ вѣренъ, если вѣренъ уголъ наугольника. Чтобъ повѣрить наугольникъ, надо у начерченнаго посредствомъ наугольника угла DEF (чер. 53) продолжить одну изъ сторонъ, напр. FE, и сравнить новый уг. DEG

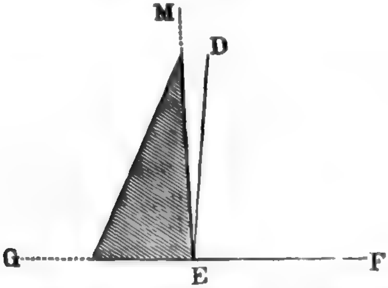
Чер. 53.



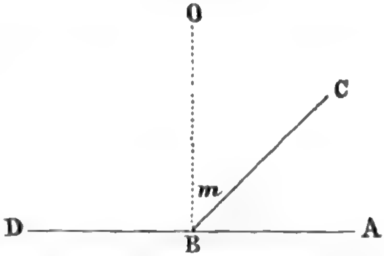
съ уг. BAC (чер. 52) наугольника; для этого надо приложить наугольникъ къ бумагѣ такъ, чтобы его сторона AC совпала съ EG и вершина A съ вершиной E, и очертить другую сторону AB. Если начерченная линія совпадетъ съ ED, то наугольникъ вѣренъ, т. е. на немъ уг. BAC дѣйствительно прямой; если же начерченная линія EM не совпадетъ съ ED (чер. 54), то наугольникъ не вѣренъ, потому что тогда уг. DEF, счерченный съ прямаго угла наугольника, не будетъ равенъ своему смежному DEG и слѣд. не будетъ на самомъ дѣлѣ прямымъ. Замѣтимъ, что наугольникъ употребляется преимущественно въ черченіи; въ геометріи же всѣ построенія требуется производить помощью только циркуля и линейки. Какимъ образомъ чертить прямые углы посредствомъ этихъ приборовъ—будетъ показано въ послѣдствіи.

38. Если возьмемъ равные смежные углы, то сумма ихъ равна двумъ прямымъ, такъ какъ каждый изъ нихъ есть прямой. Легко доказать, что и вообще *сумма всякихъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ*. Возьмемъ смежные углы ABC и DBC (чер. 55);

Чер. 54.



Чер. 55.



положимъ, что прямая BO образуетъ съ AD прямые углы ABO и DBO; тогда уг. DBC будетъ больше прямаго угла DBO на уг. m: а уг. ABC будетъ меньше прямаго уг. ABO на тотъ же уг. m; или $DBC=d+m$; $ABC=d-m$. Сложивъ эти два равенства, найдемъ $DBC+ABC=2d$.

39. Изъ этой теоремы слѣдуетъ:

1) *Зная величину одного изъ смежныхъ угловъ, можно найти другой, вычтя первый изъ* $2d$; такъ если одинъ уг.$=1^1/_3 d$, то другой$=^2/_3 d$.

2) *Тупой уголъ больше, а острый меньше прямаго.*

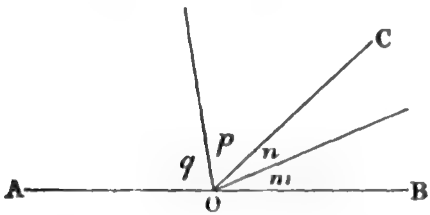
3) *Сумма смежныхъ угловъ одной пары=суммѣ смежныхъ угловъ другой пары*, ибо и та и другая сумма$=2d$.

4) *Если двѣ пары смежныхъ угловъ имѣютъ по одному равному углу, то и другіе углы ихъ равны между собою*; напр. если углы a и b составляютъ одну пару смежныхъ угловъ, а b и m другую пару, то уг. $a=$уг. m, потому что какъ тотъ, такъ и другой уголъ$=2d-b$; а двѣ величины, равныя одной и той же третьей, равны между собою.

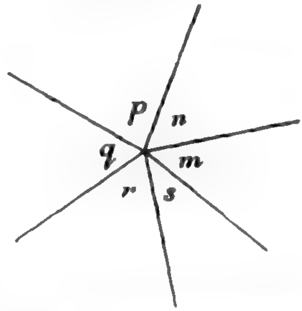
5) *Сумма угловъ m, n, p, q* (чер. 56), ***имѣющихъ общую вершину O и расположенныхъ по одну сторону прямой AB, равна двумъ прямымъ***, потому что вмѣстѣ они составляютъ одну пару смежныхъ угловъ, напр. AOC и COB.

6) *Сумма угловъ m, n, p, q, r, s* (чер. 57), ***расположенныхъ около одной точки, равняется 4 прямымъ***; дѣйствительно, про-

Чер. 56.



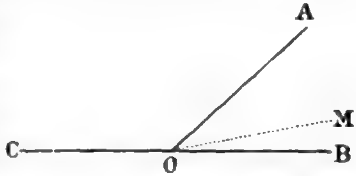
Чер. 57.



доливъ одну изъ сторонъ какого нибудь изъ этихъ угловъ за вершину, получимъ прямую линію; по одну сторону ея сумма угловъ $=2d$ и по другую также равна $2d$.

40. Мы доказали, что сумма смежныхъ угловъ равна 2 прямымъ; эту теорему, не употребляя названія „смежные углы“, надо бы выразить такъ: если два угла имѣютъ общую вершину и общую сторону, и если двѣ остальныя стороны ихъ составляютъ одну прямую линію, то сумма такихъ угловъ равна двумъ прямымъ. Докажемъ теорему, обратную предъидущей: *если два угла имѣютъ общую вершину и общую сторону и сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ, то остальныя двѣ стороны ихъ образуютъ прямую линію*, т. е. эти углы будутъ смежными. Положимъ (чер. 58), что $AOC+AOB=2d$; надо доказать, что OC и OB составляютъ одну прямую линію, или что линія COB прямая. Допустимъ, что COB не прямая линія; тогда прямую CO можно продолжить, и пусть продолженіе ея будетъ OM, такъ что COM будетъ прямая линія. Тогда углы AOC и AOM будутъ смежными и слѣд. $AOC+AOM=2d$; но намъ дано, что и $AOC+AOB=2d$; слѣд. $AOC+AOM=AOC+AOB$, потому что обѣ суммы равны $2d$ и стало быть равны между собою. Отнявъ отъ той и другой суммы поровну, именно по уг. AOC, мы должны получить равные остатки; т. е. должно быть $AOM=AOB$. Но этого быть не можетъ, ибо уг. AOM есть только часть уг. AOB; а часть всегда меньше цѣлаго.

Чер. 58.

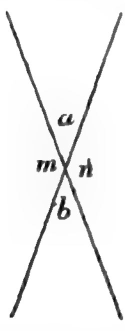


Итакъ предположеніе наше, что CO и OB не составляютъ одной прямой линіи, привело насъ къ нелѣпому выводу, что часть равна своему цѣлому; стало быть мы должны заключить, что наше предположеніе невѣрно, и слѣд. CO и OB составляютъ одну прямую линію.

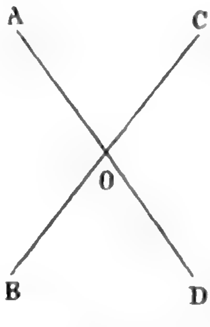
Доказательства, подобныя тому, которое мы сейчасъ изложили, часто употребляются въ геометріи (и вообще въ математикѣ) и наз. *доказательствами отъ противнаго* или *приведеніемъ къ нелѣпости* (reductio ad absurdum). Изъ предъидущаго видно, что этотъ пріемъ доказательства состоитъ въ томъ, что мы для обнаруженія справедливости какой нибудь теоремы допускаемъ заключеніе, совершенно обратное заключенію теоремы; напр. чтобъ доказать, что какія нибудь двѣ величины равны между собою, мы допускаемъ, что они не равны; если затѣмъ, разсуждая совершенно правильно, на основаніи аксіомъ и прежде—доказанныхъ теоремъ, мы придемъ къ какому нибудь несообразному выводу (напр. что часть равна цѣлому или больше цѣлаго, что между двумя точками можно провести нѣсколько прямыхъ линій и т. под.), то должны будемъ заключить, что допущенное нами предположеніе невѣрно, т. е. что величины, о которыхъ идетъ дѣло, не могутъ быть различны и что слѣд. онѣ равны между собою.

41. Вертикальные углы. *Углы* a и b (чер. 59), а также m и n, *у которыхъ стороны одного суть продолженія сторонъ другаго*, наз. *вертикальными*. *Вертикальные углы равны между собою.* Дѣйствительно, a и n, а также n и b, суть углы смежные; слѣд. $a+n=n+b$, или $a=b$. Такъ же докажемъ, что $m=n$.

Чер. 59.



Чер. 60.



Обратно —*если четыре угла, лежащіе вокругъ одной точки, черезъ одинъ равны, то они образовались отъ пересѣченія двухъ прямыхъ линій.* Намъ дано (чер. 60), что $AOC=BOD$ и $AOB=COD$; надо доказать, что AOD и COB суть прямыя линіи. Сумма угловъ, расположенныхъ около точки, равна 4 прямымъ; слѣд.

$$AOC+COD+DOB+BOA=4d.$$

Подставивъ сюда вмѣсто DOB равный ему по условію уг. AOC, а вмѣсто BOA равный ему по условію уг. COD, получимъ

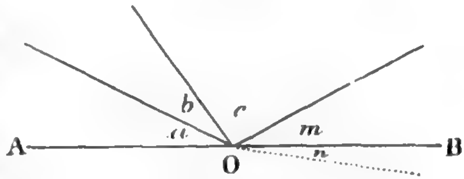
$$2AOC+2COD=4d, \text{ или } AOC+COD=2d.$$

Но углы AOC и COD имѣютъ общую вершину O и общую сторону OC, слѣд. (§ 40) остальныя двѣ стороны ихъ AO и OD составляютъ одну прямую линію. Такъ же можно доказать, что и BOC

есть прямая линія; только тогда надо замѣнить углы BOD и COD равными имъ уг. AOC и AOB. Вообще, эту замѣну надо дѣлать каждый разъ такъ, чтобы получить два угла, имѣющіе общую сторону.

42. Мы видѣли, что сумма угл. a, b, c, m (чер. 61), расположенныхъ по одну сторону прямой AB, равна $2d$; но отъ сложенія угловъ долженъ получиться также уголъ; въ этомъ случаѣ за такой уголъ надо принять прямую AOB, гдѣ точка O есть вершина угла, а OA и OB—стороны его.

Чер. 61.



Такіе углы, равные $2d$, наз. *развернутыми* или *выпрямленными* углами. Если бы къ суммѣ уг. $a+b+c+m$ прибавили еще уг. n, то получили бы уголъ, бо́льшій двухъ прямыхъ. Такой уголъ AON (чер. 62) наз. *выпуклымъ* или *входящимъ* угломъ.

Чер. 62.

Складывая углы, расположенные около точки, получимъ уг. въ 4 прямыхъ. Если къ суммѣ угловъ, расположенныхъ около точки, прибавить еще одинъ или нѣсколько угловъ, то можно получить уг., равный 5, 6... прямымъ угламъ.

43. Задачи. 1) Изъ вершины уг. AOB провести прямыя OC, OD и OF такъ, чтобы уг. $AOB=AOD+DOC+COB$ и чтобы BOF равнялся разности угловъ AOF и AOB, и найти: 1) сумму угл. AOC, COB, BOF? 2) разность между уг. AOF и суммою уг. BOF и AOD? 3) $AOD+DOB-COB+COF$? 4) $FOD-(BOD-BOA)$?

2) Внутри уг. AOB изъ вершины его проведены прямыя OC, OD, OE, OF, такъ что уг. AOB равенъ суммѣ уг. AOC, COD, DOE, EOF, FOB; уг. $COD=2AOC$; $DOE=AOD$; EOF вчетверо больше AOC; $FOB=5AOC$. Опредѣлить: $AOC.7$? $AOB:DOC$? отношеніе AOE къ COD? $\frac{AOF}{DOE}$? $\frac{EOF}{AOB}$? $\frac{COB}{EOF}$? $\frac{FOB}{AOC}$? $\frac{FOC}{DOE}$? $\frac{AOB}{COF}$?

3) При точкѣ O прямой OA построены послѣдовательно углы: AOB, $AOC=3AOB$, $AOD=AOC+AOB$, $AOE=AOD+BOD$ и $AOF=AOE+EOF$, причемъ $EOF<AOB$. Опредѣлить, съ возможной при такомъ построеніи точностью, отношенія: AOE къ AOB? AOF къ AOB? COF къ AOE? $AOF:DOE$? $DOF:BOE$? $BOF:BOC$?

4) Опредѣлить углы, образуемые часовой и минутной стрѣлками, когда часы показываютъ 3 ч.? 2 ч.? 5 ч.? 1 ч.? 6 ч.? 8 ч.? 11 ч.? 10 ч.? 12 ч.? 9 ч.?

5) Изъ вершины O прямаго уг. AOB проведена внутри его прямая OC, составляющая съ прямой OB уг. $BOC={}^2/_3d$, и прямыя OD и OE; OD составляетъ съ OC прямой уг. COD; а OE составляетъ съ OD уг. $DOE={}^1/_4d$. Опредѣлить величины угл. AOC,

AOD, AOE, BOD, BOE, если прямая OE идетъ внѣ уг. AOD? если OE идетъ внутри AOD?

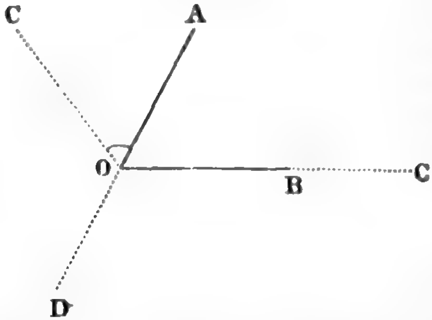
6) Опредѣлить одинъ изъ смежныхъ уг., если другой$=\frac{2}{3}d$? $1\frac{5}{9}d$? $0{,}5d$? $0{,}75d$? $1{,}36d$?

7) Опредѣлить смежные углы, если одинъ изъ нихъ больше другаго въ 3 раза? вдвое? въ 5 разъ? въ 7 разъ? если отношеніе ихъ$=$ 4? 8? $2\frac{1}{2}$? $\frac{5}{3}$? 1,5? 2,6? 1,666...? $\frac{1}{3}$? $\frac{4}{3}$? 0,8?

8) Опредѣлить смежные углы, если одинъ изъ нихъ больше другаго на $\frac{1}{4}d$? на $\frac{3}{5}d$? если разность ихъ $=\frac{8}{9}d$? $1{,}2d$? $0{,}36d$? $1{,}363636....d$?

9) Углы AOB и COD (чер. 63), сумма которыхъ$=2d$, расположены такъ, что имѣютъ общую вершину O, а двѣ стороны ихъ AO и OD составляютъ одну прямую AD. Доказать, что остальныя двѣ стороны OB и OC или совпадутъ или составятъ съ прямой AD равные острые и равные тупые углы?

Чер. 63.



10) Углы AOB и BOC, сумма которыхъ меньше $2d$, имѣютъ общую вершину O и общую сторону OB. Доказать, что остальныя стороны ихъ OA и OC составятъ ломаную линію?

11) Доказать изложенное въ зад. 10-й свойство для угловъ, сумма которыхъ больше $2d$?

12) Доказать теорему, обратную изложенной въ зад. 10 и 11?

13) По одну сторону прямой AB построены углы $AOC=\frac{2}{3}d$, $COD=\frac{1}{12}d$, $DOE=\frac{3}{4}d$ и еще 4 равныхъ между собою угла; опредѣлить величину каждаго изъ этихъ послѣднихъ угловъ?

14) Около точки O построено 12, 20, 60 равныхъ угловъ. Опредѣлить каждый изъ нихъ?

15) По одну сторону прямой построено 6 равныхъ угловъ, имѣющихъ общую вершину; опредѣлить эти углы?

16) Около точки O построено 5 угловъ, каждый въ $\frac{4}{15}d$, и затѣмъ еще 16 равныхъ угловъ; опредѣлить каждый изъ этихъ послѣднихъ?

17) Сколько можно помѣстить угловъ около точки, если каждый уг.$=\frac{1}{8}d$? $\frac{4}{9}d$? $\frac{2}{3}d$? $1\frac{1}{3}d$? $\frac{4}{17}d$? $0{,}285714285714..d$?

18) Подъ какимъ угломъ пересѣкаются прямыя, дѣлящія пополамъ каждый изъ смежныхъ угловъ?

19) Изъ вершины смежныхъ уг. AOC и COB проведены прямыя OD и OE, составляющія съ общей стороной OC уг. $EOC=\frac{1}{4}AOC$ и $DOC=\frac{1}{4}\,COB$. Опредѣлить уголъ между прямыми OD и OE?

20) Рѣшить зад. 19, когда уг. $EOC = {}^1/_5\, AOC$ и $DOC = {}^1/_5\, COB$? Когда отношеніе уг. AOC къ EOC и уг. COB къ DOC равно n?

21) Прямыя AB и CD пересѣкаются въ точкѣ O; опредѣлить образующіеся при этомъ углы, если уг. $AOC = {}^3/_7 d$? ${}^5/_{12} d$? $1^2/_3 d$? $1,6d$?

22) Въ точкѣ B сходятся четыре прямыя линіи: AB, CB, DB, EB; AB съ DB, а также CB съ EB образуютъ углы прямые; уг. $ABC = {}^2/_3 d$; найти уг. DBE?

23) Углы ABC и ABD смежные; $ABC = {}^3/_8 d$; черезъ B проведена прямая BE, дѣлящая уг. ABD пополамъ; чему равенъ уг. DBE?

24) Прямыя линіи AB, CB, DB, EB сходятся въ точкѣ B; линія ABE прямая; уг. $ABC = {}^1/_3 d$, уг. $EBD = {}^4/_9 d$; найти уг. CBD?

25) Изъ точки C прямой AB проведены по одну сторону AB три прямыхъ: CD, CE и CM; уг. $ACD = ECB$; прямая CM дѣлитъ уг. ECD пополамъ. Опредѣлить уг. ACM?

26) Уг. AOB раздѣленъ пополамъ прямою OC и черезъ вершину его проведена прямая DE, образующая съ OC углы прямые. Доказать, что острые углы AOD и BOE равны между собою?

27) AOC и COB углы смежные; AOC раздѣленъ пополамъ прямой OD и изъ вершины O проведена прямая OF, образующая съ OD прямой уг. DOF. Доказать, что прямая OF или ея продолженіе дѣлитъ уг. COB пополамъ?

28) Уг. AOB раздѣленъ пополамъ прямою OF; доказать, что продолженіе этой прямой раздѣлитъ пополамъ уг., вертикальный данному углу?

29) Два вертикальныхъ угла AOC и BOD раздѣлены пополамъ прямыми OM и ON; доказать, что MON есть линія прямая?

30) На прямой AB взята точка O и построены по одну сторону AB углы a, b, c, которыхъ вершина въ O; уг. b вдвое, а c втрое больше a; опредѣлить углы?

31) Вершина O пяти угловъ, расположенныхъ по одну сторону прямой AB, лежитъ на этой прямой; первый изъ этихъ угловъ втрое больше втораго; второй втрое больше третьяго и т. д.; опредѣлить величины ихъ?

32) Четыре угла имѣютъ общую вершину; они относятся между собой какъ $2:5:6:7$; опредѣлить величины ихъ?

33) Изъ вершины тупаго угла ABC проведена прямая линія, составляющая съ одной изъ сторонъ угла уголъ прямой, а съ другой стороной уголъ $= {}^3/_7\, ABC$. Опредѣлить уг. ABC?

34) Черезъ вершину смежныхъ угловъ проведены двѣ прямыя линіи такъ, что одна дѣлитъ пополамъ меньшій изъ смежныхъ угловъ, а другая образуетъ прямой уг. съ общей стороной смежныхъ угловъ; уг. же между этими линіями $= 1^1/_4 d$. Опредѣлить смежные углы?

35) Около точки лежатъ углы a, b, c, m; уг. $a = {}^3/_4$ прям.; прямая, дѣлящая пополамъ уг. c, образуетъ прямые углы съ линіями, дѣлящими пополамъ углы b и m. Опредѣлить уг. b, c, m?

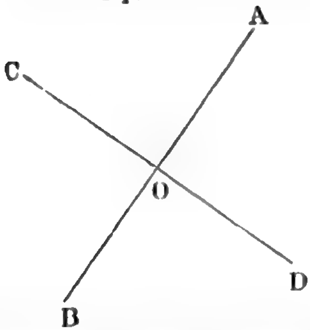
36) Изъ вершины B угла ABC проведены прямыя BE и BD; углы ABE и CBD прямые; доказать, что уг. DBE или равенъ уг. ABC или служитъ ему дополненіемъ до двухъ прямыхъ (т. е. $DBE + ABC = 2d$)?

ГЛАВА III.

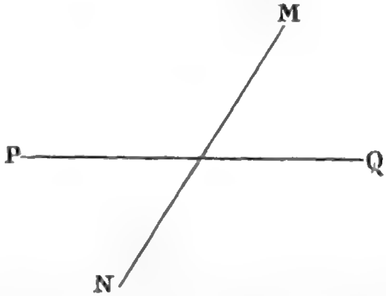
Перпендикуляры и наклонныя линіи.

44. ***Двѣ прямыя линіи, образующія при своемъ пересѣченіи прямые углы,*** наз. ***взаимно перпендикулярными;*** такъ если уг. AOD (чер. 64) будетъ прямой, то прямая линія CD будетъ перпендикулярна къ AB и обратно AB перпендикулярна къ CD. Перпендикулярность изображаютъ знакомъ $\perp$; такъ $AB \perp CD$ и $CD \perp AB$. Если же прямыя линіи пересѣкаются подъ острыми или тупыми углами, какъ напр. линіи MN и PQ (чер. 65), то онѣ наз.

Чер. 64.

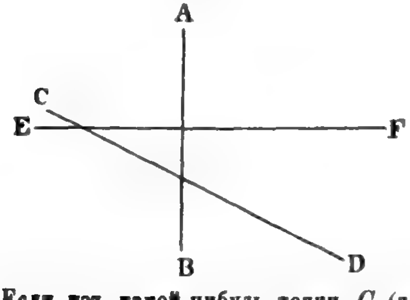


Чер. 65.

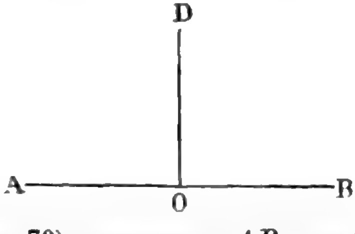


наклонными одна къ другой. Очевидно, что одна и таже прямая AB (чер. 66) можетъ быть перпендикулярна къ одной прямой EF и наклонна къ другой прямой CD. Если изъ какой нибудь точки O (чер. 67) прямой AB проведенъ къ AB перпендикуляръ OD, то говорятъ, что изъ точки O *возставленъ* перпендикуляръ; если же изъ точки C, находящейся внѣ линіи AD (чер. 68 и 69), провести CB_AD, то говорятъ, что изъ C *опущенъ* перпендикуляръ на AD.

Чер. 66.

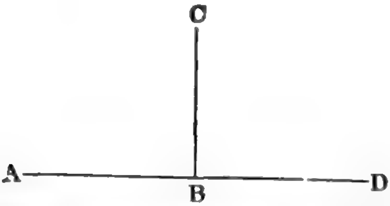


Чер. 67.

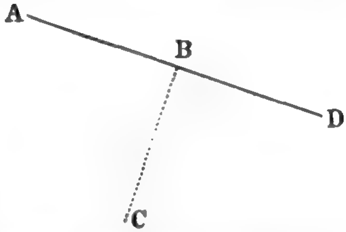


Если изъ какой нибудь точки C (чер. 70) проведенъ къ AB перпендикуляръ CD и наклонная или косвенная CE, то точка D наз. *основаніемъ* перпендикуляра, точка E — *основаніемъ* наклонной; разстояніе DE между основаніями перпендикуляра и наклонной наз. разстояніемъ наклонной отъ основанія перпендикуляра. Когда говорятъ о длинѣ перпендикуляра или наклоной, то подъ этимъ разу-

Чер. 68.



Чер. 69.

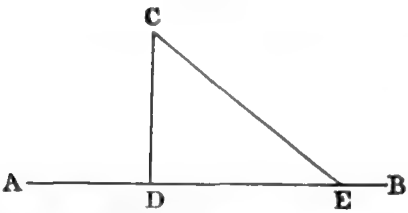


мѣютъ часть перпендикуляра CD (чер. 70) или наклонной CE, заключающуюся между внѣшней точкой C, изъ которой проведены эти линіи, и ихъ основаніями.

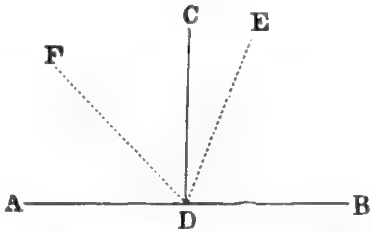
Разсмотримъ свойства перпендикулярныхъ и наклонныхъ.

45. ***Изъ точки, взятой на прямой линіи, можно возставить къ этой прямой только одинъ перпендикуляръ.*** Положимъ (чер. 71),

Чер. 70.



Чер. 71.



что $DC \perp AB$. Всякая другая прямая, проведенная изъ точки D, напр. DE, DF, пойдетъ или внутри уг. CDB или внѣ его и слѣд. составитъ съ прямой AB уг. EDB, меньшій прямаго, или же тупой уг. FDB.

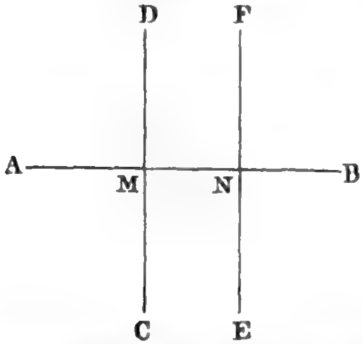
46. ***Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же третьей, не пересѣкутся между собой, какъ бы далеко мы ихъ ни продолжали.*** Положимъ (чер. 72), что DC и FE перпендикулярны къ AB, и докажемъ, что DC не можетъ пересѣчься съ FE, сколько бы ни продолжать эти линіи вверхъ или внизъ отъ линіи AB. Для этого перегнемъ чертежъ по прямой AB вверхъ; тогда AB и точки M и N останутся на своихъ мѣстахъ; прямая CM пойдетъ по MD, потому что уг. CMN=уг. DMN, какъ углы прямые; точно также прямая EN пойдетъ по NF. Поэтому, если бы верхнія части перпендикуляровъ MD и NF пересѣклись, то и нижнія части MC и NE, которыя при перегибаніи чертежа совпадаютъ съ верхними частями, также должны бы пересѣчься, и слѣд. перпендикуляры EF и CD пересѣкались бы въ двухъ точкахъ, чего не можетъ быть, такъ какъ перпендикуляры суть прямыя линіи. Итакъ CD и EF пересѣкаться не могутъ.

47. *Изъ данной точки можно опустить на данную прямую только одинъ перпендикуляръ.* Дѣйствительно, если бы мы предположили, что можно опустить два перпендикуляра, то вышло бы, что два перпендикуляра къ одной и той же прямой пересѣкаются.

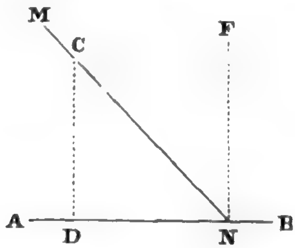
Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что *положеніе прямой линіи будетъ совершенно опредѣлено, если извѣстно, что она проходитъ черезъ данную точку и перпендикулярна къ даной прямой линіи*, ибо черезъ данную точку можно къ данной прямой провести только одинъ перпендикуляръ.

48. Если прямая MN (чер. 73) будетъ наклонна къ прямой AB,

Чер. 72.



Чер. 73.



то она образуетъ съ AB два неравныхъ смежныхъ угла MNB и MNA; *изъ двухъ угловъ, образуемыхъ наклонной съ данной прямой, тотъ будетъ острый, который обращенъ отверстіемъ къ перпендикуляру, опущенному изъ какой нибудь точки наклонной на данную прямую;* такъ на чер. 73-мъ острымъ будетъ уг. MNA, обращенный отверстіемъ къ перпендикуляру CD, опущенному на прямую AB изъ какой нибудь точки наклонной C. Чтобы доказать это, вообразимъ, что изъ основанія N наклонной воставленъ къ AB перпендикуляръ NF; онъ, какъ мы знаемъ, никогда не встрѣтится съ CD. Наклонная MN имѣетъ одну точку N на перпендикулярѣ NF, а другую точку C на перпендикулярѣ CD, и такъ какъ N лежитъ въ вершинѣ уг. ANF. а C лежитъ внутри того же уг. ANF, то слѣд. и вся наклонная NM лежитъ внутри уг. ANF, и потому уг. ANM меньше уг. ANF или уг. $ANM<d$.

49. *Если изъ данной точки опустимъ на данную прямую перпендикуляръ и нѣсколько наклонныхъ, то*

1) перпендикуляръ короче всякой наклонной;

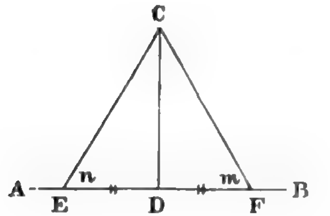
2) наклонныя, равноотстоящія отъ основанія перпендикуляра, равны между собою и образуютъ съ данной прямой равные углы;

3) изъ двухъ наклонныхъ та больше, которая дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра, и та составляетъ съ данной прямой бо́льшій уголъ, которая ближе къ перпендикуляру.

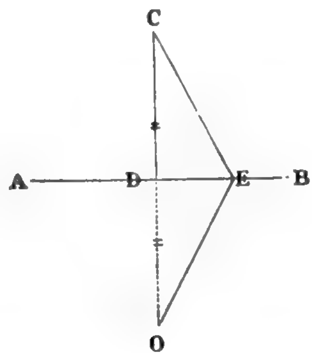
Удобнѣе будетъ доказать прежде второе заключеніе. Положимъ (чер. 74), что $CD \perp AB$ и $DF = DE$; докажемъ, что $CF = CE$ и уг. $m = n$. Для этого перегнемъ чертежъ по линіи CD; тогда, по равенству прямыхъ угловъ при точкѣ D, линія DF пойдетъ по DE, а по равенству этихъ линій точка F упадетъ въ E; такъ какъ наклонныя CF и CE имѣютъ одну общую точку C, а другія двѣ конечныя точки ихъ F и E совмѣстились, то слѣд. и наклонныя совмѣстятся и будутъ равны между собою; также совмѣстятся и углы m и n.

Для доказательства перваго заключенія, т. е. что перпендикуляръ CD (чер. 75) короче наклонной CE, продолжимъ перпендикуляръ

Чер. 74.



Чер. 75.

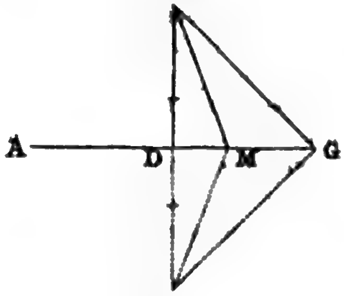


за его основаніе D и отложимъ на продолженіи часть $DO = CD$; тогда прямая CO представитъ двойную длину перпендикуляра CD. Соединивъ точку O съ E, получимъ прямую $OE = EC$, такъ какъ эти линіи будутъ наклонныя, равно отстоящія отъ основанія D перпендикуляра ED, и стало быть ломаная линія CEO будетъ выражать двойную длину наклонной CE. Но прямая CO короче ломаной CEO; слѣд. и $\frac{1}{2}CO < \frac{1}{2}CEO$ или $CD < CE$.

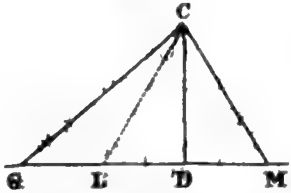
Докажемъ теперь, что если имѣемъ двѣ наклонныхъ, не равно отстоящихъ отъ перпендикуляра, то та изъ нихъ будетъ больше, которая дальше отъ перпендикуляра, т. е. что (чер. 76) $CG > CM$. Для этого продолжимъ перпендикуляръ CD, отложимъ $DO = CD$ и проведемъ OM и OG; тогда, по предъидущему, будемъ имѣть $CMO = 2CM$, $CGO = 2CG$. Но $CMO < CGO$, потому что ломаная внутренняя меньше ломаной внѣшней, слѣд. и $CM < CG$.

Мы сравнивали наклонныя, расположенныя по одну сторону перпендикуляра; возьмемъ теперь наклонныя CG и CM (чер. 77), находящіяся по обѣ стороны перпендикуляра CD, и положимъ, что OG отстоитъ отъ перпендикуляра дальше, чѣмъ CM, т. е. что

Чер. 76.



Чер. 77.

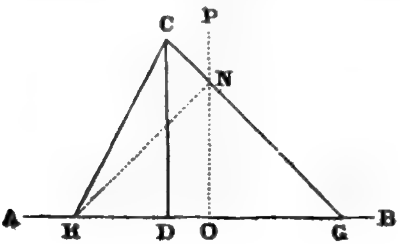


$DG>DM$. Чтобъ доказать, что $CG>CM$, отложимъ на DG часть $DL=DM$ и проведемъ CL; тогда, по предъидущему, $CL<CG$; но $CL=CM$, слѣд. и $CM<CG$.

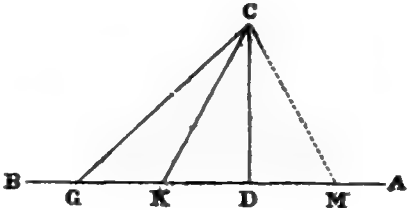
Докажемъ наконецъ, что если (чер. 78) $DK<DG$, то уг. $CKD>$ уг. CGD. Вообразимъ, что изъ средины прямой линіи KG возставленъ къ ней перпендикуляръ; эта средина O будетъ непремѣнно находиться между точками D и G, т. е. вправо отъ перпендикуляра CD, потому что мы положили $DK < DG$ и слѣд. $DK < {}^1/_2 KG$; поэтому и перпендикуляръ OP будетъ находиться вправо отъ перпендикуляра DC и, какъ мы знаемъ, не пересѣчется съ нимъ. Прямая CG, имѣя одну точку C по лѣвую сторону перпендикуляра OP, а другую точку G вправо отъ него, непремѣнно пересѣчется съ OP въ точкѣ N, находящейся между точками C и G, т. е. внутри уг. CKD; поэтому, если мы соединимъ точку N съ K, то получимъ прямую NK, идущую внутри уг. CKD, и слѣд. уг. $NKD <$ уг. CKD. Но такъ какъ NK и NG суть косвенныя, равноудаленныя отъ перпендикуляра ON, то уг. NKD равенъ уг. NGD или, что тоже, углу CGD; а потому $CKD>CGD$.

Если наклонныя CG и CK (чер. 79) будутъ расположены по одну сторону перпендикуляра CD, то, отложивъ по другую сторону перпендикуляра на линіи DA часть $DM=DK$ и проведя прямую

Чер. 78.



Чер. 78



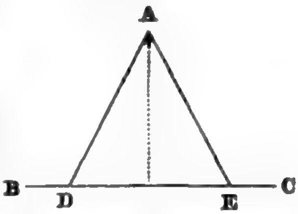
CM, получимъ уг. $CMD = CKD$, и по предъидущему $CMD > CGD$; слѣд. и $CKD > CGD$.

50. Изъ доказанныхъ нами теоремъ слѣдуетъ:

1. *Перпендикуляръ есть кратчайшее разстояніе отъ точки до прямой линіи*, такъ какъ онъ короче всѣхъ прочихъ прямыхъ, которыя можно провести изъ той же точки къ данной линіи, ибо всѣ эти прямыя будутъ наклонными. Поэтому *разстояніе между точкою и прямой линіей измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ этой точки на прямую*, и если напр. точка A отстоитъ отъ прямой BC на 5 дюйм., то это значитъ, что длина перпендикуляра, опущеннаго изъ A на BC, равна 5 дюйм.

2. *Изъ данной точки къ данной прямой линіи нельзя провести больше двухъ, равныхъ между собою, прямыхъ линій.* Дѣйствительно если изъ точки A (чер. 80) проведены къ линіи BC двѣ равныя прямыя AD и AE, то какая нибудь третья прямая будетъ или перпендикулярна къ BC—въ такомъ случаѣ она короче AD и AE; или же, если она будетъ наклонною, то она непремѣнно будетъ находиться съ одной изъ прежде проведенныхъ наклонныхъ AD или AE по одну сторону перпендикуляра, опущеннаго изъ A на BC; поэтому она не можетъ равняться каждой изъ наклонныхъ AD и AE.

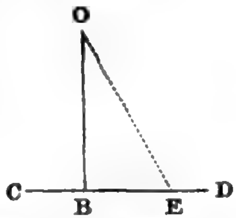
Чер. 80.



Докажемъ теперь теоремы, обратныя тѣмъ, которыя изложены въ §§ 45—50.

51. *Если прямая OB (чер. 81) есть самая короткая изъ всѣхъ прямыхъ, какія можно провести изъ точки O къ прямой CD, то $OB \perp CD$.* Дѣйствительно, если бы мы допустили, что OB не перпендикулярна, а наклонна къ CD, то изъ O можно бы опустить на CD перпендикуляръ OE, и тогда OE должна быть меньше OB; между тѣмъ мы положили, что OB есть кратчайшее разстояніе отъ точки O до прямой CD.

Чер. 81.



52. *Если изъ точки C (чер. 82) опущенъ на прямую AB перпендикуляръ CD и проведены нѣсколько наклонныхъ, то 1) равныя наклонныя равно отстоятъ отъ перпендикуляра; 2) бо́льшая изъ двухъ наклонныхъ дальше отъ перпендикуляра.*

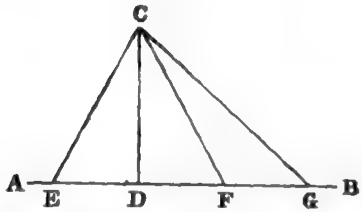
Доказательство. Дано $CD \perp AB$; $CE = CF$; $CG > CE$; требуется доказать, что $DE = DF$; $DG > DE$. Прямая DE не можетъ быть больше DF, потому что тогда наклонная CE была бы больше CF;

DF не можетъ быть также и меньше DF; слѣд. $DE=DF$.

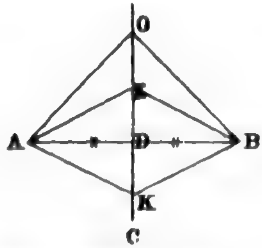
Точно также докажемъ, что $DC>DE$.

53. *Каждая точка перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой линіи, находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ концовъ этой прямой; а всякая точка, находящаяся внѣ этого перпендикуляра, не равно отстоитъ отъ концовъ прямой.* Положимъ, что D (чер. 83) есть средина прямой AB и что $CO \perp AB$;

Чер. 82.

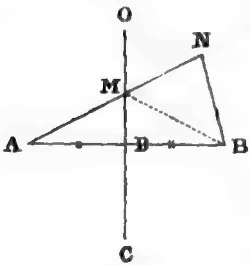


Чер. 83.



тогда, взявъ на перпендикулярѣ какія нибудь точки O, E, K...., найдемъ, что $OA=OB$, $EA=EB$.... какъ косвенныя, равноотстоящія отъ перпендикуляра.

Чер. 84.



Если же возьмемъ точку N (чер. 84) внѣ перпендикуляра, то ея разстоянія отъ концовъ прямой A и B, т. е. линіи NA и NB, не будутъ равны между собою. Дѣйствительно, NA состоитъ изъ двухъ частей NM и MA, изъ которыхъ послѣдняя равна MB, ибо точка M лежитъ на перпендикулярѣ; слѣд. $NA=$ $=NM+MB$; а эти двѣ линіи составляютъ ломаную NMB, которая больше прямой NB; стало быть точка N ближе къ B, чѣмъ къ A.

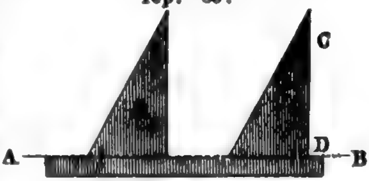
54. Обратно — *всякая точка, равноудаленная отъ конечныхъ точекъ данной прямой, лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины этой прямой; а всякая точка, не равно удаленная отъ концовъ прямой, лежитъ внѣ этого перпендикуляра.* Дѣйствительно, если бы допустить обратное, то пришли бы къ невѣрному заключенію, что точка, взятая внѣ перпендикуляра, возставленнаго изъ средины данной прямой, находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ концовъ этой прямой; а точка, находящаяся на перпендикулярѣ, не равно отстоитъ отъ конечныхъ точекъ прямой.

55. Изъ двухъ предъидущихъ теоремъ слѣдуетъ, что всѣ точки перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой линіи, *и притомъ только одни эти точки*, равно отстоятъ отъ концовъ этой линіи.

Если всѣ точки какой нибудь линіи или нѣсколькихъ линій удовлетворяютъ извѣстному условію, и притомъ никакія другія точки этому условію не удовлетворяють, то такую линію или такую систему линій называють *геометрическимъ мѣстомъ* этихъ точекъ. Поэтому мы можемъ сказать, что *перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой линіи, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ концовъ этой прямой.*

56. Черченіе перпендикуляровъ. Перпендикуляры можно чертить помощью наугольника и линейки. Если надо возставить перпендикуляръ изъ точки D къ прямой AB (чер. 85), то кладутъ линейку такъ, чтобы ея ребро сливалось съ AB; затѣмъ прикладываютъ наугольникъ m такъ, чтобы ребро прямаго угла прилегало къ ребру линейки, и двигаютъ его вправо, пока вершина прямаго угла не совпадетъ съ данной точкой D; потомъ по другому ребру прямаго угла проводятъ прямую DC, которая и будетъ перпендикулярна къ AB въ точкѣ D.

Чер. 85.



Если надо изъ точки C (чер. 85) опустить перпендикуляръ на AB, то, расположивъ линейку и наугольникъ, какъ сказано выше, двигаютъ наугольникъ по линейкѣ вправо до тѣхъ поръ, пока другое ребро прямаго угла не пройдетъ черезъ данную точку C; затѣмъ проводятъ по ребру прямую линію.

57. **Задачи.** 1) Изъ точки C опущенъ на прямую AB перпендикуляръ CD и проведены наклонныя CE и CF, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра. Доказать, что онѣ составляютъ съ перпендикуляромъ равные углы?

2) Доказать теорему, обратную той, которая изложена въ зад. 1-й?

3) Изъ вершины уг. AOB возставлены къ сторонамъ его перпендикуляры OD и OF; доказать, что уголъ, образуемый этими перпендикулярами, или равенъ данному или дополняетъ его до $2d$?

4) Уг. AOB раздѣленъ пополамъ прямою OC; доказать, что каждая точка этой прямой равно отстоитъ отъ сторонъ уг. AOB?

5) Изъ точки C на прямую AB опущенъ перпендикуляръ CD и проведены наклонныя CE и CF, составляющія съ AB равные острые углы CED и CFD; доказать, что эти наклонныя равны?

6) Изъ точки C на прямую AB опущенъ перпендикуляръ CD и проведены наклонныя CG и CH, изъ которыхъ CG составляетъ съ AB большій острый уг. Доказать, что $CG < CH$?

7) Углы AOC и COB, имѣющіе общую вершину и общую сторону, раздѣлены пополамъ прямыми OE и OF, перпендикулярными между собою. Доказать, что эти углы смежные?

8) Прямыя AB и CD (чер. 86) пересѣчены третьей прямой EF, и уг. f=уг. g. Доказать, что $c=h$, $a=l$, $b=k$, $b=h$, $f=l$, $a=g$, $c=k$, $f+h=2d$, $c+g=2d$, $a+k=2d$, $b+l=2d$?

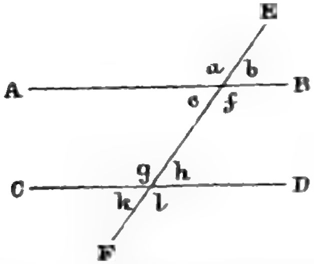
9) Принять въ зад. 8, что $a=g$, и доказать прочія равенства?

10) Принять въ зад. 8, что $b=k$, и доказать прочія равенства?

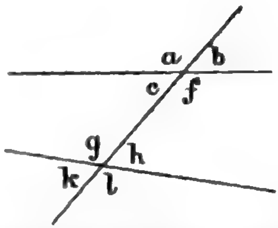
11) Принять въ зад. 8, что $b+l=2d$, и доказать прочія равенства?

12) Дано (чер. 87), что уг. $f>$уг. g; доказать, что $c<h$, $a>l$,

Чер. 86.



Чер. 87.



$b<k$, $b<h$, $f>l$, $a=g$, $c<k$, $f+h>2d$, $c+g<2d$, $a+k>2d$, $b+l<2d$.

13) Принять въ зад. 12, что $b<k$, и доказать прочія неравенства?

14) Принять въ зад. 12, что $a>g$, и доказать остальныя неравенства?

15) Принять въ зад. 12, что $a+h>2d$, и доказать прочія неравенства?

16) Изъ точки C на прямую AB опущенъ перпендикуляръ CD и проведены наклонныя CE и CF по одну сторону перпендикуляра; $FD>ED$. Доказать, что уг. $CFE+$уг. $CEF<2d$?

17) Проведена прямая AB и даны двѣ точки H и K, равноотстоящія отъ концовъ этой прямой. Какіе углы составитъ съ AB прямая, проходящая черезъ точки H и K?

18) Проведена прямая AB и даны точки H и K; H равноотстоитъ отъ концовъ прямой AB; а K ближе къ точкѣ A, чѣмъ къ B. Доказать, что прямая, проходящая черезъ H и K, составитъ съ AB острые и тупые углы?

19) Дана прямая линія AB и внѣ ея двѣ точки C и M, лежащія по одну сторону AB; изъ C опущенъ на AB перпендикуляръ, и на немъ по обѣ стороны AB отложены части $CD=DE$; точка E соединена съ M; точка O пересѣченія прямой EM съ AB соединена съ C. Доказать, что ломаная COM будетъ короче всякой другой ломаной, которую получимъ, соединивъ какую нибудь точку прямой AB съ точками C и M?

20) При построеніи, указанномъ въ предъидущей задачѣ, доказать, что CO и MO образуютъ съ AB равные углы?

ГЛАВА IV.

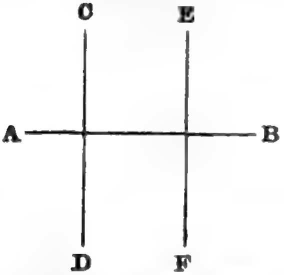
Параллельныя линіи.

58. Мы доказали (§ 46), что если къ прямой AB (чер. 88) проведены два перпендикуляра CD и EF, то эти перпендикуляры не пересѣкутся между собою, какъ бы далеко мы ихъ ни продолжа-

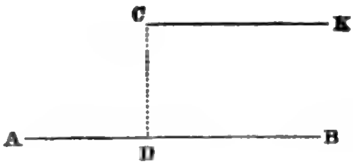
ля. *Прямыя линіи, которыя лежатъ въ одной плоскости и не пересѣкаются на всемъ своемъ протяженіи,* наз. *параллельными;* поэтому *двѣ линіи, перпендикулярныя къ одной и той же третьей, параллельны между собою.* Параллельность изображается знакомъ || ; такъ $CD \parallel EF$ (чер. 88).

59. Пользуясь предъидущей теоремой, можно черезъ данную точку C (чер. 89) провести линію, параллельную данной прямой линіи AB.

Чер. 88.



Чер. 89.

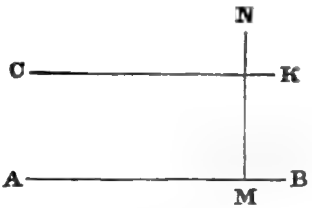


Для этого опускаемъ изъ C на AB перпендикуляръ CD и къ нему возставляемъ изъ C перпендикуляръ CK; тогда $CK \parallel AB$.

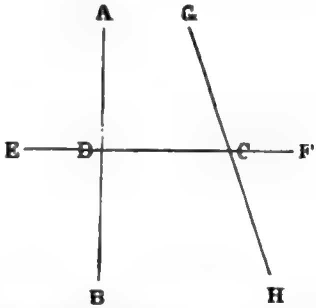
Можно также изъ какой нибудь точки M (чер. 90) прямой AB возставить къ AB перпендикуляръ MN; потомъ изъ C опустить на MN перпендикуляръ CK. Оба эти построенія могутъ быть выполнены помощью линейки и наугольника.

60. Если мы къ прямой EF (чер. 91) проведемъ перпендику-

Чер. 90.



Чер. 91.



ляръ AB и наклонную GH, то эти линіи пересѣкутся, если ихъ достаточно продолжить въ ту или другую сторону (на нашемъ чертежѣ вверхъ отъ прямой EF *).

---

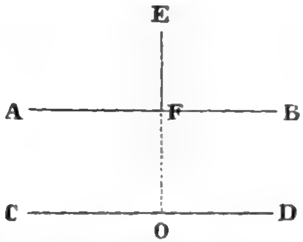
*) Вообще пересѣченіе послѣдуетъ по ту сторону данной прямой, гдѣ острый уголъ, образуемый наклонной съ данной прямой, обращенъ отверстіемъ къ перпендикуляру (на нашемъ чер это уголъ GCE).

Вполнѣ строго доказать изложенную истину невозможно; поэтому ее принимаютъ безъ доказательства, хотя она и не такъ очевидна, какъ тѣ истины, которыя мы прежде приняли за аксіомы. Итакъ къ числу аксіомъ нужно отнести слѣдующую: *перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой по достаточномъ продолженіи пересѣкаются.*

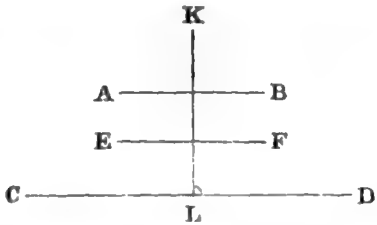
Приведемъ одно, весьма простое, хотя не вполнѣ точное, доказательство вышеизложеннаго предложенія. Острый уг. GCE (чер. 91) меньше прямаго уг. ADE; поэтому и вся часть плоскости, заключающаяся между продолженными до безконечности сторонами уг. GCE, меньше части плоскости, заключающейся между продолженными до безконечности сторонами уг. ADE, и если бы мы предположили, что прямая CG не встрѣтитъ DA вверхъ отъ линіи EF, то меньшая часть плоскости GCE равнялась бы большей части ADE плюсъ еще часть плоскости, заключенная между прямыми DA и CG, что, очевидно, не возможно.

61. *Прямая, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, пересѣкаетъ другую и притомъ перпендикулярна къ ней.* Пусть (чер. 92) $AB \parallel CD$ и $EF \perp AB$; докажемъ, что $EF \perp CD$. Для этого изъ точки F, въ которой AB пересѣкается съ своимъ перпендикуляромъ EF, опустимъ перпендикуляръ FO на прямую CD; FO будетъ $\perp$ и къ AB; дѣйствительно, еслибъ мы предположили, что AB не перпендикулярна къ FO, то CD и AB должны бы встрѣтиться (§ 60) и не могли бы быть параллельны между собою. Но у насъ черезъ точку F уже проведенъ къ AB перпендикуляръ FE; стало быть перпендикуляръ FO есть продолженіе EF; но $FO \perp CD$; слѣд. перпендикуляръ EF пересѣкаетъ CD, и притомъ подъ прямымъ уг-

Чер. 92.



Чер. 93.



ломъ. Доказанная теорема можетъ служить для того, чтобы узнать, параллельны ли между собою данныя прямыя линіи или нѣтъ; для этого надо возставить перпендикуляръ къ одной изъ данныхъ прямыхъ и изслѣдовать, какой уголъ составляетъ онъ съ другой прямой; если этотъ уг. будетъ прямой, то линіи параллельны.

62. Изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ:

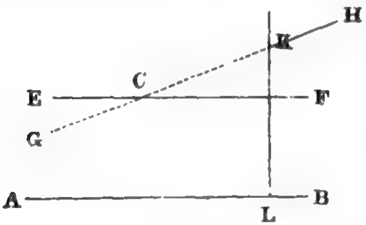
1) *Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны и между собою.* Пусть (чер. 93) $AB \parallel CD$ и $EF \parallel CD$; докажемъ, что $AB \parallel EF$. Опустимъ на CD перпендикуляръ KL; тогда, по предъ-

идущей теоремѣ, заключимъ, что AB и EF будутъ перпендикулярны къ KL и слѣд. параллельны между собою.

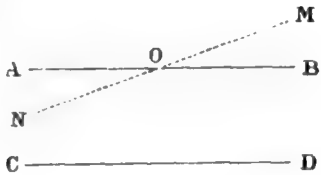
2) *Черезъ данную точку можно провести къ данной прямой только одну параллельную.* Пусть AB (чер. 94) будетъ данная прямая, C—данная точка; мы уже знаемъ (§ 59), какъ провести линію, параллельную прямой AB, и пусть эта параллельная будетъ ECF. Предположимъ, что можно бы провести черезъ C еще прямую $GCH \parallel AB$; тогда, проведя $KL \perp AB$, мы на основаніи теоремы § 61 должны заключить, что $CH \perp KL$ и $CF \perp KL$; но изъ точки C нельзя провести двухъ перпендикуляровъ къ прямой KL; слѣд. черезъ C нельзя провести и двухъ линій, параллельныхъ прямой AB, а можно провести лишь одну параллельную.

3) *Каждая прямая, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ линій, должна пересѣкать и другую.* Дѣйствительно, еслибъ прямая MN (чер. 95), пересѣкающая AB въ точкѣ O, не пересѣкала

Чер. 94.



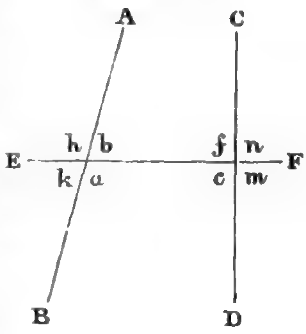
Чер. 95.



прямой CD, параллельной AB, то MN была бы параллельна CD, и слѣд. черезъ точку O проходили бы двѣ прямыя AB и MN, параллельныя CD.

63. Если мы двѣ какія либо прямыя AB и CD (чер. 96) пересѣчемъ третьей прямой EF, то получимъ 8 угловъ a, b, c, f, h, k, m, n. Углы эти имѣютъ слѣдующія названія: a и f, а также b и c, наз. *внутренними на крестъ лежащими* или *внутренними перекрестными*; уг. k и n, а также h и m, наз. *внѣшними перекрестными*; углы b и f, а также a и c, наз. *внутренними односторонними;* углы n и h, а также k и m, наз. *внѣшними односторонними;* углы h и f, а также b и n, k и c, a и m, наз. *углами соотвѣтственными* или *углами наклоненія*.

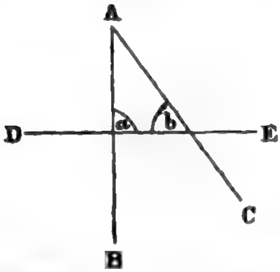
Чер. 96.



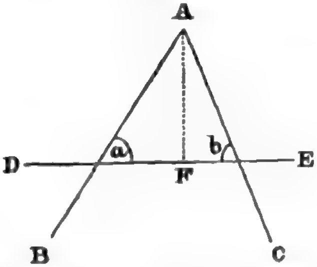
64. *Если двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи пересѣчемъ третьей линіей, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ, на сто-*

ронахъ которыхъ лежитъ точка пересѣченія, меньше двухъ прямыхъ. При этомъ могутъ быть три случая: 1) даны прямыя AB и AC (чер. 97), и одна изъ нихъ, именно AB, перпендикулярна къ сѣкущей DE; 2) обѣ прямыя AB и AC (чер. 98) наклонны къ DE, притомъ расположены по обѣ стороны перпендикуляра AF, опущеннаго изъ A на DE; 3) обѣ прямыя AB и AC (чер. 99)

Чер. 97



Чер. 98.

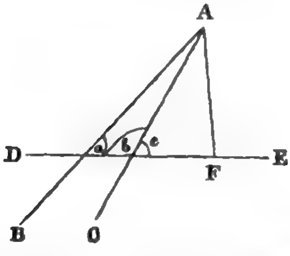


расположены по одну сторону перпендикуляра AF къ линіи DE. Докажемъ справедливость теоремы для всѣхъ этихъ случаевъ.

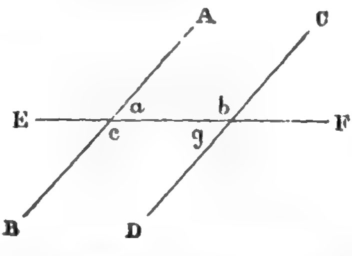
1. Уг. a (чер. 97) прямой; а уг. b, какъ уголъ наклонной AC съ прямой DE, обращенный отверстіемъ къ перпендикуляру, будетъ острый; слѣд. $a+b<2d$.

2) По предыдущему, уголъ a (чер. 98) меньше прямаго; уг. b также острый; слѣд. $a+b<2d$.

Чер. 99.



Чер. 100.



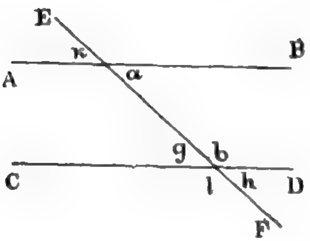
3. Уг. a (чер. 99) меньше уг. c, потому что наклонная AB дальше отстоитъ отъ перпендикуляра AF, чѣмъ наклонная AC; но $b+c=2d$, какъ смежные; слѣд. $b+a<2d$.

65. *Двѣ прямыя линіи будутъ параллельны между собою, если при пересѣченіи ихъ третьей линіей сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна двумъ прямымъ.* Пусть отъ пересѣченія прямыхъ AB и CD (чер. 100) линіей EF получаются внутренніе односторонніе углы a и b, сумма которыхъ$=2d$; тогда и $c+g=2d$, потому что сумма всѣхъ четырехъ угловъ a, c, b и g равна 4 прямымъ, такъ какъ они составляютъ двѣ пары смежныхъ угловъ. Докажемъ, что $AB \parallel CB$. Дѣйствительно, AB и CD не могутъ пересѣчься сверху прямой EF, потому что тогда (§ 64) $a+b<2d$; а у насъ дано, что $a+b=2d$. Онѣ не могутъ пересѣчься и ниже прямой AB, потому что тогда $c+g<2d$; а мы сейчасъ доказали, что $c+g$ должно быть равно $2d$, если $a+b=2d$. Итакъ $AB \parallel CD$.

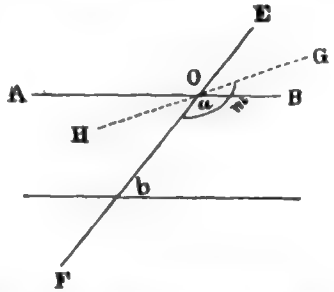
66. Слѣдствіе. *Двѣ прямыя AB и CD (чер. 101) будутъ параллельны: 1) если внутренніе перекрестные углы равны между собою.* Пусть напр. $a=g$; тогда $a+b=2d$, потому что $g+b=2d$; а если $a+b=2d$, то по предъидущей теоремѣ $AB \parallel CD$.

2) *Если внѣшніе перекрестные углы равны*; напр. (чер. 101)

Чер. 101.



Чер. 102.



пусть $k=h$; такъ какъ $b+h=2d$, то и $b+k=2d$, ибо $k=h$ по условію; а слѣд. и $b+a=2d$, ибо $k=a$ какъ углы вертикальные; а если $b+a=2d$, то линіи параллельны.

3) *Если соотвѣтственные углы равны;* напр. $AB \parallel CD$, когда $a=h$, потому что тогда $a+b=2d$, такъ какъ $h+b=2d$, какъ смежные.

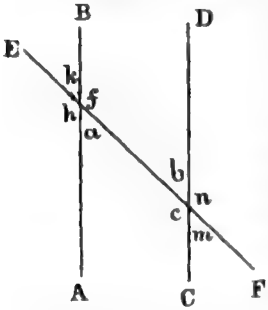
4) *Если сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна двумъ прямымъ*; напр. если $k+l=2d$, то $AB \parallel CD$. Въ самомъ дѣлѣ, $k=a$, $l=b$; слѣд. если $k+l=2d$, то и $a+b=2d$.

Всѣ эти четыре слѣдствія вмѣстѣ съ основной теоремой составляютъ *условія параллельности прямыхъ.* Къ числу этихъ условій можно бы присоединить еще теорему о параллельности двухъ линій, перпендикулярныхъ къ третьей; но эта теорема заключается въ теор. § 65 какъ частный случай.

67. Обратно—*если двѣ прямыя линіи параллельны между собою, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ, образующихся при пересѣченіи этихъ линій какой либо третьей прямой линіей, равна двумъ прямымъ.* Положимъ, что (чер. 102) $AB \parallel CD$. Чтобъ доказать, что $a+b=2d$, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Допустимъ, что $a+b<2d$; тогда мы можемъ одинъ изъ угловъ, напр. уг. a, увеличить такъ, чтобы, сложивъ его съ b, получить въ суммѣ $2d$; положимъ, что для этого надо къ a придать уг. BOG, и что слѣд. $m+b=2d$. Тогда, по предъидущей теоремѣ, прямая HG должна быть параллельна CD и слѣд. через одну и туже точку O были бы проведены двѣ линiи AB и HG, параллельныя CD. Такъ какъ этого не можетъ быть, то слѣд. и $a+b$ не можетъ быть меньше $2d$. Точно такъ же докажемъ, что $a+b$ не можетъ быть больше $2d$; слѣд. $a+b=2d$.

68. Слѣдствiе. *Если* (чер. 103) *прямая* $AB \parallel CD$, *то* 1) *внутреннiе перекрестные углы равны;* дѣйствительно, такъ какъ $AB \parallel CD$, то $f+b=2d$; но $f+a=2d$ какъ смежные; слѣд. $f+b=$ $=f+a$, откуда $b=a$.

Чер. 103.



2) *внѣшнiе перекрестные углы равны*; сейчасъ доказано, что $a=b$; слѣд. и $k=m$, потому что первый изъ этихъ угловъ есть вертикальный съ a, а второй вертикальный съ b.

3) *соотвѣтственные углы равны*; напр. $k=b$, потому что $k=a$ какъ вертикальные, $a=b$ какъ внутреннiе перекрестные.

4) *сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ*$=2d$. Дѣйствительно, $h+k=2d$, а $k=m$ какъ внѣшнiе перекрестные, слѣд. и $h+m=2d$.

69. Легко убѣдиться, что если (чер. 103) существуетъ одно изъ слѣдующихъ равенствъ
$a+c=2d$, $f+b=2d$, $a=b$, $f=c$, $k=m$, $h=n$, $k=b$, $f=n$, $h=c$, $a=m$, $h+m=2d$, $k+n=2d$, то будутъ существовать и прочiя; и наоборотъ, если хотя одно равенство не будетъ выполнено, то не будутъ существовать и прочiя. Это можно доказать для каждаго отдѣльнаго равенства, основываясь на свойствахъ смежныхъ и вертикальныхъ угловъ. Пусть напр. $h=c$; тогда и $f=c$, ибо f вертикальный съ h; и $a=b$, такъ какъ a служитъ углу h дополненiемъ до двухъ прямыхъ, а b дополняетъ до двухъ прямыхъ уг. c; углы же h и c равны между собою по условiю.

Положимъ еще, что уг. a меньше уг. b; тогда и уг. k, какъ равный углу a, будетъ меньше уг. b; слѣд. и сумма угловъ $b+f$ не будетъ равна двумъ прямымъ, и т. д.

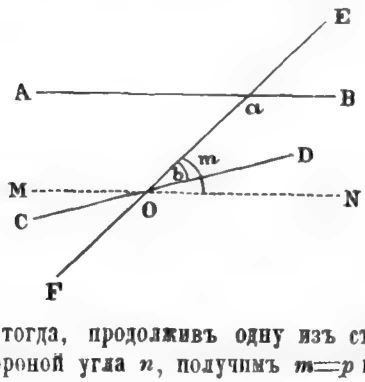
70. *Если хотя одно изъ предъидущихъ равенствъ не существуетъ*, т. е. если напр. углы соотвѣтственные или перекрестные не равны между собою, а также если сумма внутреннихъ или внѣшнихъ одностороннихъ угловъ не равна двумъ прямымъ, *то линiи не будутъ параллельны между собою*. Такъ какъ нарушенiе одного равенства влечетъ за собою нарушенiе и всѣхъ прочихъ, то для доказательства изложенной теоремы достаточно доказать, что линiи не будутъ параллельны въ какомъ нибудь одномъ случаѣ; докажемъ напр., что *если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна двумъ прямымъ, то линіи пересѣкаются*. Пусть (чер. 104) $a+b<2d$; тогда при точкѣ O можно вообразить такой уголъ m, который бы съ a составилъ $2d$; прямая MN, образующая этотъ уголъ съ сѣкущей EF, будетъ параллельна AB; а потому CD не можетъ быть параллельна AB, такъ какъ черезъ точку O можно провести только одну параллельную.

71. Теорему о томъ, что двѣ прямыя линіи пересѣкаются, если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна $2d$, принялъ безъ доказательства знаменитый ученый древней Греціи Эвклидъ, который первый изложилъ систему Геометріи почти въ томъ самомъ видѣ, въ какомъ она существуетъ и въ наше время; поэтому означенная теорема носитъ названіе одиннадцатой аксіомы Эвклида или эвклидова постулата. Въ § 70 эта истина доказана, но только потому, что принята безъ доказательства (§ 60) другая истина: перпендикуляръ и наклонная къ одной прямой пересѣкаются между собою; эта послѣдняя истина есть, очевидно, частный случай эвклидова постулата. Вообще, вполнѣ строгой теоріи параллельныхъ линій не существуетъ: непремѣнно одна какая либо теорема должна быть допущена безъ доказательства, иначе говоря—принята за аксіому.

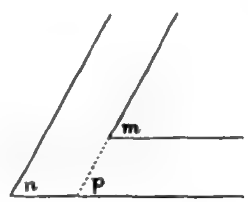
72. *Углы, которыхъ стороны взаимно параллельны, или равны между собою или составляютъ въ суммѣ два прямыхъ.* При этомъ могутъ быть три случая.

1) Углы m и n (чер. 105) обращены отверстіями въ одну сто-

Чер. 104.



Чер. 105.



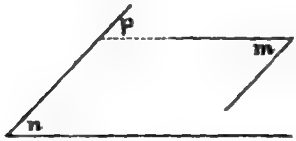
рону; тогда, продолживъ одну изъ сторонъ угла m до пересѣченія съ стороной угла n, получимъ $m=p$ и $p=n$ какъ соотвѣтственные; слѣд. и $m=n$.

2) Углы m и n (чер. 106) обращены отверстіями въ противоположныя стороны; продолживъ опять сторону уг. m, найдемъ $m=p$ какъ перекрестные; $n=p$, какъ соотвѣтственные; слѣд. $m=n$.

3) Углы m и n (чер. 107) обращены отверстіями въ разныя, но не въ противоположныя стороны; тогда $m+p=2d$ по свойству внутреннихъ одностороннихъ угловъ; но $p=n$, слѣд. и $m+n=2d$.

Итакъ *углы съ параллельными сторонами равны, если они обращены отверстіями въ одну или въ противоположныя стороны;*

Чер. 106.



Чер. 107.

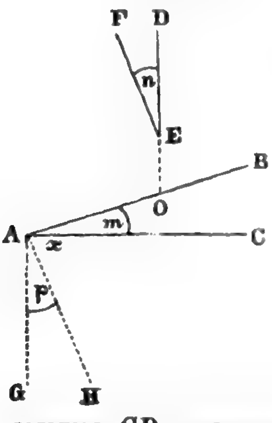
если же они обращены отверстіями въ разныя стороны, то сумма ихъ $= 2d$.

73. *Углы, которыхъ стороны взаимно перпендикулярны, или равны между собою или составляютъ въ суммѣ* $2d$. Пусть (чер. 108) будетъ $DE \perp AC$ и $EF \perp AB$. Проведемъ изъ A прямыя $AG \perp AC$ и $AH \perp AB$; тогда будетъ $AG \parallel DE$ и $AH \parallel FE$, слѣд. уг. $p =$ уг. n. Такъ какъ уг. $p = GAC - x = d - x$ и уг. $m = BAH - x = d - x$, то $p = m$; слѣд. и $n = m$. Продолживъ сторону DE угла n, получимъ уг. FEO, котораго стороны также перпендикулярны къ сторонамъ уг. m; такъ какъ $FEO + n = 2d$ какъ смежные, а по предъидущему $n = m$, то и $FEO + m = 2d$.

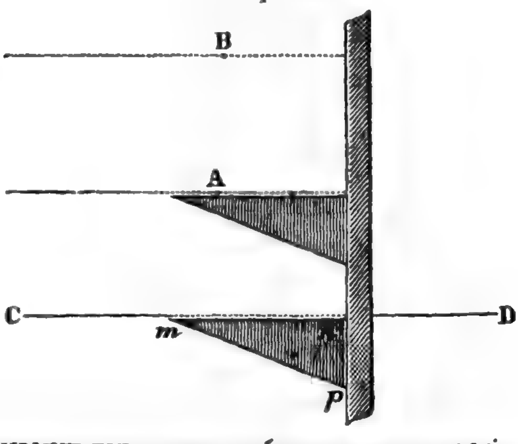
74. Мы уже говорили (§ 59), какимъ образомъ проводятся параллельныя линіи; въ практикѣ для этого употребляютъ обыкновенно слѣдующіе пріемы.

1) Если нужно черезъ точки A и B (чер. 109) провести линіи, парал-

Чер. 108.



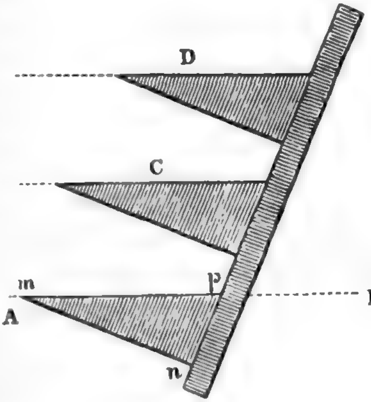
Чер. 109.



лельныя CD, то прикладываютъ наугольникъ ребромъ его mn къ линіи CD; къ другому ребру его np прикладываютъ линейку; потомъ, крѣпко нажимая одной рукой линейку, такъ чтобы она не скользила по бумагѣ (или по доскѣ), подвигаютъ по линейкѣ наугольникъ до тѣхъ поръ, пока ребро его mn не встрѣтитъ точки A; тогда проводятъ по *mn* прямую линію; далѣе подвигаютъ наугольникъ до B и т. д. Проведенныя линіи будутъ параллельны CD, потому что всѣ онѣ перпендикулярны къ ребру линейки.

2) Кладутъ наугольникъ такъ, чтобы его ребро *mp* (чер. 110) совпадало съ прямой AB, параллельно которой надо провести линіи черезъ точки C D....; къ ребру *np* наугольника прикладываютъ линейку; затѣмъ, держа одной рукой линейку, подвигаютъ по ней наугольникъ такъ, чтобы его ребро *np* постоянно прилегало къ ребру линейки, до тѣхъ поръ, пока ребро *mp* не встрѣтитъ точки C; тогда по этому ребру проводятъ прямую линію; затѣмъ подвигаютъ наугольникъ до D и т. д. Полученныя прямыя будутъ параллельны AB, такъ какъ онѣ образуютъ съ ребромъ линейки равные соотвѣтственные углы.

Чер. 110.



75. Задачи. 1) Прямая $AB \parallel CD$; къ AB возставленъ перпендикуляръ EF, къ CD—перпендикуляръ GH. Доказать, что эти перпендикуляры или параллельны или сливаются?

2) Изъ точки O опущены перпендикуляры на прямыя AB и CD; $AB \parallel CD$. Доказать, что эти перпендикуляры составляютъ одну прямую линію?

3) Уг. a (чер. 103) $= {}^2/_3 d$; опредѣлить b, c...?

4) Уг. c (чер. 103) $= 1\,{}^1/_4 d$; опредѣлить a, b...?

5) Уг. f (чер. 103) на ${}^1/_3 d$ больше уг. m; опредѣлить a, b....?

6) Уг. h (чер. 103) вдвое больше уг. b; опредѣлить a, b....?

7) Уг. c (чер. 103) на ${}^1/_4 d$ больше своего смежнаго; опредѣлить a, b....?

8) Уг. f (чер. 103) въ 4 раза больше m; опредѣлить a, c....?

9) На чер. 103-мъ уг. c— уг. $k = {}^1/_8 d$; опредѣлить всѣ углы?

10) Отношеніе уг. h и b (чер. 103) равно n; опредѣлить всѣ углы?

11) Одинъ изъ внутреннихъ угл. двухъ параллельныхъ линій раздѣленъ прямой линіей пополамъ, и эта прямая встрѣчаетъ другую параллель подъ острымъ угломъ, который на ${}^3/_8 d$ меньше раздѣленнаго угла; опредѣлить этотъ послѣдній?

12) Одинъ изъ внутр. угловъ параллельныхъ линій, равный $0{,}7d$, раздѣленъ пополамъ прямой линіей. Подъ какимъ острымъ уг. эта прямая встрѣтитъ другую параллель?

13) Доказать, что линіи, дѣлящія пополамъ два накрестъ лежащіе угла, параллельны между собою?

14) Доказать, что линіи, дѣлящія пополамъ два соотвѣтственныхъ угла, параллельны между собою?

15) По разнымъ сторонамъ прямой AB возставлены къ ней перпендикуляры CD и EF и съ противоположныхъ сторонъ этихъ перпендикуляровъ при ихъ основаніяхъ построены два равныхъ угла KCD и LEF; доказать, что $CK \parallel EL$?

16) Опредѣлить уголъ, образуемый прямыми, дѣлящими пополамъ внутр. одностор. углы параллельныхъ линій?

17) Двѣ параллели AB и CD составляютъ съ сѣкущей EF внутрен. одностор. углы a и b. Изъ вершины уг. a проведена внутри его прямая KL, составляющая съ AB уг.$={}^1/_3 a$; изъ вершины уг. b проведена внутри его прямая GH, составляющая съ CD уг.$={}^1/_3 b$. Подъ какимъ уг. пересѣкаются KL и GH?

18) Рѣшить зад. 17, полагая, что KL и GH образуютъ съ сѣкущей EF углы, соотвѣтственно равные ${}^1/_3 a$ и ${}^1/_3 b$?

19) Рѣшить зад. 17, полагая, что углы, составляемые прямыми KL и GH съ параллелями, равны ${}^1/_4 a$ и ${}^1/_4 b$? ${}^1/_6 a$ и ${}^1/_6 b$? ${}^1/_8 a$ и ${}^1/_8 b$? $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$?

20) Рѣшить зад. 17, полагая, что углы, составляемые прямыми KL и GH съ сѣкущей EF, равны ${}^1/_4 a$ и ${}^1/_4 b$? ${}^1/_6 a$ и ${}^1/_6 b$? ${}^1/_8 a$ и ${}^1/_8 b$? $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$?

21) Положивъ въ зад. 17-й уг. $a={}^3/_4 d$, опредѣлить, какой уголъ составятъ KL и GH, если KL съ параллелью AB составляетъ уг. $={}^1/_3 a$, а GH съ сѣкущей EF составляетъ уг. $={}^1/_3 b$?

22) Двѣ параллели пересѣчены прямой AB такъ, что одинъ изъ внѣшнихъ перекрестныхъ угловъ $={}^2/_3 d$; изъ точки пересѣченія AB съ одной изъ параллельныхъ опущенъ перпендикуляръ на другую параллельную; опредѣлить уголъ, образуемый этимъ перпендикуляромъ съ прямой AB?

23) Уг. $a={}^3/_4 d$; внутри его взята точка и изъ нея опущены перпендикуляры на стороны угла; какой уголъ образуютъ эти перпендикуляры?

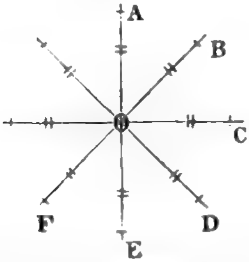
24) Внутри угла $={}^7/_9 d$ взята точка и изъ нея проведены двѣ прямыя линіи—одна параллельно одной сторонѣ угла, другая перпендикулярно къ другой сторонѣ. Какой уголъ образуютъ эти линіи?

ГЛАВА V.

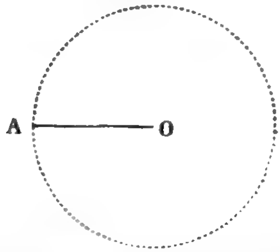
Окружность.

76. Возьмемъ точку O (чер. 111); мы можемъ провести изъ нея по плоскости множество прямыхъ; отложивъ на этихъ прямыхъ равныя части OA, OB, OC, OD...., получимъ рядъ точекъ A, B, C, D.... находящихся въ равныхъ разстояніяхъ отъ O. Всѣ эти точки лежатъ на линіи, происхожденіе которой можно себѣ представить, вообразивъ, что (чер. 112) прямая OA вращается на плос-

Чер. 111.



Чер. 112.



кости около неподвижной точки O до первоначальнаго своего положенія, и что точка A при этомъ вращеніи оставляетъ слѣдъ на плоскости. Вся эта линія (чер. 112) помѣстится на одной плоскости съ точкою O, будетъ сомкнутою и всѣ точки ея будутъ находиться въ одинаковомъ разстояніи отъ O. Такая линія наз. *окружностью*; точка O наз. *центромъ* окружности; прямая OA—*радіусомъ;* а часть плоскости, ограниченная окружностью, наз. *кругомъ*. Слѣд. *окружностью наз. линія, всѣ точки которой лежатъ въ одной плоскости и одинаково отстоятъ отъ нѣкоторой точки, находящейся внутри этой линіи, на той же плоскости, и наз. центромъ. Радіусомъ наз. прямая, соединяющая какую нибудь точку окружности съ центромъ.* Центръ при этомъ принимается за начальную точку радіуса, а точка окружности—за конечную.

По самому опредѣленію окружности, всѣ *радіусы ея равны между собою*. Каждая часть окружности, напр. часть, заключенная между точками A и D (чер. 113), наз. *дугою*. Дуга обозначается или тремя буквами, изъ которыхъ двѣ ставятся при ея конечныхъ точкахъ, а третья въ какой нибудь средней точкѣ, напр дуга AMD (чер. 113), или же двумя буквами, напр. дуга AD; слово дуга изображается знакомъ $\smile$. Окружность обозначается или тремя буквами, поставленными при какихъ нибудь ея точкахъ, или одной буквой, поставленной при центрѣ; напр. окружность DAG (чер. 113) или окружность O.

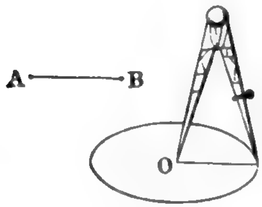
Чер. 113.

77. Каждая точка окружности находится отъ центра на разстояніи, равномъ радіусу; какая нибудь точка B (чер. 113), лежащая внутри окружности, находится отъ центра O на разстояніи OB, меньшемъ радіуса OD; а точка K, лежащая внѣ окружности, находится отъ центра O

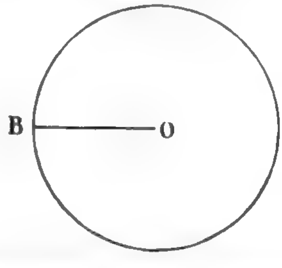
на разстояніи OK, бо̀льшемъ радіуса OC. Поэтому и обратно— каждая точка, находящаяся отъ центра на разстояніи, равномъ радіусу, лежитъ на окружности; точка, находящаяся отъ центра на разстояніи, меньшемъ радіуса, лежитъ внутри окружности; наконецъ, если разстояніе точки отъ центра больше радіуса, то эта точка лежитъ внѣ окружности. Такимъ образомъ (§ 55) *окружность есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ на плоскости отъ данной точки.*

78. Для черченія окружностей и дугъ употребляется циркуль. Если мы одну ножку циркуля (чер. 114) поставимъ въ точку O, и давъ циркулю раствореніе, равное прямой AB, будемъ вращать циркуль

Чер. 114.



Чер. 115.



такъ, чтобы конецъ другой ножки, снабженный карандашемъ или чертежнымъ перомъ, скользилъ по бумагѣ, то по совершеніи полнаго оборота у насъ получится окружность, центромъ которой будетъ точка O, а радіусъ будетъ равенъ прямой AB; иначе говоря—мы изъ точки O радіусомъ AB опишемъ окружность. Если циркуль совершитъ неполный оборотъ, то будетъ описана изъ точки O дуга радіусомъ, равнымъ AB.

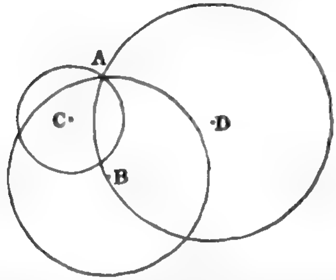
79. *Окружности равны между собою, если равны ихъ радіусы.* Дѣйствительно, если мы наложимъ одну окружность на другую, такъ чтобы центры и плоскости ихъ совпали, то всѣ точки одной окружности упадутъ на другую окружность, потому что, вслѣдстіе равенства радіусовъ обѣихъ окружностей, всѣ точки ихъ будутъ находиться въ одинакомъ разстояніи отъ той точки, въ которой совмѣстились оба центра, и слѣд. окружности совмѣстятся.

Отсюда слѣдуетъ, что если изъ точки O (чер. 115) описана радіусомъ OB окружность, то всякая новая окружность, описанная изъ точки O тѣмъ же радіусомъ, должна совмѣститься съ первой. Поэтому изъ каждой точки даннымъ радіусомъ можно описать только одну окружность; иначе говоря—*окружность опредѣляется положеніемъ ея центра и величиной ея радіуса*, и слѣд. для проведенія вполнѣ опредѣленной окружности надо знать ея центръ и радіусъ.

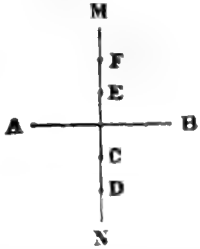
80. *Черезъ данную точку* A (чер. 116) *можно провести* *безчисленное множество окружностей.* Для этого стоитъ только произвольныя точки B, C, D.... принимать за центры, а разстоянія ихъ отъ A за радіусы.

81. *Черезъ двѣ данныя точки можно провести безчисленное множество окружностей.* Пусть требуется провести окружность черезъ точки A и B (чер. 117). Центръ этой окружности долженъ

Чер. 116.



Чер. 117.

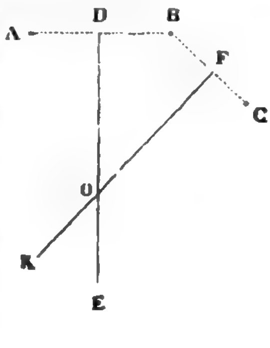


находиться въ одинакихъ разстояніяхъ отъ данныхъ точекъ A и B и слѣд. долженъ лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой AB, соединяющей эти точки. Каждую точку этого перпендикуляра, напр. E, C, F, M.... можно принять за центръ; радіусами же будутъ прямыя EA или EB, CA или CB....

Центръ искомой окружности не можетъ лежать внѣ перпендикуляра MN, потому что только точки MN находятся въ одинакихъ разстояніяхъ отъ конечныхъ точекъ прямой AB: слѣд. *перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой, есть геометрическое мѣсто окружностей, проходящихъ черезъ конечныя точки этой прямой.*

82. *Черезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность, и притомъ только одну.* Чтобы окружность проходила черезъ A и B (чер. 118), центръ ея, по предъидущему, долженъ находиться на перпендикулярѣ DE, возставленномъ изъ средины AB; чтобы она проходила черезъ B и C, центръ долженъ находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины BC; поэтому центръ окружности, проходящей черезъ A, B, C, долженъ находиться въ точкѣ O пересѣченія этихъ перпендикуляровъ; радіусомъ же будетъ линія $OA = OB = OC$, и такъ какъ двѣ прямыя линіи могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то слѣд. черезъ точки A, B, C можно провести только одну окружность.

Чер. 118.



Остается доказать, что прямыя DE и FK непремѣнно пересѣкутся. Дѣйствительно, если бъ мы положили, что $DE \parallel FK$, то линія FK была бы перпендикулярна къ AB, такъ какъ $DE \perp AB$; но FK перпендикулярна къ BC; стало быть AB и BC, какъ перпендикулярныя къ одной и той же прямой FK, должны бы быть параллельны между собою; а этого быть не можетъ, такъ какъ AB и BC имѣютъ общую точку B; слѣд. и DE не можетъ быть параллельна FK, а должна пересѣчься съ ней.

83. *Слѣдствія.* 1) Если точки A, B, C (чер. 119) лежатъ на одной прямой, то перпендикуляры DE и FK не могутъ встрѣтиться; поэтому *черезъ три точки, лежащія на одной прямой, нельзя провести окружность*

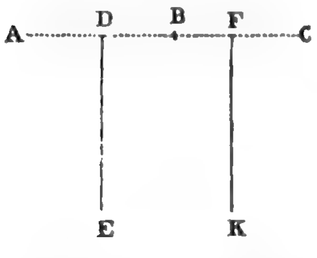
Такимъ образомъ задача о проведеніи окружности черезъ одну или двѣ данныя точки всегда возможна, но неопредѣленна; задача же о проведеніи окружности черезъ три данныя точки въ одномъ случаѣ становится невозможною; а когда она возможна, то вмѣстѣ съ тѣмъ есть задача опредѣленная.

Въ какихъ случаяхъ можно проводить окружность черезъ 4, 5, 6... данныхъ точекъ—будетъ объяснено впослѣдствіи.

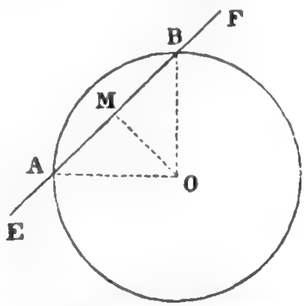
2) *Двѣ окружности, имѣющія три общія точки, имѣютъ общій центръ и сливаются на всемъ своемъ протяженіи;* иначе пришлось бы допустить, что черезъ эти три общія точки проходятъ двѣ различныя окружности.

3) *Двѣ не совпадающія окружности не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.*

Чер. 119.



Чер 120.



84. Взаимное положеніе прямой линіи и окружности.

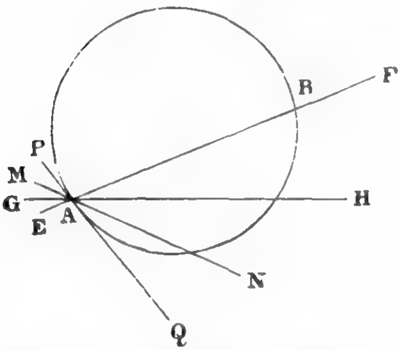
Прямая и окружность не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ, потому что общія точки должны находиться отъ центра въ одинакихъ разстояніяхъ; а изъ какой нибудь точки, слѣд. и изъ центра, нельзя провести къ данной прямой болѣе двухъ, равныхъ между собою, прямыхъ линій (§ 50 — 2). Чтобы показать, что окружность можетъ имѣть съ прямою двѣ общія точки, возьмемъ на окружности двѣ точки A и B (чер. 120) и проведемъ черезъ нихъ прямую EF; эта прямая, имѣющая съ окружностью двѣ общія точки A и B, наз. *сѣкущею;* и общія точки наз. *точками пересѣченія.*

Изъ предъидущаго видно, что прямая линія можетъ пересѣкать окружность только въ двухъ точкахъ.

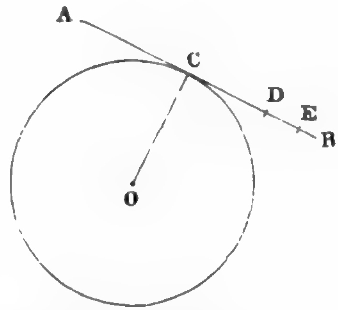
Разстояніе сѣкущей отъ центра меньше радіуса. Дѣйствительно, радіусы OA и OB, какъ прямыя линіи, равныя между собой, будутъ наклонны къ сѣкущей EF; поэтому перпендикуляръ OM, опущенный изъ центра на EF, будетъ меньше радіуса.

85. Если мы станемъ сѣкущую EF (чер. 121) вращать около точки пересѣченія A вправо, такъ чтобы она принимала положенія GH, MN...., то вторая точка пересѣченія B будетъ постепенно приближаться къ A и наконецъ сольется съ ней; тогда сѣкущая приметъ положеніе PQ, и прямая PQ будетъ слѣд. имѣть съ окружностью только одну общую точку A. Всѣ же остальныя точки прямой PQ будутъ находиться внѣ окружности. Въ самомъ дѣлѣ,

Чер. 121.



Чер. 122.



во время вращенія прямой EF только тѣ точки ея лежатъ внутри окружности, которыя помѣщаются между A и B; поэтому, когда точка B сольется съ A, то ни одна точка прямой PQ не будетъ лежать внутри окружности. Прямая, имѣющая съ окружностью только одну общую точку, наз. *касательной* къ окружности; а общая точка наз. *точкой прикосновенія* или *касанія.*

86. *Радіусъ, проведенный въ точку прикосновенія, перпендикуляренъ къ касательной.* Дѣйствительно, только одна точка прикосновенія C (чер. 122) находится на окружности; всѣ же прочія точки касательной D, E... лежатъ внѣ окружности и слѣд. отстоятъ отъ центра дальше, чѣмъ точка C; поэтому радіусъ OC будетъ кратчайшее разстояніе между центромъ и касательной, т. е. $OC \perp AB$. Изъ этого слѣдуетъ, что касательная находится отъ центра въ разстояніи, равномъ радіусу

Обратно: *прямая, перпендикулярная къ радіусу въ конечной его точкѣ, есть касательная къ окружности.* Пусть (чер. 123)

$AB \perp DO$; точка D лежитъ и на окружности и на прямой AB; прочія же точки AB, напр. C, E..., лежатъ внѣ окружности, ибо OC, OE... суть линіи, наклонныя къ AB, и потому всѣ эти линіи больше радіуса OD, который по условію перпендикуляренъ къ AB.

87. Такъ какъ черезъ данную точку къ данной прямой можно провести только одинъ перпендикуляръ, то:

1. *въ каждой точкѣ на окружности можно провести къ ней только одну касательную;*

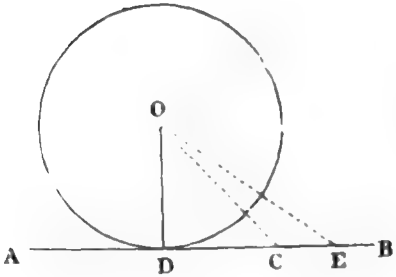
2. *перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ касанія проходитъ черезъ центръ;*

3. *перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, проходитъ черезъ точку прикосновенія.*

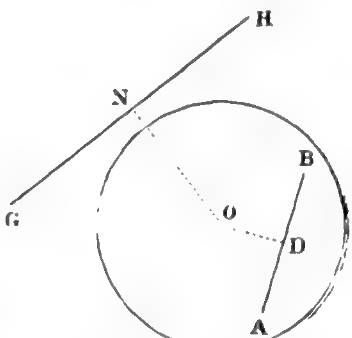
88. Изъ того, что изложено въ §§ 84—86, слѣдуетъ:

1. *Если разстояніе прямой линіи отъ центра больше радіуса, то эта прямая не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью;* напр. прямая GH (чер. 124), разстояніе которой ON отъ центра

Чер. 123.



Чер. 124.



O больше радіуса, не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью, потому что точка N этой прямой, ближайшая къ центру, находится отъ него въ разстояніи, большемъ радіуса; всѣ же прочія точки ея и подавно находятся внѣ окружности.

2. *Если разстояніе прямой линіи отъ центра равно радіусу, то эта прямая касается окружности.*

3. *Если разстояніе прямой линіи отъ центра меньше радіуса, то эта прямая пересѣкаетъ окружность.* Напр. прямая AB (чер. 124), разстояніе OD которой отъ центра меньше радіуса, пересѣкается съ окружностью, потому что если бы она касалась окружности, то разстояніе OD должно бы быть равно радіусу; а еслибы она не имѣла общихъ точекъ съ окружностью, то разстояніе должно бы быть больше радіуса.

89. Соотношеніе между углами, дугами и прямыми линіями въ окружности.

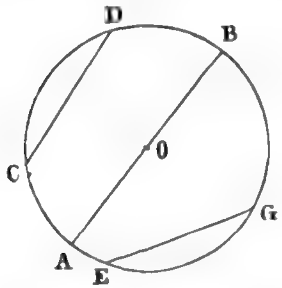
Прямыя CD, EG (чер. 125), соединяющія двѣ точки (C и D, E и G) окружности, наз. *хордами*; иначе говоря—хордой наз. часть сѣкущей, лежащая внутри окружности.

Хорда AB, проходящая черезъ центръ, наз. *діаметромъ*. Въ окружности можно провести безчисленное множество діаметровъ; всѣ они равны между собою, и каждый изъ нихъ вдвое больше радіуса.

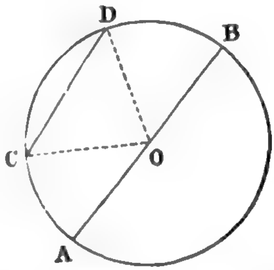
90. Діаметръ имѣетъ слѣдующія свойства:

1. *Діаметръ есть наибольшая хорда* (т, е. онъ больше всякой другой хорды). Проведемъ діаметръ AB (чер. 126) и какую нибудь

Чер. 125.



Чер. 126

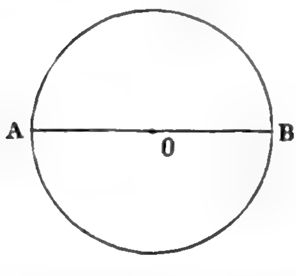


хорду CD; соединивъ точки C и D съ центромъ, будемъ имѣть $CO+OD>CD$; но $CO+OD=$діаметру AB; слѣд. $AB>CD$.

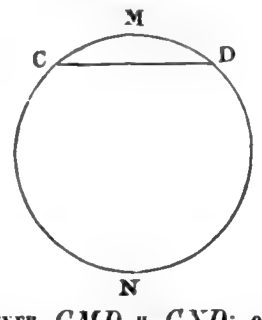
2. *Діаметръ дѣлитъ окружности и кругъ пополамъ*. Дѣйствительно, если мы перегнемъ кругъ по діаметру AB (чер. 127), то всякая точка нижней части окружности непремѣнно упадетъ гдѣ нибудь на верхней части окружности, такъ какъ всѣ точки окружности одинаково отстоятъ отъ центра.

91. Каждая хорда CD (чер. 128), не проходящая черезъ центръ,

Чер. 127.



Чер. 128.

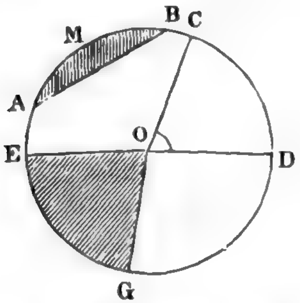


дѣлитъ окружность на двѣ неравныя дуги CMD и CND; обѣ эти дуги *соотвѣтствуютъ* хордѣ CD; но когда говорятъ о дугѣ, *со-*

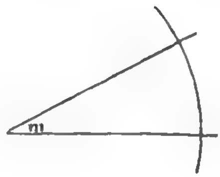
отвѣтствующей данной хордѣ, не указывая, о какой именно дугѣ, бо̀льшей или меньшей, идетъ дѣло, то подразумѣваютъ меньшую изъ дугъ.

92. Уголъ COD (чер. 129), имѣющій вершину въ центрѣ, наз. *центральнымъ угломъ*, соотвѣтствующимъ дугѣ CD. Каждый уг. m (чер. 130) можно сдѣлать центральнымъ, описавъ изъ его вершины дугу произвольнымъ радіусомъ. Часть круга AMB (чер. 129), заключенная между хордою AB и соотвѣтствующею ей дугою, наз. *круговымъ сегментомъ* или отрѣзкомъ. Часть круга EOG, заключенная между двумя радіусами и дугою, наз. *круговымъ секторомъ* или вырѣзкомъ.

Чер. 129.



Чер. 130.



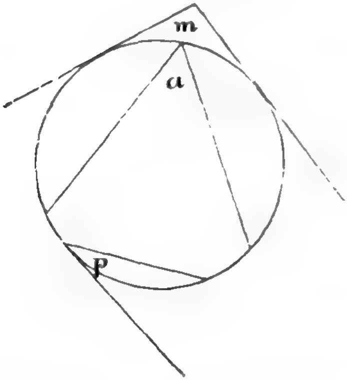
93. Кромѣ центральныхъ угловъ въ окружности еще разсматриваютъ:

1) *углы вписанные*, у которыхъ вершина на окружности, а сторонами служатъ хорды, напр. уг. a (чер. 131);

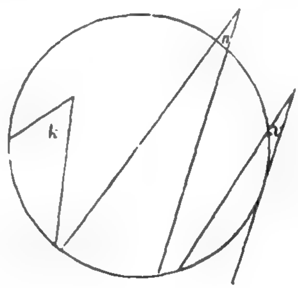
2) *углы описанные*, у которыхъ вершина внѣ окружности, а стороны касательныя къ окружности, напр. уг. m;

3) углы съ вершиною внѣ окружности, которыхъ стороны суть сѣкущія, напр. уг. n (чер. 132), или которые образованы сѣкущею и касательною, напр. уг. x;

Чер. 131.



Чер. 132.



4) углы съ вершиною внутри окружности, напр. уг. k (чер. 132);

5) углы съ вершиною на окружности, образованные хордою и касательною, напр. уг p (чер. 131).

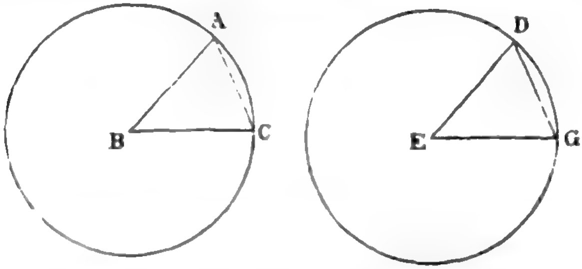
94. ***Въ равныхъ окружностяхъ*** (а стало быть ***и въ одной и той же окружности***)

1) *равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равныя хорды и равные центральные углы*;

2) *большей дугѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая хорда и бо́льшій центральный уголъ.*

Доказательство. 1) Положимъ (чер. 133), что радіусы BA и ED

Чер. 133.

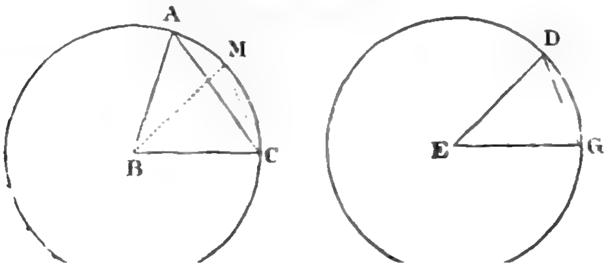


двухъ окружностей равны между собою, и пусть дуга AC=дугѣ DG; докажемъ, что хорда AC = хордѣ DG и уг. ABC = уг. DEG. Для этого вообразимъ, что секторъ DEG наложенъ на секторъ ABC, такъ что центръ E упалъ въ B и прямая EG пошла по BC; тогда точка G упадетъ въ C, ибо EG=BC; дуга GD пойдетъ по дугѣ CA, потому что онѣ описаны одинаковыми радіусами и центры ихъ B и E совмѣщены; по равенству дугъ GD и CA, точка D упадетъ въ A; поэтому и прямая DG совмѣстится съ AC, ибо конечныя точки ихъ совмѣстились. Итакъ хорда AC=хордѣ DG.

Такъ какъ точка G совмѣстилась съ C, точка E совмѣстилась съ B, а точка D съ A, то прямая ED совмѣстится съ BA, а слѣд. и уг. DEG совмѣстится съ уг. ABC; итакъ эти углы равны между собою.

3) Пусть дуга AC (чер. 134) больше дуги DG; докажемъ, что

Чер. 134.



хорда $AC >$ хорды DG и уг. $ABC >$ уг. DEG. Наложимъ секторъ DEG на ABC, такъ чтобы E совпала съ B и EG пошла по BC; тогда точка G упадетъ въ C, дуга GD пойдетъ по CA и точка D упадетъ гдѣ нибудь въ M между C и A, такъ какъ дуга $GD <$ дуги CA; поэтому и радіусъ ED пойдетъ внутри уг. ABC по линіи BM, такъ какъ одна точка его E упала въ B, а другая D упала въ M. Отсюда заключаемъ, что уг. $DEG <$ уг. ABC.

Хорда DG при такомъ наложеніи займетъ мѣсто MC; чтобы доказать, что хорда AC больше хорды DG, или что $AC > MC$, замѣтимъ, что линіи BAC и BMC суть двѣ пересѣкающіяся ломаныя съ общими конечными точками B и C, расположенныя по одну сторону прямой BC; въ такихъ линіяхъ сумма пересѣкающихся частей больше суммы частей не пересѣкающихся (§ 21); поэтому

$$AC + MB > AB + MC. \text{ Но } MB = AB,$$

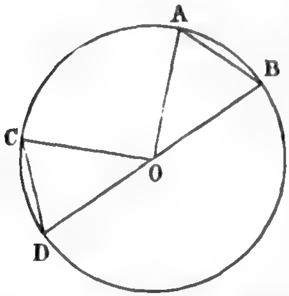
слѣд. $AC > MC$, или $AC > DG$, что и требовалось доказать.

95. Доказанная нами теорема допускаетъ двѣ обратныхъ.

Первая обратная теорема: *въ равныхъ окружностяхъ или въ одной и той же окружности* 1) *равнымъ хордамъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и равные центральные углы*; 2) *бо́льшей хордѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга и бо́льшій центральный уголъ*.

Доказательство. 1) Если хорда $AB =$ хордѣ CD (чер. 135), то дуга AB не можетъ быть больше дуги CD, ибо тогда по предъидущей теоремѣ и хорда AB должна бы быть больше хорды CD. Дуга AB не можетъ быть и меньше дуги CD, потому что тогда и хорда AB была бы меньше CD; а у насъ эти хорды равны. Итакъ дуга $AB =$ дугѣ CD; а если эти дуги равны, то по предъидущей теоремѣ и уг. $AOB =$ уг. COD.

Чер. 135.



Доказательство не измѣнится, если равныя хорды даны будутъ не въ одной, а въ двухъ равныхъ окружностяхъ.

2. Подобнымъ образомъ докажемъ, что бо́льшей хордѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга и бо́льшій центральный уголъ.

Вторая обратная теорема: *въ одной или въ равныхъ окружностяхъ 1) равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и равныя хорды; 2) бо́льшему центральному углу соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга и бо́льшая хорда.* Эта теорема доказывается, какъ и предъидущая, способомъ приведенія къ нелѣпости.

96. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ хорду, соотвѣтствующую ей дугу и центральный уголъ пополамъ.* Пусть (чер. 136) $OD \perp AB$; надо доказать, что $AF = BF$,

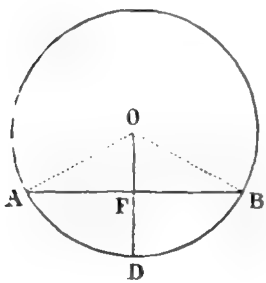
$AD=DB$ и уг. $AOD=$уг. DOB. Прямыя OA и OB равны какъ радіусы; поэтому онѣ наклонны къ AB и должны быть равно удалены отъ основанія F перпендикуляра OD; стало быть $AF=BF$. Для доказательства остальной части теоремы, перегнемъ чертежъ по перпендикуляру OD; тогда, по равенству прямыхъ угловъ OFB и OFA, линія FB пойдетъ по FA; а какъ эти линіи равны, то точка B упадетъ въ A; точка D осталась на мѣстѣ, а B упала въ A, слѣд. дуга BD совмѣстилась съ AD. Точка O осталась на мѣстѣ, а B упала въ A; стало быть линія OB совмѣстилась съ OA; а потому и уг. $AOD=$уг. DOB.

Обратно—*перпендикуляръ къ хордѣ, возставленный изъ средины ея, проходитъ черезъ центръ*, ибо этотъ перпендикуляръ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ концовъ хорды; а центръ также равно отстоитъ отъ концовъ ея.

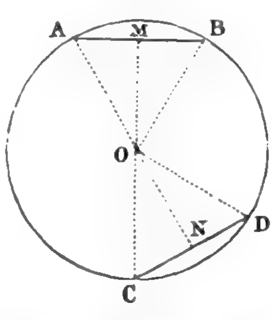
Изъ прямой теоремы слѣдуетъ, что центръ, средина хорды и средина соотвѣтствующей дуги лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ и дѣлящей соотвѣтствующій центральный уголъ пополамъ; т. е. эта прямая удовлетворяетъ пяти условіямъ. А такъ какъ для опредѣленія прямой достаточно двухъ изъ этихъ условій, то слѣд. если два какія нибудь изъ нихъ существуютъ, то должны существовать и остальныя; напр. если прямая проходитъ черезъ средины дуги и соотвѣтствующей хорды, то она пройдетъ черезъ центръ, будетъ перпендикулярна къ хордѣ и раздѣлитъ соотвѣтствующій центральный уголъ пополамъ. Такимъ образомъ изъ прямой теоремы можно вывести цѣлый рядъ новыхъ теоремъ.

97. *Равныя хорды равно удалены отъ центра.* Пусть (чер. 137) хорда $AB=CD$; надо доказать, что перпендикуляры OM и

Чер. 136.



Чер. 137.



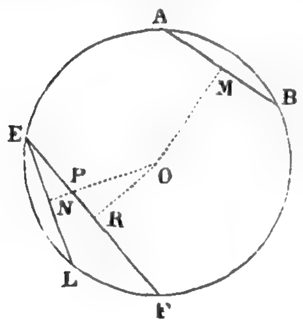
ON, опущенные на нихъ изъ центра, равны. Соединивъ конечныя точки хордъ AB и CD съ центромъ, мы получимъ два равныхъ угла AOB и COD, которые мы можемъ совмѣстить такъ, что центръ O останется на своемъ мѣстѣ, радіусъ OC пойдетъ по OA, а радіусъ OD по OB, при чемъ и самыя хорды совмѣстятся, а слѣд. и средины хордъ M и N также совпадутъ. Такъ какъ, при совмѣщеніи угловъ, точка O осталась на своемъ мѣстѣ, а M совпала съ N, то и перпендикуляры OM и ON совмѣстятся и потому будутъ равны.

98. ***Изъ двухъ неравныхъ хордъ бо̀льшая ближе къ центру.*** Пусть (чер. 138) хорда $EF>AB$. Вообразимъ, что дуга AB отложена по дугѣ EF отъ точки E; точка B при этомъ упадетъ гдѣнибудь въ L, между E и F, потому что дуга AB меньше дуги EF, какъ соотвѣтствующая меньшей хордѣ AB. Хорда EL, соотвѣтствующая дугѣ EL, равна хордѣ AB и потому находится съ ней въ одинакихъ разстояніяхъ OM и ON отъ центра. Но ON пересѣкается съ EF въ точкѣ P, потому что точка O линіи ON находится по одну сторону прямой EF, а точка N линіи ON лежитъ по другую сторону EF; притомъ ON наклонна къ EF, такъ какъ изъ точки O на EF опущенъ уже перпендикуляръ OR; слѣд. $OR<OP$, а потому и подавно $OR<ON$.

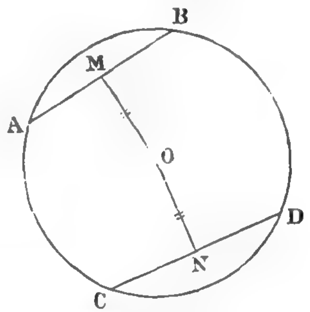
99. Обратно: 1) *Хорды, равноудаленныя отъ центра, равны.*

2. *Изъ двухъ неравноудаленныхъ хордъ та больше, которая ближе къ центру.* Если (чер. 139) $OM\perp AB$, $ON\perp CD$ и $OM=ON$,

Чер. 138.



Чер. 139.



то хорды AB и CD равны между собою. Дѣйствительно, AB не можетъ быть больше CD, потому что тогда OM было бы меньше ON; AB не можетъ быть и меньше CD, потому что тогда OM должно быть больше ON; а если AB не можетъ быть ни больше, ни меньше CD, то $AB=CD$.

Вторая теорема доказывается также способомъ приведенія къ нелѣпости.

100. ***Если въ окружности проведено нѣсколько параллельныхъ хордъ и параллельно къ нимъ касательныя, то***

1) ***дуги, заключенныя между параллельными хордами, равны;***

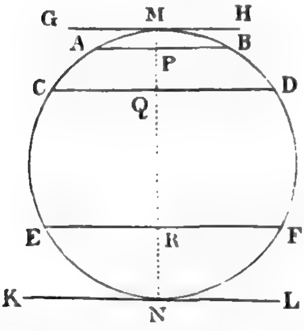
2) ***дуги, заключенныя между касательной и параллельной ей хордой, равны;***

3) *дуги, заключенныя между параллельными касательными, равны (притомъ каждая изъ нихъ есть полукружность).*

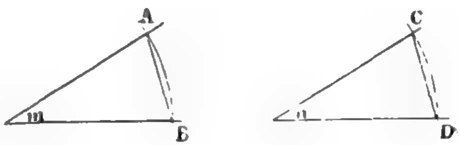
Пусть (чер. 140) $AB \parallel CD \parallel GH \parallel EF \parallel KL$. Проведемъ діаметръ MN, перпендикулярный къ хордѣ CD; онъ будетъ перпендикуляренъ и ко всѣмъ остальнымъ прямымъ AB, EF, GH и KL, пройдетъ чрезъ средины P, Q и R хордъ AB, CD и EF и чрезъ точки касанія M и N касательныхъ GH и KL. Поэтому, когда мы перегнемъ окружность по діаметру MN, то точка A упадетъ въ B, точка C—въ D, точка E—въ F, и слѣд. дуга MA совмѣстится съ MB, дуга AC совмѣстится съ BD, дуга CE совмѣстится съ DF и EN съ FN; слѣд. $MA=MB$; $AC=BD$; $CE=DF$; $EN=FN$. Наконецъ діаметръ MN раздѣлитъ окружность на двѣ равныя части MCN и MDN.

101. Измѣреніе угловъ. Измѣрить уголъ значитъ узнать, во сколько разъ онъ больше единицы угловъ или какую часть онъ составляетъ отъ этой единицы; другими словами—значитъ найти отношеніе измѣряемаго угла къ прямому углу. Для отысканія отношенія между углами, надо имѣть средство накладывать одинъ уголъ на другой. Доказанная нами теорема о равенствѣ центральныхъ угловъ при равенствѣ соотвѣтствующихъ имъ дугъ и хордъ даетъ возможность выполнить это наложеніе. Напр. чтобы наложить уг. m (чер. 141) на уг. n, мы сдѣлаемъ эти углы центральными въ равныхъ окружностяхъ, для чего изъ вершинъ ихъ равными радіусами опишемъ дуги; затѣмъ проведемъ въ уг. m соотвѣтствующую ему хорду AB и отложимъ циркулемъ эту хорду на дугѣ CD отъ точки C. Если другая ножка циркуля упадетъ въ D, то хорда AB=хордѣ CD, слѣд. и дуги AB и CD равны между собой, и уг. m=уг. n; т. е. уг. m наложенъ на n. Имѣя возможность накладывать одинъ уголъ на другой, мы можемъ опредѣлить и отношеніе между углами.

Чер. 140.



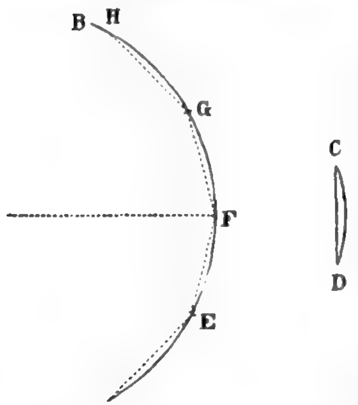
Чер. 141.



Задача эта еще болѣе упростится, если мы ближе изслѣдуемъ зависимость между центральнымъ угломъ и соотвѣтствующею ему дугою; именно можно показать, что опредѣленіе отношенія угловъ можно замѣнить опредѣленіемъ отношенія дугъ. Поэтому скажемъ теперь объ опредѣленіи отношенія между дугами, предполагая, что эти дуги описаны однимъ радіусомъ. При опредѣленіи отношенія такихъ дугъ, находятъ ихъ общую мѣру, поступая такъ же, какъ и при нахожденіи общей мѣры прямыхъ линій: т. е. меньшую дугу накладываютъ на бо̀льшую, первый остатокъ накладываютъ на меньшую дугу, второй остатокъ на первый и т. д. Сосчитавъ, сколько разъ общая мѣра содержится въ каждой изъ данныхъ дугъ, мы узнаемъ и отношеніе этихъ дугъ. Чтобы выполнить наложеніе дугъ при помощи циркуля, надо воспользоваться теоремой о равенствѣ дугъ при равенствѣ соотвѣтствующихъ хордъ, такъ какъ циркулемъ можно взять только прямую линію. Напр. чтобы наложить дугу CD (чер. 142) на дугу AB, мы возьмемъ циркулемъ хорду CD и станемъ ее наносить на дугу AB отъ точки A; пусть точки E, F, G и H будутъ точки на дугѣ AB, въ которыя будетъ помѣщаться при этомъ другая ножка циркуля. Такъ какъ хорды AE, EF, FG, GH равны хордѣ CD, то и дуги AE, EF.... будутъ равны дугѣ CD, и слѣд. дуга CD уложится въ AB четыре раза съ остаткомъ HB.

102. При опредѣленіи отношенія между дугами, какъ и между прямыми линіями, могутъ встрѣтиться два случая: данныя дуги могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы. Въ послѣднемъ случаѣ можно опредѣлить отношеніе дугъ только приближенно. Для этого придется дѣлить дугу на равныя части. Доказанное нами свойство радіуса, перпендикулярнаго къ хордѣ, даетъ возможность раздѣлить дугу на 2, 4, 8 и вообще на 2^n частей.

Чер. 142.



Сдѣлавъ эти замѣчанія, мы можемъ приступить къ доказательству основной теоремы для измѣренія угловъ.

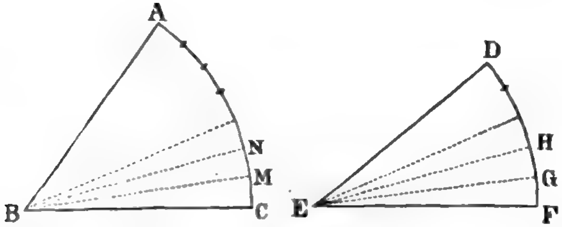
103. *Углы относятся какъ дуги, заключенныя между ихъ сторонами и описанныя изъ ихъ вершинъ одинакими радіусами.*

Теорема эта представляетъ два случая: 1) когда данныя дуги соизмѣримы и 2) когда онѣ несоизмѣримы.

1) *Случай соизмѣримости.* Положимъ, что дуги AC и DF (чер. 143), описанныя изъ вершинъ уг. ABC и DEF равными радіу-

сами, соизмѣримы, и пусть общая мѣра ихъ FG въ дугѣ AC заключается m разъ, а въ дугѣ DF—n разъ; тогда отношеніе AC къ DF будетъ $\frac{m}{n}$.

Чер. 143.

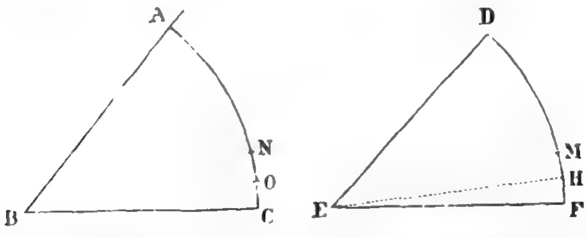


Соединивъ точки G, H.... и M, N..., которыя получатся при откладываніи общей мѣры по дугамъ AC и DF, съ центрами B и E этихъ дугъ, мы раздѣлимъ уг. ABC на m, а уг. DEF на n угловъ; всѣ эти углы будутъ равны между собою, такъ какъ соотвѣтствующія имъ дуги равны; поэтому одинъ изъ этихъ угловъ будетъ общей мѣрой угловъ ABC и DEF, при чемъ эта мѣра въ ABC укладывается m разъ, а въ DEF — n разъ; такимъ образомъ и отношеніе уг. ABC къ DEF равно $\frac{m}{n}$; слѣд.

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF},$$ что и требовалось доказать.

2) *Случай несоизмѣримости.* Положимъ, что дуги AC и DF (чер. 144), описанныя изъ вершинъ угловъ ABC и DEF равными радіусами, несоизмѣримы.

Чер. 144.



Чтобы доказать, что и въ этомъ случаѣ отношеніе угловъ равно отношенію дугъ, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Допустимъ, что эти отношенія не равны, и пусть напр. $\frac{ABC}{DEF} > \frac{AC}{DF}$.

Тогда, чтобы уравнять эти дроби, надо вторую дробь увеличить; а для этого надо уменьшить ея знаменателя или увеличить числителя. Уменьшимъ знаменателя, и положимъ, что дроби сдѣлаются равными, если мы возьмемъ DM вмѣсто DF; т. е. допустимъ, что

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC}{DM}.$$

Вообразимъ, что дуга AC раздѣлена на равныя части CO, ON...., которыя меньше FM; если одну такую часть откладывать по дугѣ DF, начиная отъ точки D, то вслѣдствіе того, что эта часть меньше MF, одна изъ точекъ упадетъ при этомъ между M и F; пусть это будетъ точка H; тогда дуга DH будетъ соизмѣрима съ AC (общая мѣра ихъ есть дуга CO); поэтому, соединивъ H съ E, на основаніи предыдущаго случая, получимъ

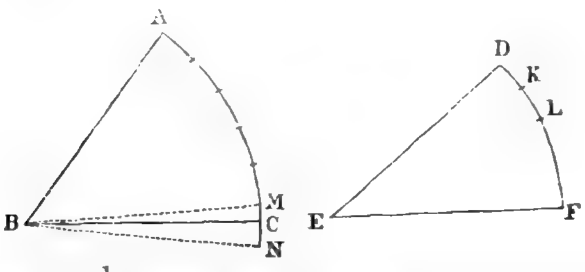
$$\frac{ABC}{DEH}=\frac{AC}{DH}.$$

Сравнивая эту пропорцію съ предыдущей, мы замѣчаемъ что, у нихъ предыдущіе члены равны; слѣд. послѣдующіе пропорціональны, то есть $\frac{DEF}{DEH}=\frac{DM}{DH}$, что не возможно, ибо $DEF>DEH$, а $DM<DH$; или первое отношеніе больше единицы, а второе меньше ея. Нелѣпость послѣдней, полученной нами, пропорціи показываетъ, что одна изъ пропорцій, послужившихъ къ ея выводу, невозможна. Такъ какъ вторая пропорція выведена нами на основаніи прежде доказаннаго, то слѣд. невозможна первая, выведенная въ предположеніи, что $\frac{ABC}{DEF}>\frac{AC}{DF}$.

Отсюда заключаемъ, что отношеніе $\frac{ABC}{DEF}$ не можетъ быть больше отношенія $\frac{AC}{DF}$. Такъ же можно доказать, что первое отношеніе не можетъ быть и меньше втораго. Слѣд. и въ случаѣ несоизмѣримости дугъ $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC}{DF}$.

Приведемъ еще другое доказательство предыдущей теоремы въ случаѣ несоизмѣримости дугъ. Докажемъ сначала, что отношеніе угловъ ABC и DEF (чер. 145), опредѣленное съ какой угодно степенью точ-

Чер. 145.



ности, напр. до $\frac{1}{n}$, будетъ равно отношенію дугъ AC и DF, опредѣленному съ такой же точностью. Вообразимъ, что DF раздѣлена на n равныхъ частей DK, KL....; положимъ, что одна такая часть уложится въ дугѣ AC, начиная отъ точки A, m разъ съ остаткомъ $MC < DK$; остатокъ этотъ непремѣнно долженъ получиться, ибо DK не можетъ уложиться въ AC ровно нѣсколько разъ; иначе она была бы общей мѣрой дугъ AC и DF; между тѣмъ мы положили, что эти дуги несоизмѣримы. Если дугу DK отложить еще $m+1$-й разъ на AC, то получимъ точку N, находящуюся уже внѣ угла ABC. Дуги AM и AN соизмѣримы съ DF, и $\frac{AM}{DF}=\frac{m}{n}$; $\frac{AN}{DF}=\frac{m+1}{n}$; но $AC > AM$ и $< AN$, слѣд. $\frac{AC}{DF}>\frac{m}{n}$ и $\frac{AC}{DF}<\frac{m+1}{n}$. Такъ какъ разность между $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m}{n}$ равна $\frac{1}{n}$, а отношеніе $\frac{AC}{DF}$ заключается между этими дробями, то каждая изъ нихъ и будетъ выражать это отношеніе съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Соединивъ точки M и N съ B, получимъ углы ABM и ABN, и такъ какъ дуги ихъ соизмѣримы съ DF, то $\frac{ABM}{DEF}=\frac{m}{n}$ и $\frac{ABN}{DEF}=$ $=\frac{m+1}{n}$; ABC больше ABM и меньше ABN, слѣд. отношеніе $\frac{ABC}{DEF}$ содержится между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, и положивъ его равнымъ каждой изъ этихъ дробей, мы сдѣлаемъ ошибку меньше $\frac{1}{n}$. Итакъ отношеніе угловъ, опредѣленное съ точностью до $\frac{1}{n}$, равно отношенію дугъ, опредѣленному съ той же точностью.

Теперь уже не трудно доказать, что отношеніе $\frac{ABC}{DEF}$ совершенно одинаково съ отношеніемъ $\frac{AC}{DF}$. Для этого положимъ, что эти отношенія не равны, а отличаются между собою на какое либо число κ, такъ что $\frac{ABC}{DEF}-\frac{AC}{DF}=\kappa$. Опредѣлимъ отношенія между уг. ABC и DEF и дугами AC и DF съ точностью до $\frac{1}{n}$, при чемъ для n выберемъ такое большое число, чтобы дробь $\frac{1}{n}$ была меньше κ. Пусть это отношеніе будетъ $\frac{m}{n}$ и пусть отношеніе $\frac{ABC}{DEF}$ отличается отъ $\frac{m}{n}$ на какую нибудь величину x, а отношеніе $\frac{AC}{DF}$ отличается отъ $\frac{m}{n}$ на z, гдѣ z не равпо x, потому что мы предположили, что $\frac{ABC}{DEF}$ не равно $\frac{AC}{DF}$.

Тогда $\frac{ABC}{DEF}=\frac{m}{n}+x$, а $\frac{AC}{DF}=\frac{m}{n}+z$; слѣд. $\frac{ABC}{DEF}-\frac{AC}{DF}=$ $=\frac{m}{n}+x-\left(\frac{m}{n}+z\right)=x-z$. Но разность между отношеніями $\frac{ABC}{DEF}$ и $\frac{AC}{DF}$ мы означили черезъ κ, слѣд. $\kappa=x-z$. Это равенство невозможно, потому что x и z суть величины, меньшія $\frac{1}{n}$, а κ—величина, бо́льшая $\frac{1}{n}$; разность же двухъ величинъ, каждая изъ которыхъ меньше $\frac{1}{n}$, очевидно, не можетъ быть больше $\frac{1}{n}$. Слѣдов. и отношенія $\frac{ABC}{DEF}$ и $\frac{AC}{DF}$ не могутъ быть различны; т. е. и въ случаѣ несоизмѣримости дугъ также имѣемъ $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC}{DF}$.

104. Чтобы измѣрить уг. ABC (чер. 145), надо найти его отношеніе къ единицѣ угловъ. Если въ пропорціи $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC}{DF}$ примемъ уг. DEF за единицу угловъ, а соотвѣтствующую ему дугу DF за единицу дугъ, то получимъ:

$\frac{\text{уг. } ABC}{1 \text{ угловъ}}=\frac{\text{дуга } AC}{1 \text{ дугъ}}$; т. е. отношеніе угла къ единицѣ угловъ равно отношенію соотвѣтствующей ему дуги къ единицѣ дугъ, причемъ за единицу дугъ принимается дуга, соотвѣтствующая единицѣ угловъ и описанная тѣмъ же радіусомъ, какимъ описана дуга изъ вершины измѣряемаго угла; иначе говоря—число, выражающее величину угла въ угловой единицѣ, равно числу, выражающему величину соотвѣтствующей ему дуги въ дуговой единицѣ. Обыкновенно единицу угловъ и единицу дугъ въ этой пропорціи опускаютъ и такимъ образомъ получаютъ равенство:

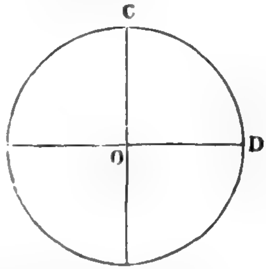
$$\text{уг. } ABC=\text{дугѣ } AC,$$

которое выражаютъ словами слѣдующимъ образомъ: *уголъ измѣряется дугою, описанною изъ его вершины произвольнымъ радіусомъ.* Въ буквальномъ же смыслѣ это равенство невозможно, такъ какъ уголъ и дуга суть величины разнородныя и потому равными быть не могутъ.

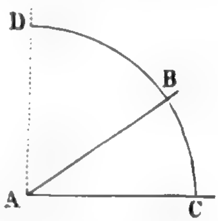
Такъ какъ уг. ABC, если изъ вершины его описана дуга, становится центральнымъ, то выводъ нашъ можно еще выразить въ такой формѣ: *центральный уголъ измѣряется соотвѣтствующею ему дугой.*

105. За единицу для измѣренія угловъ принимаютъ, какъ мы знаемъ, прямой уголъ. Каждому центральному прямому углу COD (черт. 146) соотвѣтствуетъ дуга CD въ четверть окружности. Дѣйствительно, если продолжимъ стороны уг. COD за его вершину, то получимъ два взаимно перпендикулярные діаметра, которые раздѣлятъ окружность на четыре равныя дуги, такъ какъ эти дуги соотвѣтствуютъ четыремъ равнымъ угламъ. Такимъ образомъ единицей дугъ служитъ четверть окружности, и для измѣренія какого-нибудь угла BAC (чер. 147), надо изъ вершины его A возставить перпендикуляръ къ одной изъ его сторонъ, напр. къ AC; потомъ изъ точки A описать дугу CBD и сравнить дугу CB съ четвертью окружности CBD; какую часть четверти окружности составляетъ дуга CB, такую же часть прямаго угла составляетъ уг. BAC. Если напр. дуга CB (чер. 148)$=\frac{7}{3}$ четверти окружности, то и уг. $BAC=\frac{7}{3}\,d$.

Чер. 146.

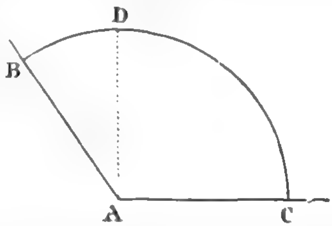


Чер. 147.



106. Кромѣ четверти окружности за единицы для измѣренія дугъ принимаютъ еще $\frac{1}{360}$ окружности и называютъ ее *градусомъ;* градусъ раздѣляется на 60 *минутъ*, минута на 60 *секундъ*. Слово градусъ обозначается $^{\circ}$, минута —$'$, секунда —$''$, такъ что число 25 градусовъ 18 минутъ 42,3 секунды надо изобразить такъ: $25^{\circ}\ 18'\ 42''.3$.

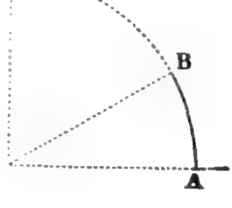
Чер. 148.



На черт. 149-мъ дуга $AB=30^{\circ}$.

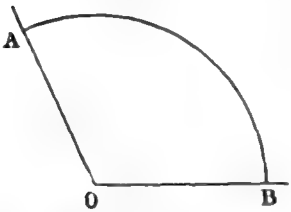
107. Градусы, минуты и секунды окружностей не имѣютъ постоянной, опредѣленной длины: съ увеличеніемъ длины окружности будутъ увеличиваться и ея градусы, минуты и секунды. Они только опредѣляютъ величину дуги по отношенію ко всей окружности, а слѣд. и по отношенію къ $\frac{1}{4}$ окружности; напр. дуга въ 5° во всякой окружности будетъ$=\frac{5}{360}$ или $\frac{1}{72}$ цѣлой окружности и $\frac{5}{90}$ или $\frac{1}{18}$ четверти окружности. Поэтому, опредѣливъ, сколько градусовъ, минутъ и секундъ заключается въ дугѣ, описанной изъ вершины какого-либо

Черт. 149.



угла, мы легко можемъ опредѣлить, въ какомъ отношеніи онъ находится къ прямому углу, т. е. измѣрить его. Пусть напр. дуга AB угла AOB (чер. 150) заключаетъ въ себѣ $112°30'$; тогда для опредѣленія величины уг. AOB имѣемъ пропорцію

Чер. 150.



$$\frac{\text{уг. } AOB}{d} = \frac{112°30'}{{}^1\!/_4 \text{ окр.}} = \frac{112°30'}{90°}.$$

Обративъ $112°30'$ и $90°$ въ минуты и раздѣливъ первое число на второе, получимъ $\frac{6750}{5400} = \frac{5}{4}$. Итакъ $\frac{\text{уг.} AOB}{d} = \frac{5}{4}$, или уг. $AOB = {}^5\!/_4\, d = 1\,{}^1\!/_4 d$.

108. При измѣреніи угловъ неудобно было бы ограничиться одной только основной единицей—прямымъ угломъ, такъ какъ числа, выражающія многіе углы въ этой единицѣ, будутъ очень сложны; такъ напр. если дуга, соотвѣтствующая углу, будетъ равна $23°17'29''$, то легко найти, что уголъ будетъ составлять ${}^{83849}\!/_{324000}\, d$; и бо́льшая часть угловъ выразятся такими несократимыми дробями, числители и знаменатели которыхъ представляютъ большія числа. Поэтому въ соотвѣтствіе единицамъ дугъ приняты для измѣренія угловъ еще слѣдующія единицы: уголъ, соотвѣтствующій дугѣ въ $1°$; уголъ, соотвѣтствующій дугѣ въ $1'$; и уголъ, соотвѣтствующій дугѣ въ $1''$. Эти углы соотвѣтственно называютъ градусами, минутами и секундами и означаютъ тѣми же значками, какъ градусы, минуты и секунды окружности. Такъ какъ градусъ окружности составляетъ ${}^1\!/_{90}$ четверти окружности, минута ${}^1\!/_{60}$ градуса и секунда ${}^1\!/_{60}$ минуты, то уголъ въ $1°$ равенъ ${}^1\!/_{90} d$, уголъ въ $1' = {}^1\!/_{60}$ угла въ $1°$ и уголъ въ $1'' = {}^1\!/_{60}$ угла въ $1'$. Такимъ образомъ мѣры угловъ суть $d = 90°$; $1° = 60'$; $1' = 60''$; $1''$.

Углы въ $1°$, $1'$ и $1''$, какъ опредѣленныя части постоянной величины—прямаго угла, суть также величины постоянныя.

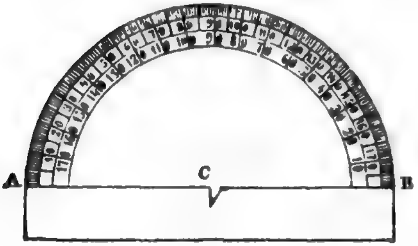
Такъ какъ дугѣ въ $1°$ соотвѣтствуетъ и уголъ въ $1°$, дугѣ въ $1'$—и уголъ въ $1'$, дугѣ въ $1''$ и уголъ въ $1''$, и на оборотъ углу въ $1°$ соотвѣтствуетъ дуга въ $1°$, углу въ $1'$ — дуга въ $1'$, углу въ $1''$—дуга въ $1''$, то сколько градусовъ, минутъ и секундъ окружности заключается въ дугѣ, описанной изъ вершины даннаго угла, столько же угловъ въ $1°$, $1'$ и $1''$ будетъ заключаться и въ самомъ углѣ. Поэтому ни въ обозначеніи, ни въ словесномъ выраженіи не дѣлаютъ различія между градусами, минутами и секундами окружности и градусами, минутами и секундами угла, хотя они и представляютъ разнородныя величины: первые суть линіи, а вторые—углы.

Кромѣ того не слѣдуетъ упускать изъ виду, что, выразивъ уголъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, мы совершенно опредѣлимъ величину угла и получимъ возможность сравнивать его со всякимъ другимъ угломъ, выраженнымъ въ тѣхъ же единицахъ; между тѣмъ какъ выразивъ дугу въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, мы будемъ знать только величину ея по отношенію къ цѣлой окружности и къ дугамъ той же окружности, но ничего не въ состояніи сказать о величинѣ дуги по отношенію къ дугамъ другой окружности, выраженнымъ также въ градусахъ, минутахъ, секундахъ.

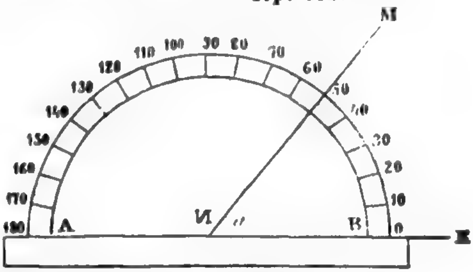
109. Вслѣдствіе указаннаго нами соотношенія между числомъ градусовъ, минутъ и секундъ въ углѣ и въ дугѣ, описанной изъ его вершины, при измѣреніи угловъ достаточно опредѣлить число градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ угла, при чемъ совершенно безразлично, какимъ радіусомъ эта дуга описана. Для того, чтобы это измѣреніе можно было выполнить съ возможно бо́льшимъ удобствомъ, употребляютъ инструментъ, наз. *транспортиромъ*.

Это есть (чер. 151) мѣдный (иногда роговой или деревянный) полукругъ, раздѣленный на градусы; счетъ градусовъ идетъ, какъ

Чер. 151.



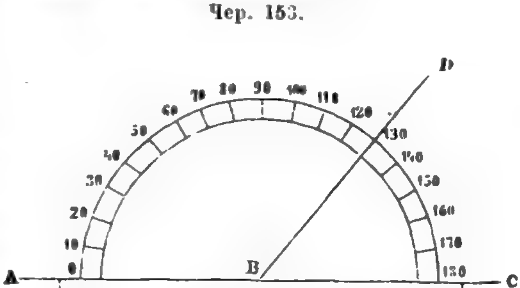
Чер. 152.



видно по чертежу, съ той и съ другой стороны полукруга. Чтобъ измѣрить уг. a (чер. 152), мы приставляемъ транспортиръ такъ, чтобы его центръ совпалъ съ вершиной угла, а діаметръ AB совпалъ съ стороной угла NK, и смотримъ, въ какой точкѣ пересѣчетъ дугу транспортира другая сторона угла MN; число градусовъ на транспортирѣ, заключающееся между сторонами угла, и покажетъ величину этого послѣдняго; какъ видно по чертежу, уг. $a=50^0$.

110. Посредствомъ транспортира можно начертить уголъ, который бы содержалъ извѣстное число градусовъ, а также построить уголъ, равный данному углу. Если напр. нужно начертить уголъ въ 130^0, то беремъ транспортиръ (чер. 153) и проводимъ по діаметру его прямую AC; потомъ точку,

Чер. 153.



гдѣ поставлено на транспортирѣ 130°, соединяемъ съ центромъ B; уг. ABD будетъ равенъ 130°.

Если хотимъ построить уг., равный данному углу a, то посредствомъ транспортира находимъ, сколько градусовъ въ уг. a—положимъ, что $a=20°$; тогда чертимъ уг. въ 20°.

Замѣтимъ, что такъ какъ транспортиры бываютъ обыкновенно небольшой величины, то на нихъ означаются только градусы; минутъ же и секундъ означить нельзя, такъ какъ эти дѣленія очень мелки. Поэтому измѣреніе и строеніе угловъ по транспортиру не могутъ быть точными; такъ нельзя построить уголъ въ 30° 35′ 43″. Точно также, если измѣряемый уг. не содержитъ въ себѣ ровно нѣсколько градусовъ, напр. если онъ содержится между 42° и 43°, то мы не можемъ опредѣлить, сколькими именно минутами и секундами онъ превышаетъ 42°.

Какимъ образомъ помощью циркуля и линейки построить уголъ, равный данному, будетъ объяснено въ послѣдствіи.

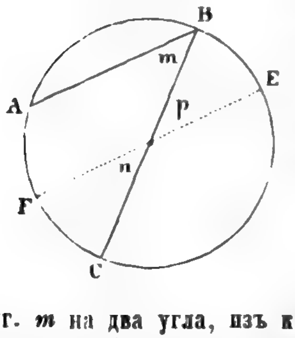
111. Извѣстная намъ теорема о свойствѣ радіуса, перпендикулярнаго къ хордѣ, даетъ возможность дѣлить дугу только на 2, 4, 8, 16.... вообще на 2^n равныхъ частей; и въ послѣдствіи не возможно будетъ дать такихъ теоремъ, на основаніи которыхъ можно было бы раздѣлить дугу на произвольное число равныхъ частей; поэтому построеніе транспортира нельзя произвести вполнѣ геометрическимъ способомъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно измѣрять углы такими дугами, которыя описаны не изъ вершинъ этихъ угловъ. Для этого служатъ слѣдующія теоремы.

112. *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами.* При этомъ могутъ быть 3 случая:

1) Уг. m (чер. 154) состоитъ изъ діаметра и хорды. Проведя діаметръ $FE \| AB$, получимъ уг. $n=m$ какъ соотвѣтственные; n, какъ центральный уг., измѣряется дугой CF; слѣд. и m измѣряется также дугой CF; но $CF=BE$ по равенству уг. n и p, а $BE=AF$, какъ дуги между параллельными хордами; слѣд. $CF=AF=\frac{1}{2}AC$. Итакъ уг. m измѣряется $\frac{1}{2}AC$; если напр. $AC=80°$, то $m=40°$.

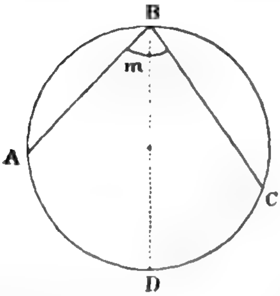
Чер. 154.



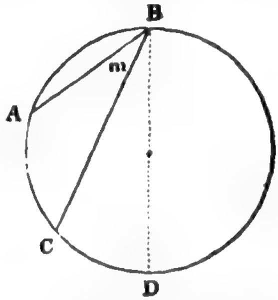
2) Уг. m или ABC (чер. 155) состоитъ изъ двухъ хордъ, и центръ находится внутри угла. Проведя діаметръ BD, разобьемъ уг. m на два угла, изъ которыхъ одинъ измѣряется $\frac{1}{2}AD$, другой $\frac{1}{2}DC$; слѣд. m измѣряется $\frac{1}{2}AC$.

3) Центръ находится внѣ угла m (чер. 156). Проведя діаметръ

Чер. 155.



Чер. 156.

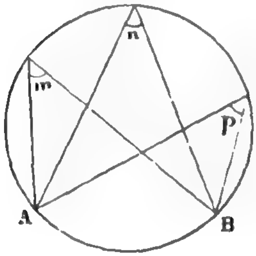


BD, найдемъ, что уг. m=уг. ABD—уг. CBD. Но ABD=$={}^1/_2 AD$; $CBD={}^1/_2\ CD$; слѣд. $m={}^1/_2\,(AD-CD)={}^1/_2\ AC$.

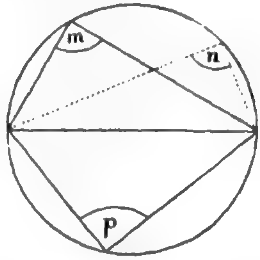
Слѣдствія. 1. *Вписанные углы, опирающіеся на одну и туже дугу, равны между собою*; такъ (чер. 157) уг. $m=n=p$, ибо всѣ они измѣряются половиной дуги AB.

2. *Вписанный уголъ, опирающійся на концы діаметра, есть прямой*, ибо онъ измѣряется половиной полуокружности, т. е. $=90°$. Такъ углы m, n, p (чер. 158) равны $90°$.

Чер. 157.

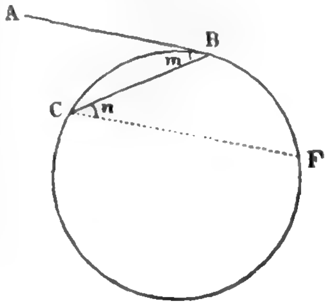


Чер. 158.



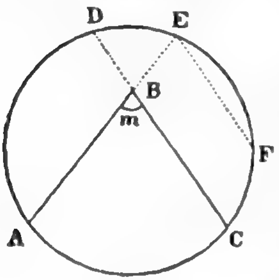
113. *Уголъ, образуемый касательной и хордой, измѣряется половиною дуги, соотвѣтствующей этой хордѣ.* Проведя изъ C (чер. 159) прямую $CF \parallel AB$, получимъ уг. n=уг. m какъ перекрестные. Но n, какъ вписанный, измѣряется ${}^1/_2\ FB$, а $FB=CB$, такъ какъ хорда $CF \parallel$ касательной AB; слѣд. уг. m измѣряется половиной дуги CB.

Чер. 159.



114. ***Уголъ, имѣющій вершину внутри окружности, измѣряется полусуммою дугъ, заключающихся между его сторонами и ихъ продолженіями.*** Продолживъ стороны уг. m (чер. 160), проведемъ изъ E прямую $EF \parallel BC$; тогда уг. E=уг. m; но E измѣряется $^1/_2\ ACF$ или $^1/_2(AC+CF)$; слѣд. и $m={}^1/_2\ (AC+CF)$; дуга же $CF=DE$, ибо хорды CD и EF параллельны между собой; стало быть уг. $m={}^1/_2(\ AC+DE)$. Такъ напр. если $AC=90^\circ$, $DE=35^\circ$, то $m=62^\circ{}^1/_2=62^\circ\ 30'$.

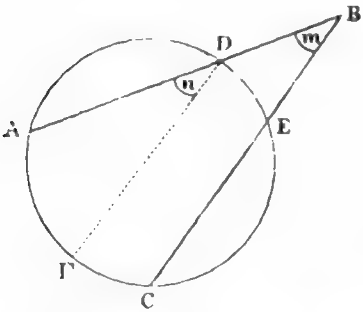
Чер. 160.



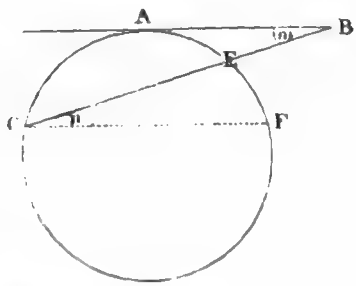
115. ***Уголъ, имѣющій вершину внѣ окружности, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами.*** Здѣсь разсмотримъ три случая:

1. Уголъ m (чер. 161) образованъ двумя сѣкущими. Проведя изъ D прямую $DF \parallel BC$, получимъ уг. n=уг. m; $n={}^1/_2AF$; слѣд. и $m={}^1/_2\ AF={}^1/_2\ (AC-CF)={}^1/_2\ (AC-DE)$, такъ какъ $CF=DE$ по параллельности хордъ EC и DF.

Чер. 161.



Чер. 162.

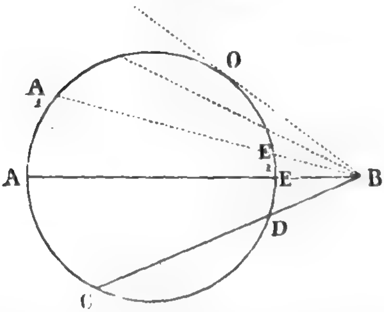


2. Уголъ состоитъ изъ сѣкущей и касательной. Проведя (чер. 162) $CF \parallel AB$, получимъ уг. n=уг. m; уг. n измѣряется $^1/_2\ FE$; слѣд. и $m={}^1/_2FE$; а $FE=AF-AE=AC-AE$, такъ какъ $AF=AC$; слѣд. уг. $m={}^1/_2\ (AC-AE)$.

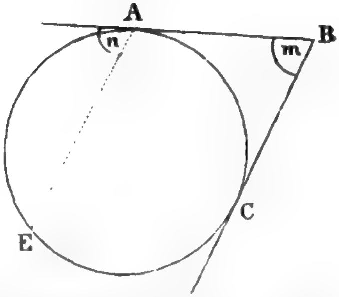
Тоже самое можно доказать еще слѣдующимъ образомъ. Если мы вообразимъ, что сторона AB (чер. 163) угла ABC будетъ повертываться влѣво около точки B, то точки E и A будутъ сближаться между собою, а уг. B все будетъ измѣряться полуразностью дугъ, содержащихся между его сторонами; когда точки A и E сольются въ одну O, то сторона угла обратится въ касательную, а уг. CBO долженъ по прежнему измѣряться полуразностью дугъ между его сторонами, т. е. $^1/_2\ (CO-DO)$.

3. Уголъ состоитъ изъ двухъ касательныхъ. Проведя $AE \parallel BC$ (чер. 164), получимъ уг. n=уг. m; уг. $n={}^1/_2 AE$, слѣд. и $m={}^1/_2 AE$;

Чер. 163.



Чер. 164.

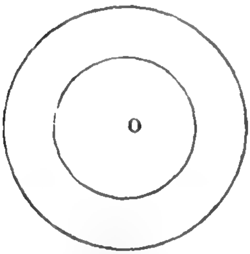


но $AE=AEC-EC=AEC-AC$, ибо $EC=AC$; слѣд. уг. $m=$ $={}^1/_2(AEC-AC)$.

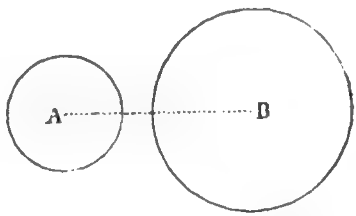
Справедливость теоремы для этого случая слѣдуетъ также изъ того, что описанный уг. можно получить, подвигая вправо около точки B (чер. 163) сторону CB угла CBO до тѣхъ поръ, пока она не сдѣлается касательной къ окружности.

116. Взаимное положенiе двухъ окружностей. Двѣ несовпадающiя окружности могутъ имѣть или общiй центръ (чер. 165) — и тогда онѣ наз. *концентрическими*, или различные центры (чер. 166 и 167), и тогда онѣ наз. *эксцентрическими*.

Чер. 165.

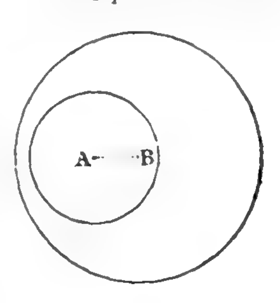


Чер. 166.



Прямая AB, соединяющая центры двухъ эксцентрическихъ окружностей, наз. *линiей центровъ*.

Чер. 167.



Меньшая изъ концентрическихъ окружностей лежитъ внутри большей и потому такiя окружности общихъ точекъ имѣть не могутъ.

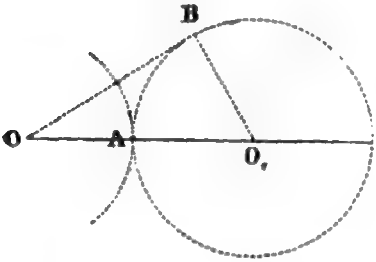
Разсмотримъ, въ какомъ относительномъ положенiи могутъ быть двѣ эксцентрическiя окружности. При этомъ радiусъ одной окружности назовемъ r, другой r_1, а разстоянiе центровъ означимъ черезъ d.

117. ***Двѣ эксцентрическія окружности не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ;*** иначе пришлось бы допустить, что черезъ три точки можно провести двѣ окружности.

118. ***Двѣ эксцентрическія окружности, имѣющія общую точку на линіи центровъ, другой общей точки имѣть не могутъ.*** Здѣсь могутъ быть два случая: 1) или общая точка окружностей помѣщается между ихъ центрами; 2) или оба центра лежатъ по одну сторону общей точки.

1. Пусть (чер. 168) общая точка A лежитъ между центрами O и O_1; тогда $OA = r$, $O_1A = r_1$; слѣд. $OO_1 = d = r + r_1$.

Чер. 168.

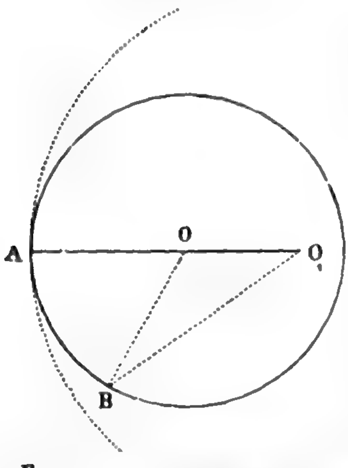


Всякая другая точка B правой окружности O_1 будетъ лежать внѣ окружности O, потому что, соединивъ B съ центрами O и O_1, мы будемъ имѣть

$$OB + BO_1 > OO_1, \text{ или}$$
$$OB + r_1 > r + r_1, \text{ откуда}$$
$$OB > r.$$

2. Если оба центра O и O_1 (чер. 169) лежатъ по одну сторону общей точки A, то $OA = r$, $O_1A = r_1$ и слѣд. $OO_1 = d = r_1 - r$.

Чер. 169.



Всякая другая точка B малой окружности O лежитъ внутри большой O_1, потому что, соединивъ ее съ центрами обѣихъ окружностей, будемъ имѣть

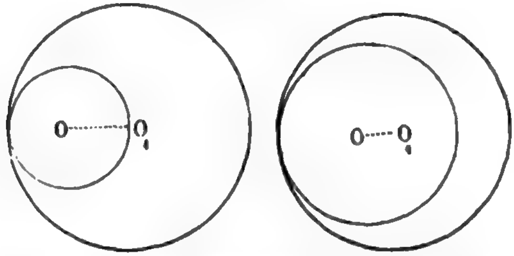
$$O_1B < OO_1 + OB, \text{ или}$$
$$O_1B < r_1 - r + r, \text{ т. е.}$$
$$O_1B < r_1; \text{ а потому } B \text{ лежитъ внутри большой окружности } O_1.$$

Окружности, имѣющія одну общую точку, называются *касательными*. Если при этомъ одна окружность лежитъ внутри другой, то касаніе наз. *внутреннимъ* (чер. 170). Если же одна окружность находится внѣ другой, то онѣ имѣютъ *внѣшнее* касаніе (чер. 171).

119. ***Двѣ окружности, имѣющія общую точку внѣ линіи центровъ, имѣютъ еще такую же; обѣ общія точки лежатъ на***

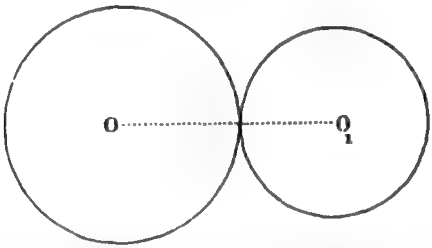
перпендикуляръ къ линіи центровъ и въ одинаковомъ разстояніи отъ этой линіи. Пусть окружности O и O_1 (чер. 172) имѣютъ

Чер. 170.



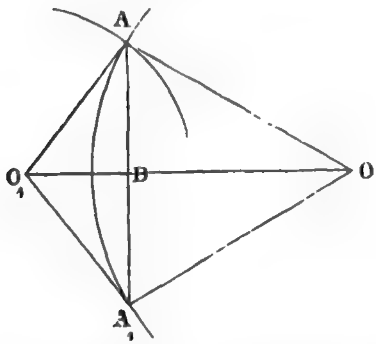
общую точку A внѣ линіи центровъ OO_1. Чтобы доказать существованіе другой общей точки, опустимъ изъ точки A перпендикуляръ

Чер. 171.

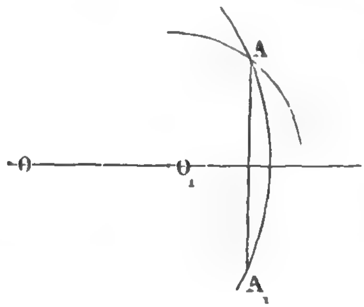


ляръ AD на линію центровъ OO_1 и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью O въ точкѣ A_1. Эта точка будетъ лежать

Чер. 172.



Чер. 173.



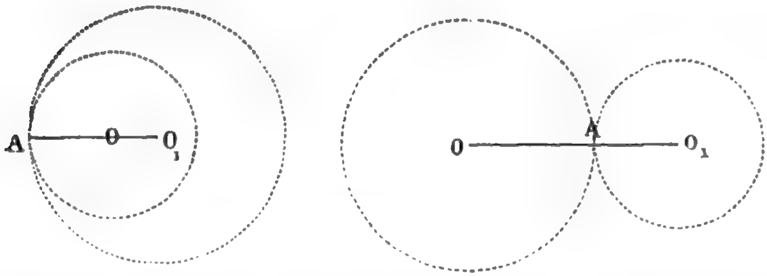
и на окружности O_1. Дѣйствительно, соединивъ точки A и A_1 съ центрами O и O_1, мы будемъ имѣть къ линіи AA_1 двѣ наклонныхъ OA и OA_1, равныхъ между собою, какъ радіусы окружности O; поэтому и разстоянія ихъ DA и DA_1 отъ основанія перпендикуляра OD равны между собою. Если же $DA = DA_1$, то и $O_1A = O_1A_1$, какъ наклонныя къ AA_1, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра O_1D, опущеннаго изъ ихъ общей точки O_1. Итакъ точка A_1 лежитъ и на окружности O_1. Кромѣ точекъ A и A_1, другихъ общихъ точекъ окружности имѣть, какъ мы знаемъ, не могутъ.

Точно тоже доказательство прилагается и къ чер. 173-му.

Двѣ окружности, имѣющія двѣ общія точки, наз. *пересѣкающимися*.

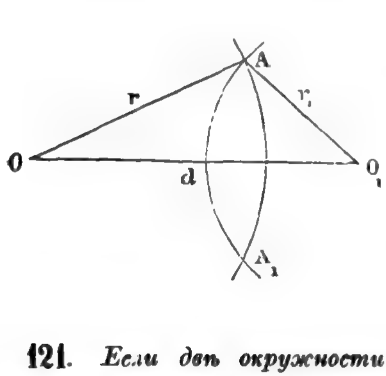
120. *При внѣшнемъ касаніи окружностей разстояніе ихъ центровъ равно суммѣ радіусовъ, а при внутреннемъ касаніи это разстояніе равно разности радіусовъ.* Дѣйствительно, изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ, что касательныя окружности не могутъ имѣть общей точки внѣ линіи центровъ, потому что тогда онѣ имѣли бы еще одну общую точку и слѣд. были бы пересѣкающимися. Если же

Чер. 174.

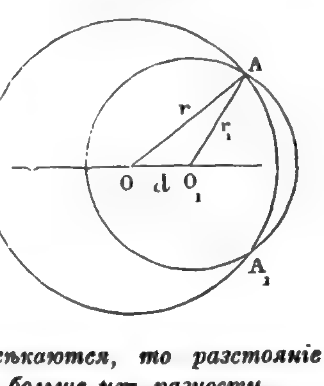


общая точка A (чер. 174) касающихся окружностей лежитъ на линіи центровъ, то она или между центрами O и O_1, и тогда $d = r + r_1$, или по одну сторону центровъ, и тогда $d = r_1 - r$.

Чер. 175.



Чер. 176.



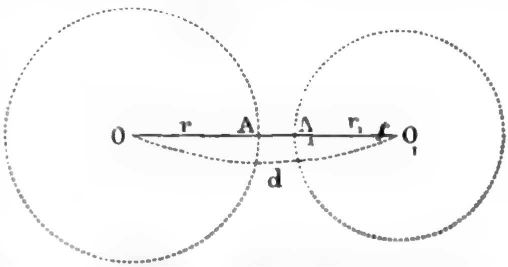
121. *Если двѣ окружности пересѣкаются, то разстояніе центровъ меньше суммы радіусовъ, но больше ихъ разности.*

Когда окружности пересѣкаются, то имѣютъ общія точки A и A_1 (чер. 175) внѣ линіи центровъ OO_1, потому что на линіи центровъ можетъ быть только одна общая точка. Соединивъ одну изъ этихъ точекъ A съ центрами O и O_1, получимъ $OO_1 < OA + O_1A$, или $d < r + r_1$. Притомъ $OO_1 + O_1A > OA$, или $OO_1 > OA - O_1A$, т. е. $d > r - r_1$.

Точно такое же доказательство прилагается и къ чер. 176-му.

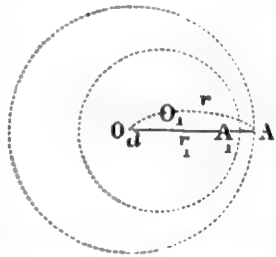
122. *Если двѣ эксцентрическія окружности не имѣютъ общихъ точекъ, то разстояніе ихъ центровъ или больше суммы радіусовъ или меньше разности ихъ.* Въ самомъ дѣлѣ, если одна окружность лежитъ внѣ другой (чер. 177), то на линіи центровъ OO_1 будутъ двѣ точки A и A_1, принадлежащія—первая окружности O, вторая окружности O_1, и несовпадающія между собою. Кромѣ того точка A будетъ внѣшней для окружности O_1, а точка A_1 будетъ внѣшней для окружности O. Поэтому $OO_1 = OA + AA_1 + A_1O_1$, слѣд. $OO_1 > OA + O_1A_1$, или $d > r + r_1$.

Чер. 177.



Если же окружности находятся одна внутри другой (чер. 178), то внутренняя окружность O_1 имѣетъ радіусъ меньшій, чѣмъ радіусъ наружной окружности O. Продолживъ въ этомъ случаѣ линію центровъ OO_1 за центръ малой окружности O_1, мы получимъ точки: A_1 на малой окружности O_1 и A на большой окружности O, не совпадающія, при чемъ точка A_1 будетъ по условію лежать внутри большой окружности O, т. е между точками O_1 и A. Поэтому разность между радіусами $OA = r$ и $O_1A_1 = r_1$ будетъ состоять изъ разстоянія между центрами $OO_1 = d$ и еще изъ прямой A_1A. Слѣд. въ этомъ случаѣ $r - r_1 > d$, или $d < r - r_1$.

Чер. 178.



123. Обратно: 1) *Если разстояніе между центрами двухъ окружностей равно суммѣ или разности ихъ радіусовъ, то окружности касаются;* 2) *если это разстояніе меньше суммы радіусовъ, но больше ихъ разности, то окружности пересѣкаются;* 3) *если оно больше суммы радіусовъ радіусовъ или меньше ихъ разности, то окружности не имѣютъ общихъ точекъ.* Всѣ эти теоремы легко доказываются способомъ приведенія къ нелѣпости. Докажемъ напр. вторую теорему. Если $d < r + r_1$ и $d > r - r_1$, то окружности не могутъ касаться, ибо при касаніи $d = r + r_1$ или $d = r - r_1$. Окружности также не могутъ не имѣть общихъ точекъ, потому что тогда $d>r+r_1$ или $d<r-r_1$; стало быть окружности пересѣкаются.

124. Задачи на построеніе. Въ предъидущихъ отдѣлахъ помѣщено нѣсколько задачъ, въ которыхъ требуется или доказать какое либо свойство геометрическаго протяженія или опредѣлить числовую величину его; такова напр. задача 4-я § 57-го: доказать, что каждая точка прямой, дѣлящей пополамъ данный уголъ, равно отстоитъ отъ сторонъ этого угла, и зад. 6-я § 43-го: опредѣлить уголъ, смежный съ угломъ, равнымъ $^3/_4$ d? Но въ геометрическихъ задачахъ по большей части требуется опредѣлить геометрическое протяженіе не вычисленіемъ, а *построеніемъ*, т. е. *по нѣкоторымъ даннымъ и по условіямъ задачи требуется начертить какое либо геометрическое протяженіе*. Такъ вторая изъ приведенныхъ нами задачъ можетъ быть дана въ такомъ видѣ: по данному углу a построить смежный съ нимъ уголъ? Построеніе при этомъ требуется производить посредствомъ только циркуля и линейки, не употребляя никакихъ другихъ чертежныхъ инструментовъ, напр. наугольника, транспортира. До сихъ поръ мы могли дать весьма мало такихъ задачъ, потому что не имѣли возможности вполнѣ ознакомиться съ употребленіемъ циркуля, не зная свойствъ той линіи, которая описывается помощью этого прибора, т. е. окружности. Теперь же можемъ приступить къ рѣшенію задачъ на построеніе.

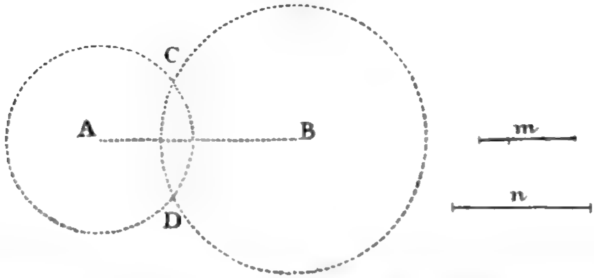
125. Такъ какъ при помощи линейки и циркуля мы можемъ: 1) черезъ двѣ данныя точки провести прямую линію, 2) продолжить данную прямую и 3) описать изъ данной точки окружность даннымъ радіусомъ, то всѣ геометрическія построенія могутъ состоять только изъ повтореній въ различномъ порядкѣ этихъ трехъ построеній; эти послѣднія наз. поэтому *основными* построеніями или *требованіями*. Тѣ построенія, которыя состоятъ не изъ одного только повторенія трехъ основныхъ построеній и слѣд. для выполненія которыхъ кромѣ линейки и циркуля требуются еще и другіе инструменты, считаются въ начальной геометріи невозможными.

Чтобъ провести прямую линію, надо найти двѣ точки, черезъ которыя она должна проходить; чтобъ описать окружность, надо или имѣть три ея точки, или знать центръ и радіусъ; а для опредѣленія радіуса надо знать тоже двѣ точки; такимъ образомъ большинство задачъ можетъ быть сведено на опредѣленіе точки.

Рѣшимъ нѣсколько, наиболѣе важныхъ, задачъ на построеніе.

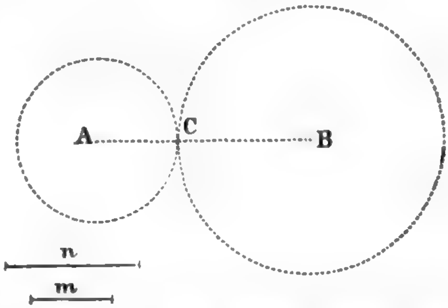
126. *Задача* 1. Даны двѣ точки A и B (чер. 179); найти такую точку, которая находилась бы отъ A въ разстояніи, равномъ данной прямой m, а отъ B въ разстояніи = прямой n? Для рѣшенія этой задачи замѣтимъ, что такъ какъ окружность есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ данной точки, то искомая точка должна находиться на окружности, описанной изъ A радіусомъ m, и на окружности, описанной изъ B радіусомъ n, и внѣ этихъ окружностей она лежать не можетъ. Поэтому опишемъ изъ A окруж-

Чер. 179.



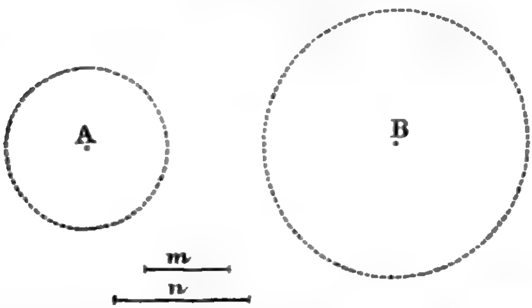
ность радіусомъ m, а изъ B окружность радіусомъ n. Если эти окружности пересѣкутся, какъ это и показано на чер. 179, то мы получимъ двѣ точки C и D, удовлетворяющія условіямъ задачи, т.е. находящіяся отъ A въ разстояніи m, а отъ B въ разстояніи n. Если окружности будутъ касаться (чер. 180), то задача будетъ имѣть только одно рѣшеніе; мы получимъ только одну точку

Чер. 180.



C. Наконецъ, если окружности не будутъ имѣть общихъ точекъ (чер.

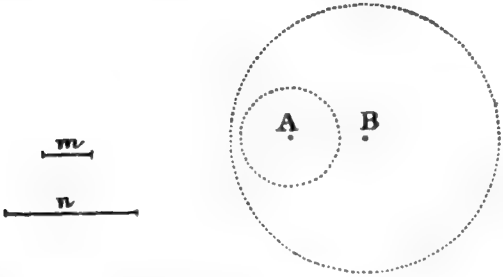
Чер. 181.



181 и 182), то слѣд. такой точки, которая бы удовлетворяла требованіямъ задачи, не существуетъ; иначе говоря—задача невозможна. Зная (§ 123), при какихъ условіяхъ двѣ окружности пересѣкаются, касаются и не имѣютъ общихъ точекъ, заключаемъ, что задача имѣетъ два рѣшенія, когда прямая $AB<n+m$ и $>n-m$; задача имѣ-

етъ одно рѣшеніе, если $AB = n + m$ или $n - m$; наконецъ задача

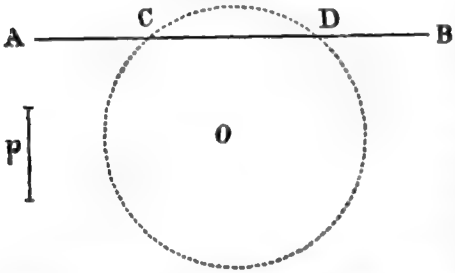
Чер. 182.



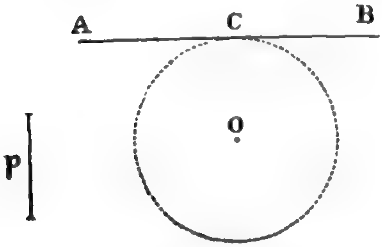
невозможна, когда $AB > n + m$ или $AB < n - m$.

Задача 2. Дана неопредѣленной длины прямая AB (чер. 183) и точка O; найти на AB такую точку, которая бы находилась отъ O въ разстояніи, равномъ данной прямой p? Такъ какъ всѣ точки, находящіяся отъ O въ разстояніи $= p$, лежатъ на окружности, описанной изъ O радіусомъ p, то и опишемъ эту окружность; если она пересѣчется съ прямой AB, что будетъ въ томъ случаѣ, когда разстояніе прямой AB отъ точки O будетъ меньше p, то получатся двѣ точки C и D, удовлетворяющія условіямъ задачи, и слѣд. задача будетъ имѣть два рѣшенія. Если разстояніе AB отъ O равно p, то окружность коснется AB (чер. 184), и задача будетъ имѣть только одно рѣшеніе; наконецъ, если разстояніе AB отъ O больше p, то (чер. 185)

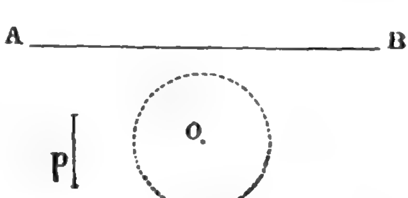
Чер. 183.



Чер. 184.



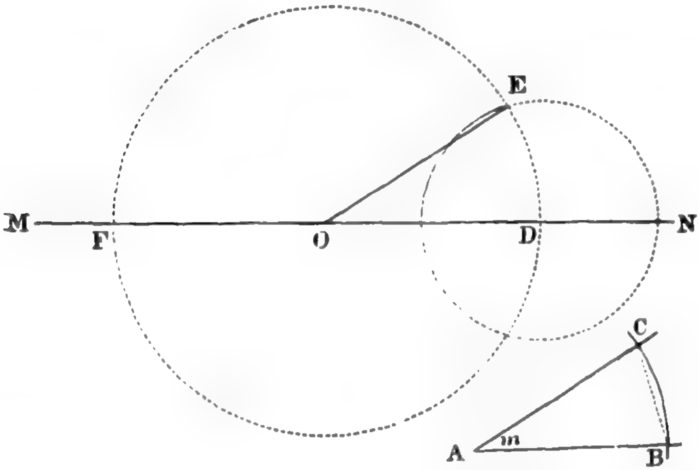
Чер. 185.



окружность съ прямой AB не будетъ имѣть общихъ точекъ—и задача невозможна.

Задача 3. На данной прямой MN (чер. 186) при данной точкѣ O построить уголъ, равный данному уг. m (т. е. построить уголъ, равный m, притомъ такъ, чтобы вершина его была въ точкѣ O, а одна изъ сторонъ совпадала съ прямой MN)? Для рѣшенія задачи

Чер. 186.

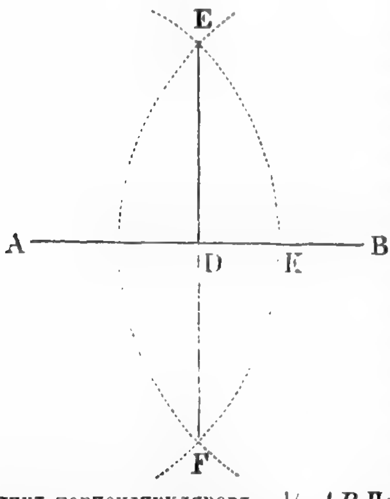


воспользуемся теоремой § 94: если въ двухъ равныхъ окружностяхъ дуги равны, то и соотвѣтствующіе имъ центральные углы равны. Дѣлаемъ данный уг. m центральнымъ, для чего изъ вершины его A произвольнымъ радіусомъ AC описываемъ дугу CB; тѣмъ же радіусомъ описываемъ окружность изъ точки O. Теперь намъ нужно по этой окружности отъ точки D, въ которой окружность пересѣкается съ прямой MN, отложить дугу=дугѣ BC. Это можно сдѣлать, основываясь на теоремѣ § 95: если въ равныхъ окружностяхъ хорды равны, то и соотвѣтствующія имъ дуги равны. Соединивъ точки C и B прямою, получимъ хорду, соотвѣтствующую дугѣ CB; чтобы перенести эту хорду въ окружность O, иначе говоря, чтобы въ окружности O отложить отъ точки D хорду, равную BC, примемъ точку D за центръ и радіусомъ, равнымъ BC, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ окружность O; соединивъ одну изъ точекъ пересѣченія E съ точкой O, получимъ уг. EOD = уг. m, такъ какъ хорда ED=хордѣ CB, а слѣд. и дуга ED=дугѣ CB. Такимъ образомъ уг. EOD удовлетворяетъ условіямъ задачи.

Окружность D непремѣнно пересѣчется съ окружностью O, потому что, какъ сейчасъ докажемъ, разстояніе центровъ этихъ окружностей меньше суммы ихъ радіусовъ, но больше разности радіусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе центровъ OD есть радіусъ окружности O и слѣд. оно, очевидно, меньше суммы радіусовъ обѣихъ окружностей.

Съ другой стороны, хорда BC всегда должна быть меньше діаметра окружности A, который равенъ FD (она будетъ равна этому діаметру только тогда, если уголъ $m=2d$; но въ этомъ случаѣ и задачи о построеніи угла быть не можетъ); стало быть радіусъ окружности D меньше діаметра окружности O; если бы они были равны, то разстояніе центровъ равнялось бы разности радіусовъ$=FD-OD=$ $=OD$;. но радіусъ окружности D меньше FD, слѣд. если назовемъ его черезъ r, то $r-OD<OD$ (ибо съ уменьшеніемъ уменьшаемаго разность дѣлается меньше), или разстояніе центровъ OD всегда больше разности радіусовъ, каковы бы ни были величины прямыхъ CB и AC; поэтому окружности непремѣнно пересѣкутся и слѣд. задача о построеніи угла, равнаго данному, всегда возможна.

Чер. 187.



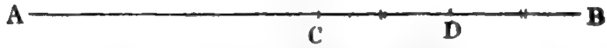
Задача 4. Изъ средины данной прямой AB (чер. 187) возставить къ ней перпендикуляръ? Для построенія перпендикуляра надо знать двѣ его точки; точки же перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой AB, должны находиться въ равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ A и B; эти разстоянія не могутъ быть меньше половины прямой AB, потому что линіи, выражающія эти разстоянія, наклонны къ искомому перпендикуляру; поэтому онѣ должны быть больше перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A и B на искомый перпендикуляръ; а каждый изъ этихъ перпендикуляровъ$=\frac{1}{2}AB$. Поэтому, взявъ на AB какую нибудь часть AK, большую $\frac{1}{2}AB$, изъ точекъ A и B описываемъ дуги радіусами$=AK$. Дуги эти пересѣкутся, ибо прямая AB, равная разстоянію центровъ, очевидно, меньше суммы радіусовъ, такъ какъ каждый радіусъ $>\frac{1}{2}AB$, и больше разности радіусовъ, которая равна нулю, такъ какъ радіусы равны между собою. Точки E и F, въ которыхъ пересѣкаются дуги, лежатъ на перпендикулярѣ, проходящемъ чрезъ средину AB, ибо этотъ перпендикуляръ есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ A и B; поэтому, соединивъ E и F прямою, получимъ перпендикуляръ EF, возставленный къ AB изъ средины ея D.

Рѣшая эту задачу, мы вмѣстѣ съ тѣмъ нашли средину AB и потому рѣшили еще слѣдующую задачу:

Задача 5. Раздѣлить данную прямую линію пополамъ?

Задача 6. Изъ данной точки D прямой AB (чер. 188) возставить къ AB перпендикуляръ? Если отложить отъ D по AB части

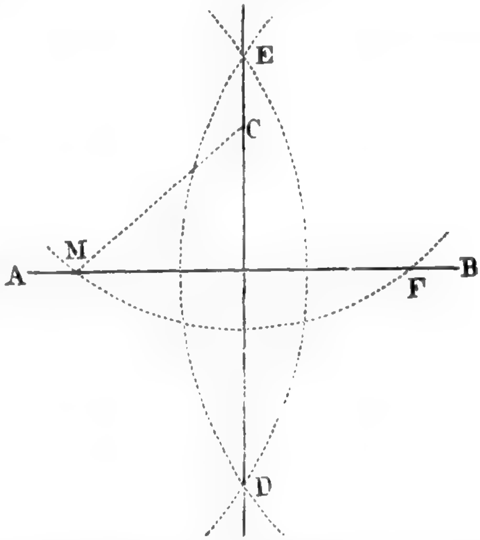
Чер. 188.



$DB = DC$, то точка D будетъ средина прямой CB; а мы уже показали, какъ возставлять перпендикуляръ изъ средины прямой линіи.

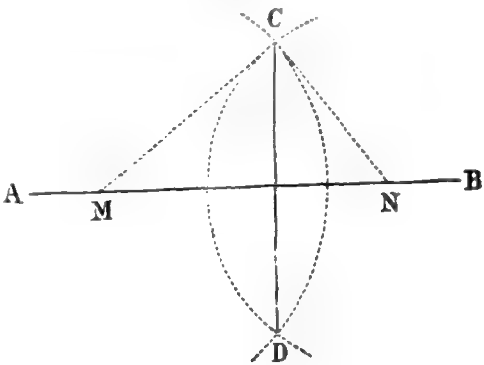
Задача 7. Изъ точки C (черт. 189) на прямую AB опустить перпендикуляръ? Чтобы свести эту задачу на извѣстную уже намъ зад. 4-ю, сдѣлаемъ точку C точкой перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой. Для этого на прямой AB надо найти такія двѣ точки, которыя находились бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ C. Принявъ какую нибудь точку M прямой AB за одну изъ этихъ точекъ, опишемъ изъ C радіусомъ CM дугу: тогда получимъ другую точку F. Для рѣшенія нашей задачи остается изъ средины прямой MF возставить перпендикуляръ, что и исполнено на чертежѣ. Перпендикуляръ ED непремѣнно пройдетъ черезъ точку C, такъ какъ онъ есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равноотстоящихъ отъ M и F.

Черт. 189.



Можно рѣшить эту задачу, основываясь на томъ, что прямая, соединяющая точки пересѣченія двухъ окружностей, перпендикулярна къ линіи центровъ; тогда точка C

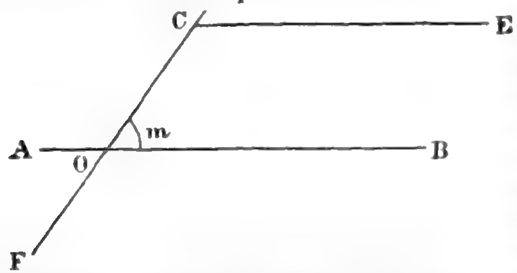
Черт. 190.



(черт. 190) должна быть одной изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей, которыхъ центры лежатъ гдѣ нибудь на прямой AB. Принявъ за эти центры какія нибудь точки M и N прямой AB и описавъ изъ нихъ окружности радіусами MC и NC, опредѣлимъ точку D; соединивъ ее съ C, получимъ $CD \perp AB$. Это рѣшеніе удобнѣе предъидущаго, ибо оно требуетъ проведенія только двухъ, а не трехъ окружностей.

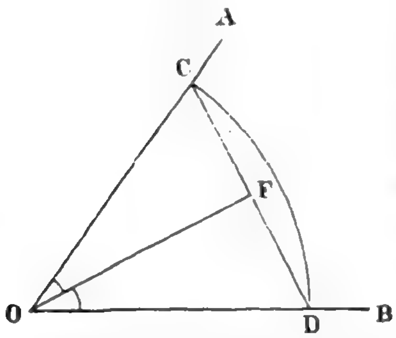
Задача 8. Черезъ точку C (черт. 191) провести прямую, параллельную прямой AB?

Чер. 191.



Задачу эту можно рѣшить на основаніи одного изъ условій параллельности прямыхъ, напр. на основаніи теоремы: двѣ прямыя параллельны между собой, если образуютъ съ сѣкущей равные соотвѣтственные углы. Проведя черезъ C прямую CF такъ, чтобы она пересѣкала AB (для чего надо взять на AB какую нибудь точку O и соединить ее съ C), строимъ при точкѣ C прямой CF уголъ, равный уг. m; сторона CE построеннаго угла и будетъ параллельна AB.

Чер. 192.

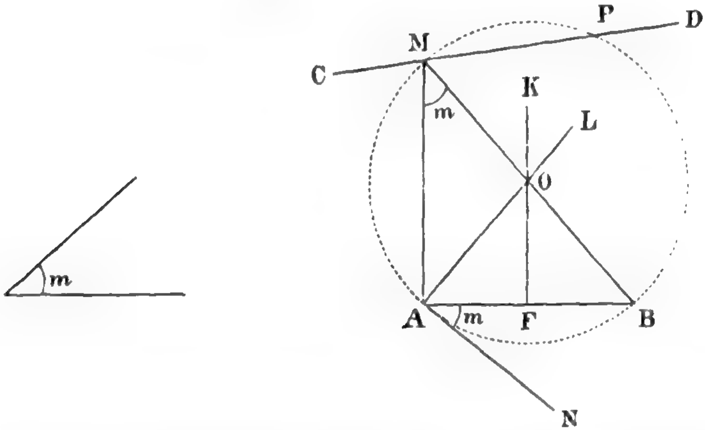


Задача 9. Раздѣлить пополамъ данный уголъ AOB (черт. 192)? Такъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ соотвѣтствующій хордѣ уголъ пополамъ, то дѣлаемъ уг. AOB центральнымъ, описавъ изъ вершины его дугу произвольнымъ радіусомъ OC; затѣмъ проводимъ хорду CD и опускаемъ на нее изъ O перпендикуляръ OF.

Рѣшимъ еще задачу, болѣе сложную, чѣмъ предъидущія.

Задача 10. Дана прямая CD (черт. 193) и двѣ точки A и B; требуется на CD найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ нея къ A и B, составляли между собою уголъ, равный уг. m? Чтобъ найти способъ рѣшенія этой задачи, мы допустимъ, что она рѣшена, т. е. положимъ, что найдена такая точка M, что уг. $AMB = m$; тогда, если мы проведемъ черезъ A, B и M окружность, то всѣ вписанные углы, опирающіеся на дугу AB, будутъ равны уг. m, и точка M будетъ общей точкой окружности O и прямой CD. Итакъ для нахожденія точки M надо умѣть провести окружность O; а для этого надо знать только положеніе ея центра O, ибо радіусомъ ея будетъ прямая, соединяющая O съ данной точкой A. Разсмотримъ же, чѣмъ можетъ быть опредѣлено положеніе центра O. Такъ какъ окружность должна проходить черезъ A и B, то центръ долженъ находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины AB; съ другой стороны, еслибъ мы въ точкѣ A провели къ окружности касательную AN, то уг. NAB равнялся бы уг. AMB, а слѣд. и углу m; но перпендикуляръ, возстав-

Чер. 193.

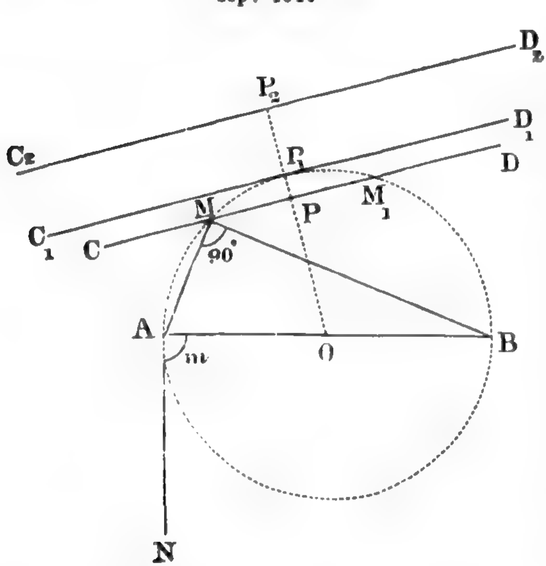


ленный къ касательной въ точкѣ касанія, проходитъ черезъ центръ; слѣд. центръ искомой окружности долженъ находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки A къ прямой AN, составляющей съ AB уголъ$=m$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для рѣшенія задачи нужно соединить A съ B прямой линіей; затѣмъ построить на этой прямой при точкѣ A уголъ $NAB=$данному уг. m; далѣе—изъ средины AB провести $FK \perp AB$; изъ точки A провести $AL \perp AN$; изъ точки пересѣченія O перпендикуляровъ FK и AL радіусомъ OA описать окружность; общія точки M и P этой окружности и прямой CD будутъ искомыя. Дѣйствительно, прямая AN перпендикулярна къ радіусу AO въ его конечной точкѣ A; слѣд. она есть касательная къ окружности, а потому уг. NAB измѣряется $^1/_2$ AB; а если соединимъ точку M съ A и B, то уг. AMB, какъ измѣряющійся $^1/_2$ AB, будетъ равенъ уг. NAB; а этотъ послѣдній уг. по построенію$=$уг. m. Если бы провели линіи AP и BP, то уг. APB также былъ бы равенъ уг. m. Итакъ наша задача имѣетъ два рѣшенія. Она имѣла бы одно рѣшеніе, еслибъ окружность O не пересѣкала прямой CD, а коснулась ея; наконецъ задача была бы невозможна, еслибъ окружность O не имѣла общихъ точекъ съ прямой CD.

Чтобы показать, въ какой зависимости находится число рѣшеній задачи и возможность ея отъ соотношенія, существующаго между величинами, данными въ задачѣ, мы возьмемъ частный случай, именно когда данный уг. m будетъ прямой, т. е. рѣшимъ такую задачу: на прямой CD (чер. 194) найти такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ точками A и B, были перпендикулярны между собою? По предъидущему, для рѣшенія задачи строимъ при точкѣ A прямой уголъ, т. е. проводимъ изъ A прямую $AN \perp AB$; затѣмъ надо провести перпендикуляры къ прямой AB изъ средины ея O и къ прямой AN изъ точки A; этотъ послѣдній перпендикуляръ сольется съ AB и слѣд. центръ искомой окружности будетъ O. Описавъ радіусомъ OA окружность, найдемъ искомыя точки M и M_1; дѣйствительно, если соединимъ M съ A и B, то уг. $AMB = 90^\circ$, какъ имѣющій вершину на окружности и опирающійся на концы діаметра. Задача будетъ имѣть два рѣшенія, если разстояніе OP прямой CD отъ центра O, т. е. отъ средины прямой, выражающей разстояніе между данными точками A и B, будетъ меньше радіуса OA или меньше $^1/_2$ разстоянія AB, такъ какъ при этомъ окружность пересѣчется съ прямой CD.

Чер. 194.



Задача будетъ имѣть одно рѣшеніе, если окружность коснется прямой CD, которая при этомъ займетъ положеніе C_1D_1, т. е. если разстояніе прямой CD отъ O будетъ равно $^1/_2$ AB.

Наконецъ, задача будетъ невозможна, если разстояніе прямой C_2D_2 отъ O будетъ больше $^1/_2$ AB, ибо при такомъ условіи окружность и прямая не будутъ имѣть общихъ точекъ.

127. Прослѣдимъ, что мы дѣлали для рѣшенія нашей послѣдней задачи. Мы предположили задачу рѣшенною, и сдѣлавъ чертежъ отъ руки, старались найти такія линіи, которыя помогли бы намъ отыскать требуемую точку, и которыя вмѣстѣ съ тѣмъ мы могли бы построить на основаніи предыдущихъ теоремъ и задачъ. Такимъ образомъ мы сперва нашли, что искомая нами точка лежитъ на окружности, проходящей через точки A и B (чер. 193); затѣмъ нашли, что эта окружность можетъ быть построена при помощи прямыхъ AB и AN, которыя могутъ быть начерчены на основаніи предыдущихъ задачъ. Это была первая часть рѣшенія задачи, именно разложеніе задачи на составныя части, или *анализъ* задачи.

Когда анализъ привелъ насъ къ способу рѣшенія задачи, мы приступили къ дѣйствительному ея рѣшенію, т. е. къ *построенію*. При этомъ построеніе намъ пришлось дѣлать въ обратномъ порядкѣ, чѣмъ это было въ анализѣ: мы сперва соединили точки A и B прямою, затѣмъ построили прямую AN, составляющую съ AB уголъ=уг. m; возставили перпендикуляры къ AB изъ ея средины и къ AN изъ точки A; изъ точки O пересѣченія этихъ перпендикуляровъ описали окружность радіусомъ OA—и тогда нашли точку, требуемую задачей. При дѣйствительномъ рѣшеніи задачи, всѣ эти построенія должно дѣлать посредствомъ циркуля и линейки.

Послѣ того, какъ построеніе сдѣлано, *нужно доказать*, *что задача рѣшена вѣрно*, т. е. что найденное геометрическое протяженіе удовлетворяетъ требованіямъ задачи. Такъ намъ нужно было доказать что прямыя MA и MB образуютъ уголъ=уг. m.

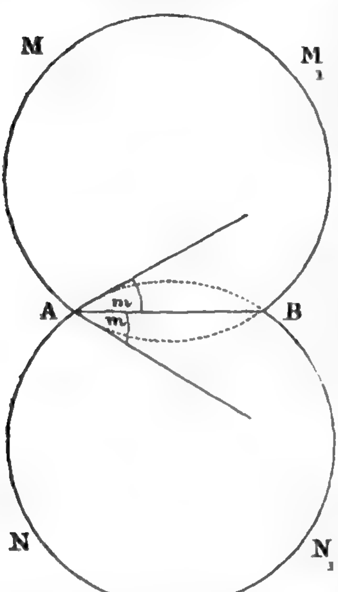
Большей частью требуется не только рѣшить задачу, но и *изслѣдовать* ее, т. е. указать, при какихъ условіяхъ она возможна и сколько она допускаетъ рѣшеній при различныхъ положеніяхъ и величинахъ данныхъ. Для общей задачи мы могли показать только то, что она допускаетъ два, одно или ни одного рѣшенія; условій же для этого не могли найти, а указали ихъ лишь для частнаго случая, когда данный уг. $m=90^{\circ}$. Изъ вышеизложеннаго мы видимъ, что рѣшеніе геометрической задачи состоитъ изъ четырехъ частей: *анализа*, *построенія*, *доказательства* и *изслѣдованія*.

Замѣтимъ, что анализъ задачи не всегда и не всякаго приведетъ къ способу ея рѣшенія; здѣсь многое зависитъ отъ того, какія линіи и точки мы выберемъ для опредѣленія искомыхъ геометрическихъ протяженій, и часто при этомъ случается выбрать такія точки и линіи, которыя по даннымъ задачи не могутъ быть построены.

Нерѣдко задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, т. е. бываетъ *неопредѣленною*; напр. еслибы наша задача была дана въ такой формѣ: найти такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ данными точками A и B (чер. 195), составили уг. $=m$, то каждая точка дуги AMM_1B удовлетворяла бы задачѣ, и эта дуга представляла бы часть геометрическаго мѣста вершинъ угловъ, равныхъ m и стороны которыхъ проходятъ черезъ A и B. Еслибы въ задачѣ требовалось опредѣленіе этого геометр. мѣста, то она была бы вполнѣ опредѣленна, и рѣшеніе представляло бы совокупность двухъ дугъ: одной AMM_1B и другой ANN_1B, совершенно такой же, но расположенной по другую сторону прямой AB, какъ и показано на чертежѣ.

Задачи, которыя могутъ быть сведены къ опредѣленію геометрическихъ мѣстъ точекъ, рѣшаются вообще легче другихъ задачъ.

Чер. 195.



Предлагаемъ нѣсколько задачъ на вычисленіе, на доказательство теоремъ и на построеніе.

128. Задачи на вычисленіе. 1. Радіусъ окружности$=3^1/_2$ дюйм.; опредѣлить разстояніе прямой AB отъ центра этой окружности, полагая, что AB пересѣкаетъ окружность? касается ея? не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью?

2. Дуга CD уложилась въ дугѣ AB пять разъ съ остаткомъ FB; FB въ CD уложилась 2 раза съ остаткомъ GD; GD уложилась въ FB ровно 3 раза. Опредѣлить $AB: CD$; $\frac{CD}{FB}$; $\frac{GD}{AB}$; $AF: CG$?

3 Дуга AB раздѣлена на 16 равныхъ частей и такихъ частей въ дугѣ CD заключается 23. Найти $CD:AB$?

4. На окружности O отъ точки A отложена дуга $AB=4$ дугамъ CD, затѣмъ дуга $BE=3CD$, $EF=2CD$ и наконецъ $FG < CD$. Найти съ возможной точностью отношенія центральныхъ угловъ: AOG къ AOE? BOG: EOF? EOG: AOF? $\frac{EOG}{BOF}$? $\frac{AOG}{AOF}$?

5. Изъ точки A, лежащей на окружности, проведены хорды AB и AC; одна соотвѣтствуетъ дугѣ въ $143°\ 30'$, а другая — дугѣ въ $47°\ 30'$; опредѣлить величину уг. BAC?

6. Вписанный уголъ опирается на дугу, равную 0,15 окружности; опредѣлить этотъ уголъ?

7. Уголъ BAC имѣетъ вершину на окружности и опирается на концы діаметра BC; опредѣлить углы, образуемые хордами AB и AC съ діаметромъ, если точка A дѣлитъ полуокружность на части, относящіяся между собою какъ $3:7$? какъ $5:13$? какъ $0,3:0,42$?

8. Дуга $ABC=0{,}9$ полуокружности; чему равенъ уг. ABC?

9. Хорда дѣлитъ окружность на части, находящіяся въ отношеніи $7:17$; опредѣлить величины вписанныхъ угловъ, опирающихся на эту хорду?

10. Хорды AB и CD образуютъ при пересѣченіи уголъ въ $35°\,^1/_2$; опредѣлить въ градусахъ, минутахъ, секундахъ величины дугъ AD и BC, если отношеніе ихъ$=5$?

11. Хорда AB дѣлитъ окружность въ отношеніи $3:5$; какіе углы образуетъ она съ касательной, проведенной въ точкѣ A или въ точкѣ B?

12. Точка A находится внѣ окружности; изъ A проведены двѣ сѣкущія ABC и ADF; точки D и C соединены хордою DC, уг. $CDF=30^\circ$, дуга $BD=47^\circ$; опредѣлить уг. CAF?

13. Касательная къ окружности пересѣкается съ продолженнымъ діаметромъ подъ угл. $57^\circ\ 27'$; опредѣлить дуги, заключенныя между точкой касанія и концами діаметра?

14. Изъ точки, лежащей внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія; онѣ образуютъ уголъ въ $26^\circ\ 10'$ и отсѣкаютъ отъ окружности дуги въ $87^\circ 16'$ и $95^\circ 12'$; опредѣлить дуги, заключенныя между сторонами угла?

15. Опредѣлить уголъ, образуемый двумя касательными, если дуга, заключающаяся между точками прикосновенія, равна $128^\circ\ 28'$?

16. Окружность раздѣлена на 3 части, относящіяся между собой какъ $3:4:5$, и черезъ точки дѣленія проведены касательныя; опредѣлить величины угловъ, образуемыхъ касательными?

17. Изъ точки M, лежащей внѣ окружности, проведены двѣ прямыя линіи, составляющія уг. въ $22^\circ\ 30'$; одна пересѣкаетъ окружность въ точкахъ A и B; другая—въ точкахъ C и D; точки A и C ближе къ M, чѣмъ точки B и D. Опредѣлить дуги BD и AC, если уголъ, образуемый хордами AD и BC, равенъ $33^\circ\ {}^1/_2$?

18. Между какими цѣлыми числами заключается величина разстоянія между центрами двухъ пересѣкающихся окружностей, если радіусъ одной равенъ $8^1/_3$, а радіусъ другой$=7^1/_2$?

19. Двѣ окружности касаются одна другой; радіусъ одной$=5$; опредѣлить радіусъ другой, если разстояніе центровъ$=10$? 8? 3?

20. Двѣ окружности касаются; разстояніе центровъ выражается числомъ 38,25; отношеніе радіусовъ $=0,35$; опредѣлить радіусы?

21. Опредѣлить взаимное положеніе двухъ окружностей, которыхъ радіусы равны $18^3/_4$ и $3^5/_{12}$, если разстояніе центровъ$=22^1/_6$? $15^1/_3$? $30^1/_7$? 12,58333...? 17,5?

22. Даны три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой; разстояніе между A и B равно 14, между B и C равно 12, между C и A равно 10 дюйм. Какими радіусами надо описать окружности изъ каждой точки, чтобы каждая окружность касалась остальныхъ?

23. Три окружности проведены такъ, что каждая изъ нихъ касается двухъ остальныхъ извнѣ; радіусы ихъ 8; 5 и 4 дюйм. Опредѣлить разстоянія между ихъ центрами?

129. Задачи на доказательство теоремъ. Доказать слѣдующія теоремы:

1. Наибольшее разстояніе внѣшней точки отъ окружности есть длина всей сѣкущей, проведенной изъ этой точки черезъ центръ, а кратчайшее разстояніе—есть внѣшній отрѣзокъ той же сѣкущей.

2. Кратчайшее разстояніе внутренней точки отъ окружности есть меньшій отрѣзокъ діаметра, проведеннаго черезъ эту точку; а наибольшее разстояніе—большій отрѣзокъ того же діаметра.

3. Кратчайшее разстояніе между двумя окружностями есть часть линіи центровъ, заключенная между ближайшими частями окружностей; а наибольшее разстояніе — часть линіи центровъ, заключенная между наиболѣе отдаленными частями окружностей.

4. Касательныя, проведенныя къ концамъ діаметра, параллельны между собою.

5. Если двѣ концентрическія окружности пересѣчены прямой линіей, то отрѣзки этой линіи, заключенныя между окружностями, равны между собою.

6. Изъ всѣхъ хордъ, проходящихъ через данную внутри окружности точку, кратчайшая есть та, которая въ этой точкѣ дѣлится пополамъ.

7. Если въ конечныя точки одной изъ двухъ параллельныхъ хордъ провести радіусы, то отрѣзки другой хорды, заключенныя между ея конечными точками и точками пересѣченія ея съ радіусами, будутъ равны между собою.

8. Изъ всѣхъ перпендикуляровъ, которые можно опустить изъ точекъ данной окружности на прямую, лежащую внѣ ея, тотъ будетъ наибольшимъ, который проходитъ через центръ, и тотъ будетъ наименьшимъ, котораго продолженіе проходитъ черезъ центръ.

9. Если съ концами A и B дуги соединить точку C, находящуюся съ дугой по одну сторону соотвѣтствующей хорды, то уг. ACB будетъ больше или меньше угла, котораго вершина на дугѣ, а стороны опираются на AB, смотря по тому, находится ли точка C внутри окружности или внѣ ея.

10. Окружность, описанная на прямой AB, какъ на діаметрѣ, есть геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, стороны которыхъ проходятъ черезъ конечныя точки прямой AB.

11 Если изъ концовъ діаметра проведемъ параллельныя между собой хорды, то эти хорды равны и ихъ другія двѣ конечныя точки лежатъ на одной прямой линіи съ центромъ.

12. Если прямую, дѣлящую вписанный уголъ пополамъ, продолжить до встрѣчи съ окружностью, и черезъ полученную точку провести хорду параллельно одной изъ сторонъ угла, то эта хорда будетъ равна другой сторонѣ

13. Если изъ точки, лежащей внѣ окружности, провести къ окружности касательныя, то 1) эти касательныя равны между собою; 2) линія, соединяющая внѣшнюю точку съ центромъ, дѣлитъ уголъ, образуемый касательными, пополамъ; 3) эта линія дѣлитъ также пополамъ уголъ между радіусами, проведенными въ точки прикосновенія; 4) эта линія перпендикулярна къ хордѣ, соединяющей точки прикосновенія.

14. Если на хордѣ при одномъ изъ ея концовъ построить въ сторону, обращенную къ центру, уголъ, равный углу, вписанному въ дугу *, соотвѣтствующую хордѣ, то другая сторона этого угла будетъ касательной къ окружности.

15. Если къ окружности провести двѣ, пересѣкающія между собою, касательныя, потомъ точки прикосновенія соединить хордой, а въ одну изъ точекъ прикосновенія провести радіусъ, то уголъ между хордою и радіусомъ будетъ равенъ половинѣ угла между касательными.

16. Если къ кругу проведены двѣ касательныя и между ними (т.

---

* *Примѣч.* Уголъ, котораго вершина находится на дугѣ, а стороны проходятъ черезъ конечныя точки ея, наз. *вписаннымъ въ дугу*.

е. между точкою пересѣченія ихъ и точками прикосновенія) провести еще третью, а точки пересѣченія ея съ двумя первыми соединить съ центромъ, то полученный такимъ образомъ центральный уголъ будетъ вдвое меньше центральнаго угла, составленнаго радіусами, проведенными въ точки прикосновенія двухъ первыхъ касательныхъ.

17. Двѣ равныя окружности при пересѣченіи отсѣкаютъ другъ отъ друга равныя части.

18. Двѣ неравныя окружности при пересѣченіи отсѣкаютъ другъ отъ друга двѣ неравныя дуги, и дугѣ меньшей окружности соотвѣтствуетъ большій центральный уголъ.

19. Двѣ окружности не могутъ пересѣкаться такъ, чтобы отсѣкаемыя при этомъ отъ нихъ дуги были по 180°.

20. Если изъ средины общей хорды двухъ равныхъ пересѣкающихся окружностей описать новую окружность радіусомъ, равнымъ половинѣ этой хорды, то каждая прямая, проходящая черезъ одну изъ точекъ пересѣченія данныхъ окружностей и ограниченная ими, раздѣлится новой окружностью пополамъ?

21. Четыре дуги двухъ равныхъ пересѣкающихся окружностей, заключенныя между линіей центровъ и параллельной ей сѣкущей обѣихъ окружностей, равны между собою.

22. Каждая прямая, проходящая черезъ точку касанія двухъ окружностей, отсѣкаетъ отъ нихъ дуги, которымъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы.

23. Конечныя точки двухъ параллельныхъ діаметровъ въ двухъ, извнѣ касающихся, окружностяхъ лежатъ на одной прямой съ точкой касанія.

24. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей провести двѣ прямыя линіи и соединить точки пересѣченія ихъ съ каждой окружностью, то полученныя прямыя линіи будутъ параллельны.

25. Если двѣ окружности касаются другъ друга изнутри, и притомъ діаметръ одной окружности равенъ радіусу другой, то меньшая окружность дѣлитъ пополамъ каждую хорду большей, проходящую черезъ точку касанія.

26. Геометрическое мѣсто срединъ хордъ, сходящихся въ одной точкѣ P на окружности C, есть окружность, имѣющая діаметромъ радіусъ данной окружности, проведенный въ точку P.

130. Задачи на построеніе. 1. Описать радіусомъ, равнымъ данной прямой линіи, окружность, касательную къ данной окружности въ данной ея точкѣ M?

2. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей радіуса r, касательныхъ къ окружности радіуса r_1?

3. Описать радіусомъ r окружность, касательную къ данной окружности C, притомъ такъ, чтобы центръ ея находился на данной прямой MN? на данной окружности C_1?

4. На окружности C найти точку, которая находилась бы отъ данной точки M въ разстояніи d? Изслѣдовать задачу?

5. Дана окружность и на ней точка M; провести изъ M хорду, равную прямой b?

6. Данную прямую раздѣлить на 4, 8, 16.... вообще на 2^n равныхъ частей?

7. Найти центръ данной дуги или окружности?

8. Дана окружность и на ней точка P; провести въ этой окружности діаметръ такъ, чтобы онъ находился отъ точки P въ разстояніи a?

9. На прямой AB или на окружности C найти точку, равноотстоящую отъ данныхъ точекъ M и N?

10. Провести окружность черезъ точки A и B такъ, чтобы центръ ея находился на данной прямой MN или на окружности C?

11. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ точку M и касалась окружности C въ точкѣ N?

12. Черезъ точку M, лежащую внутри окружности, провести хорду, которая въ этой точкѣ дѣлилась бы пополамъ?

13. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, касательную къ прямой AB въ точкѣ C?

14. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ къ данной прямой въ данной на ней точкѣ?

15. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ точку M и касалась прямой AB въ точкѣ N?

16. Въ точкѣ, данной на окружности, провести къ окружности касательную?

17. Изъ конца A прямой AB, не продолжая ея, возставить къ ней перпендикуляръ?

18. На прямой AB найти такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ C и D, лежащихъ по одну сторону прямой AB, была наименьшею?

19. На прямой AB найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя въ эту точку изъ точекъ C и D, лежащихъ по одну сторону AB, составляли съ AB равные углы?

20. Построить уголъ: 1) равный суммѣ нѣсколькихъ данныхъ угловъ? 2) равный разности двухъ данныхъ угловъ? 3) равный данному углу, взятому нѣсколько разъ?

21. Черезъ точку M провести прямую, которая съ данной прямой AB составила бы уголъ, равный данному уг. m?

22. Описать окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки A и B и пересѣкающую данную окружность C такъ, чтобы хорда пересѣченія была параллельна данной прямой MN?

23. Провести къ окружности касательную такъ, чтобы она была параллельна данной прямой? перпендикулярна къ данной прямой? Изслѣдовать задачу?

24. Провести къ окружности касательную такъ, чтобы она съ данной прямой MN составляла уголъ, равный уг. m?

25. Въ окружности O провести хорду, которая была бы равна данной прямой a, притомъ была бы параллельна данной прямой AB? была бы перпендикулярна къ AB? составляла съ AB уголъ $= m$?

26. Черезъ точку P, находящуюся внутри окружности O, провести хорду такъ, чтобы она составляла наименьшій уголъ съ касательной, проведенной въ ея конечной точкѣ?

27. Къ дугѣ AB въ данной на ней точкѣ M провести касательную, не отыскивая центра дуги?

28. Данный уголъ m раздѣлить на 4, 8, 16..., вообще на 2^n равныхъ частей?

29. На прямой AB найти точку, равноотстоящую отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ MN и PQ?

30. Найти съ точностью до $^1/_3$ отношеніе между дугами AB и CD окружности O?

31. Черезъ точку M провести прямую, составляющую съ сторонами уг. BAC равные углы?

32. Описать окружность, касательную къ двумъ прямымъ AB и CD, такъ чтобы центръ ея находился на прямой MN?

33. Описать окружность такъ, чтобы она касалась прямой AB и прямой CD въ точкѣ M?

34. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ къ двумъ даннымъ прямымъ?

35. Описать окружность, касательную къ тремъ даннымъ прямымъ?

36. Описать окружность такъ, чтобы она касалась данной окружности C въ точкѣ M и касалась прямой AB?

37. Описать окружность такъ, чтобы она касалась окружности C и прямой AB въ точкѣ M?

38. На данной прямой AB описать дугу, вмѣщающую данный уг. m (т. е. описать такую дугу, чтобы всѣ углы, имѣющіе вершину на этой дугѣ и опирающіеся на AB, равнялись уг. m)?

39. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ прямая AB видна подъ однимъ и тѣмъ же угломъ m?

40. Найти точку, изъ которой прямыя AB и CD видимы подъ однимъ и тѣмъ же угломъ m?

41. Черезъ точку P, данную на окружности C, провести хорду такъ, чтобы она находилась отъ центра на разстояніи, равномъ данной линіи a?

42. Черезъ точку P, данную на окружности C, провести хорду, вдвое бо́льшую своего разстоянія отъ центра?

43. Черезъ точку A, находящуюся внѣ окружности C, провести къ окружности касательную?

44. Изъ точки A провести къ окружности C сѣкущую такъ, чтобы часть сѣкущей внутри окружности равнялась данной прямой a?

45. Изъ точки A провести къ окружности C сѣкущую такъ, чтобы она отсѣкла дугу, вмѣщающую данный уг. m?

46. Найти геометрическое мѣсто точекъ такого свойства, чтобы касательныя, проведенныя изъ нихъ къ окружности C, имѣли одинакую длину a?

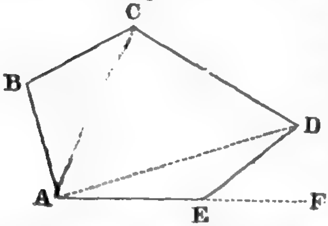
47. На прямой MN найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ данной окружности C, равнялись данной прямой a?

ГЛАВА VI.

Фигуры.

131. Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями, наз. *фигурой*. Если (чер. 196) всѣ линіи, ограничивающія фигуру, прямыя, то фигура наз. *прямолинейною*; если онѣ кривыя, *то криволинейною*; если въ числѣ ихъ находятся тѣ и другія—*смѣшанною*. Кругъ представляетъ криволинейную фигуру; секторъ—смѣшанную.

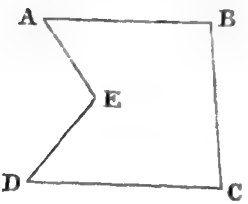
Чер. 196.



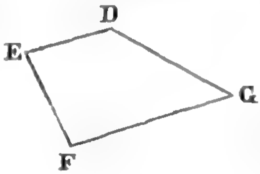
132. Многоугольникъ. Прямолинейныя фигуры (чер. 196) иначе наз. *многоугольниками*. Прямыя AB, BC, CD... (чер. 196), ограничивающія многоугольникъ, наз. его *сторонами*; а сумма всѣхъ сторонъ наз. *периметромъ* многоугольника. Уголъ ABC, образуемый двумя послѣдовательными сторонами, наз. *внутреннимъ угломъ многоугольника*; уголъ DEF, образуемый стороною DE многоугольника и продолженіемъ EF смежной стороны, наз. *внѣшнимъ угломъ многоугольника*; вершины угловъ наз. *вершинами многоугольника*; прямая AD, соединяющая двѣ не смежныя вершины, наз. *діагональю*.

Многоугольникъ можетъ имѣть входящіе углы, какъ напр. уголъ AED (чер. 197). Очевидно, что каждый многоугольникъ имѣетъ столько угловъ, сколько въ немъ сторонъ. Многоугольники получаютъ свое названіе по числу угловъ, а слѣд. и по числу сторонъ. Такъ многоугольникъ $DEFG$ (чер.198), имѣющій 4 стороны, наз. *четыреугольникомъ*; многоугольникъ $KLMNOP$ (чер. 199), имѣющій 6 сторонъ—

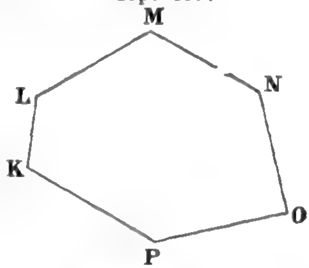
Чер. 197.



Чер. 198.

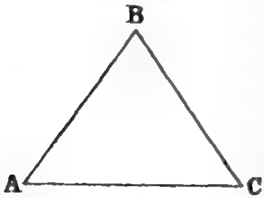


Чер. 199.



шестиугольникомъ. Многоугольники, не имѣющіе входящихъ угловъ, наз. *выпуклыми*.

Чер. 200.



Для полнаго ограниченія плоскости необходимо не меньше трехъ прямыхъ; поэтому простѣйшій изъ многоугольниковъ есть *треугольникъ*, напр. ABC (чер. 200). Слово треугольникъ изображаютъ знакомъ Δ, который ставятъ передъ буквами, означающими его вершины, напр. $\Delta\ ABC$.

Треугольникъ.

133. Въ каждомъ треугольникѣ находятся три угла, три стороны и наконецъ площадь треугольника. Стороны и углы треугольника наз. *частями* его.

134. Свойство сторонъ треугольника. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двухъ остальныхъ и больше ихъ разности.*** Дѣйствительно, сторона AB (чер. 200) треугольника ABC представляетъ прямую линію между точками A и B, а остальныя двѣ стороны AC и BC составляютъ ломаную BCA, имѣющую тѣ же конечныя точки; слѣд.

$$AB < AC + BC.$$

Тоже самое можно сказать и о каждой другой сторонѣ; поэтому

$$AB + BC > AC.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей этого послѣдняго неравенства по BC, получимъ $AB > AC - BC$.

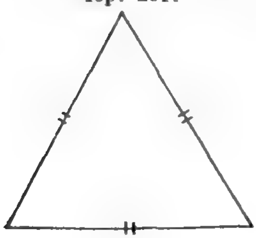
Эта теорема даетъ возможность по двумъ даннымъ сторонамъ треугольника найти наибольшій и наименьшій предѣлы для третьей стороны. Напр. если двѣ стороны треугольника равны 7 и 5 дюйм., то третья сторона должна быть меньше 12 и больше 2 дюйм., т. е. она можетъ быть быть выражена цѣлыми числами 3, 4.... 11 дюйм. и безконечнымъ рядомъ дробей, бóльшихъ 2 и меньшихъ 12 дюйм.

135. Стороны въ треугольникѣ могутъ быть:

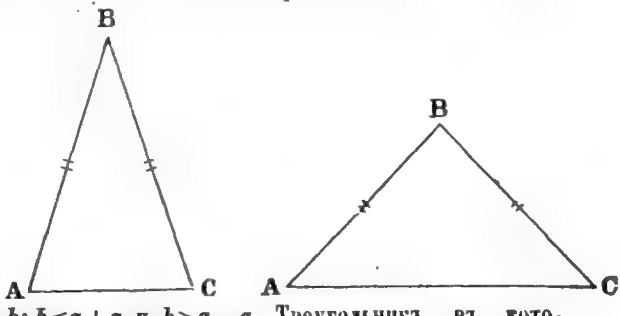
1) Всѣ равны между собою, потому что тогда каждая сторона, очевидно, меньше суммы двухъ остальныхъ и больше разности ихъ, равной нулю. Треугольникъ (чер. 201), у котораго всѣ стороны равны, наз. *равностороннимъ*.

2) Двѣ стороны равны между собою, но третья не равна имъ, потому что если эта третья сторона меньше суммы двухъ прочихъ сторонъ, равныхъ между собою, то выведенное нами условіе для каждой стороны треугольника будетъ удовлетворено. Дѣйствительно, если стороны треуг. будутъ a, a и b, притомъ $b<2a$,

Чер. 201.



Чер. 202.



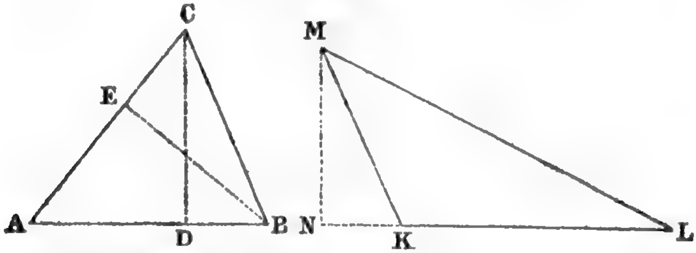
то $a<a+b$ и $a>a-b$; $b<a+a$ и $b>a-a$. Треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собою, наз. *равнобедреннымъ*; таковы напр. тр-ки ABC на чер. 202-мъ, въ которыхъ $AB=BC$.

3) Всѣ три стороны различны. Такой треугольникъ (чер. 203) наз. *разносторонним*.

Въ каждомъ треуг. одна изъ сторонъ принимается за *основаніе*; перпендикуляръ, опущенный на основаніе изъ противоположной ему вершины, наз. *высотою* треуг., а самая вершина — *вершиною* треуг. Такъ если въ треугольн. ABC (чер. 204) принять за основаніе AB, то вершина треуг. будетъ C, а высота будетъ CD; если же примемъ за основаніе AC, то высотой будетъ BE. Если въ треуг. KLM принять за основаніе KL, то высота будетъ MN.

Чер 203.

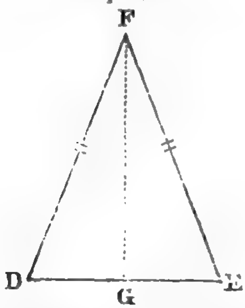
Чер. 204.



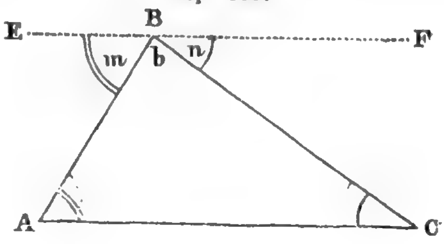
Въ равнобедренномъ треуг. за основаніе принимается сторона, неравная съ остальными двумя; такъ въ треугол. DEF (чер. 205) основаніе будетъ DE, а высота FG.

136. Свойства угловъ треугольника. Теорема 1-я. *Сумма внутреннихъ угловъ треугол. равна двумъ прямымъ или 180°.* Для доказательства проведемъ черезъ вершину B (чер. 206) прямую

Чер. 205.



Чер. 206.



$EF{=}AC$ тогда уг. $m{=}$уг. A и уг. $n{=}C$ какъ внутренніе перекрестные; но $m{+}b{+}n{=}2d$, слѣд. и $A{+}b{+}C{=}2d$. Итакъ хотя углы треуг. могутъ имѣть весьма различныя величины, но сумма ихъ есть величина постоянная.

Эта теорема даетъ возможность по двумъ угламъ треуг. опредѣлять третій: такъ напр. если одинъ уголъ$=38°$, другой$=56°$, то третій$=180°-(38°+56°)=180°-94°=86°$. Давая двумъ угламъ треуг. произвольныя значенія, слѣдуетъ наблюдать, чтобы сумма ихъ была менѣе $180°$.

Слѣдствія. 1. *Если два треугольника имѣютъ по два равныхъ угла, то и третьи углы равны*, какъ дополненія до двухъ прямыхъ угловъ; напр. если въ одномъ треуг. будутъ углы въ $36°$ и $48°$ и въ другомъ углы такой же величины, то третій уг. въ томъ и другомъ треуг. будетъ равенъ $96°$.

2. *Треугольникъ не можетъ имѣть болѣе одного прямаго или одного тупаго угла*; въ противномъ случаѣ сумма угловъ треуг. была бы$>2\,d$.

Треугольникъ, въ которомъ одинъ уголъ прямой, наз. *прямоугольнымъ*; сторона, лежащая противъ прямаго угла, наз. *гипотенузой*; стороны, образующія прямой уголъ, наз. *катетами*. Въ прямоугольномъ треуг. ABC (чер. 207), въ которомъ уг. $A=90°$, сторона BC есть гипотенуза, а AB и AC—катеты.

Въ прямоуг. треуг. сумма острыхъ угловъ равна 90°.

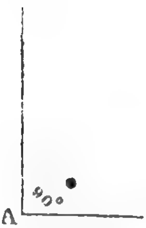
Треугольникъ (чер. 208), имѣющій тупой уголъ, наз. *тупоугольнымъ*. Въ тупоуг. треуг. сумма острыхъ угловъ меньше $90°$.

Треугольникъ, въ которомъ всѣ углы острые, наз. *остроугольнымъ*.

Остроугольный и тупоугольный треугольники наз. вообще *косоугольными*.

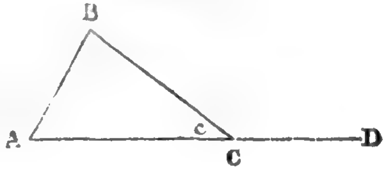
Теорема 2-я. *Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ.* Дѣйствительно (чер. 209),

Чер. 207



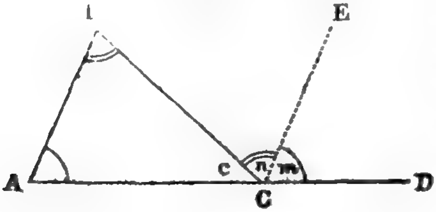
Чер. 208.

Чер. 209.



уг. $BCD=2d-c$ и уг. $A+$уг. $B=2d-c$; слѣд. $BCD=A+B$.

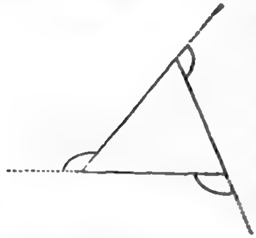
Чер. 210.



Вотъ еще другое доказательство: проведя $CE\parallel AB$ (чер. 210), разобьемъ внѣшній уг. BCD на два угла m и n; но $m=A$ какъ соотвѣтственные, а $n=B$ какъ перекрестные, слѣд. $BCD=m+n=A+B$.

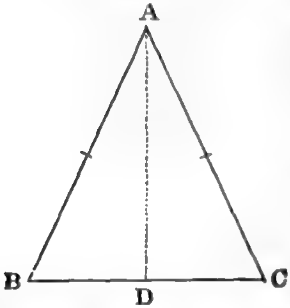
Теорема 3-я. *Сумма внѣшнихъ угловъ треугольника, происшедшихъ отъ продолженія всѣхъ сторонъ треуг. по одному направленію* (чер. 211), *равна четыремъ прямымъ угламъ.* Дѣйствительно, каждый внѣшній уголъ со смежнымъ ему внутреннимъ составляетъ $2d$; слѣд. сумма всѣхъ угловъ, внутреннихъ и внѣшнихъ, равна $6d$; а какъ сумма внутр. угловъ$=2d$, то слѣд. сумма внѣшнихъ$=4d$.

Чер. 211.



137. Соотношенія между сторонами и углами треугольника. Теорема 1-я. *Въ треугольникѣ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы.* Положимъ (чер. 212), что $AB=AC$; тогда основаніе D перпендикуляра AD, опущеннаго изъ точки A на BC, должно раздѣлить линію BC пополамъ, потому что наклонныя AB и AC равны и слѣд. должны быть равноудалены отъ основанія перпендикуляра; а равноудаленныя наклонныя (§ 49 — 2) составляютъ равные углы съ прямой BC, къ которой онѣ наклонны; слѣд. уг. $B=$уг. C.

Чер.212.



Доказанная теорема можетъ быть выражена еще въ слѣдующей формѣ: *въ равнобедренномъ треуг. углы при основаніи равны.* Поэтому въ равнобедр. треуг. достаточно знать одинъ уголъ для того, чтобы опредѣлить два остальныхъ. Такъ напр. если одинъ изъ угловъ при основаніи равнобедр. треуг.$=40^0$, то и другой уг. при основаніи$=40^0$; а слѣд. уголъ при вершинѣ$=180^0-80^0=100^0$. Если уг. при вершинѣ$=20^0$, то сумма угл. при основаніи$=160^0$, а каждый изъ нихъ$=80^0$.

Слѣдствія. 1. *Въ равностороннемъ треуг. всѣ углы равны между собою и потому каждый заключаетъ въ себѣ* 60^0.

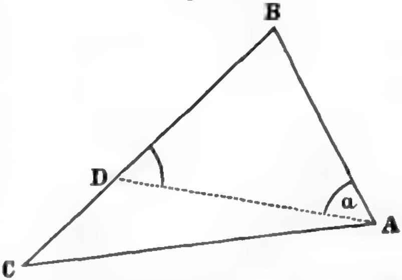
2. Изъ самаго доказательства теоремы слѣдуетъ, что *въ равнобедр. треуг. высота дѣлитъ основаніе и уголъ при вершинѣ пополамъ*

3. *Въ равнобедренномъ прямоуг. треуг. каждый острый уголъ равенъ* 45^0.

На основаніи того, что черезъ данную точку къ данной прямой можно провести только одинъ перпендикуляръ, легко доказать справедливость обратныхъ теоремъ: *Перпендикуляръ, возставленный изъ средины основанія равнобедреннаго треуг., проходитъ чрезъ его вершину и дѣлитъ пополамъ уголъ при вершинѣ; прямая, дѣлящая пополамъ уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треуг., перпендикулярна къ основанію и дѣлитъ основаніе пополамъ.*

Теорема 2-я. *Противъ большей стороны треугольника лежитъ и бо́льшій уголъ.* Пусть въ треуг. ABC (чер. 213) сторона $BC>BA$; докажемъ, что уг. $A>$ уг. C. Для этого отложимъ на сторонѣ BC сторону BA отъ точки B; тогда точка A стороны BA упадетъ между B и C, такъ какъ по условію $BC>BA$. Соединивъ полученную такимъ образомъ точку D съ точкою A прямою DA, мы отъ угла A отдѣлимъ часть a и получимъ равнобедренный треуг. ABD, въ которомъ по доказанному уг. $a=$ уг. D. Уг. D, какъ внѣшній для треуг. CDA, равенъ суммѣ угл. $C+CAD$, слѣд. уг. $D>$ уг. C, а потому и уг. $a>$ уг. C; стало быть уг. A и подавно больше уг. C.

Чер. 213.



Теорема 3-я, обратная 1-й. *Противъ равныхъ угловъ въ треугольникѣ лежатъ равныя стороны.* Если въ треуг. ABC (чер. 214) уг. $B=$ уг. C, то сторона AB не можетъ быть больше AC, потому что тогда и уг. C по предыдущей теоремѣ долженъ быть больше уг. B. Сторона AB не можетъ быть и меньше AC, потому что тогда и уг. C долженъ быть меньше уг. B; слѣд. $AB=AC$.

Чер. 214.

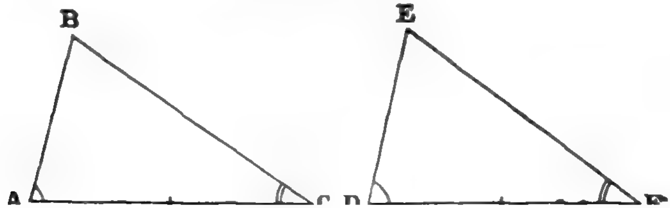
Теорема 4-я, обратная 2-й. *Въ треугольникѣ противъ бо́льшаго угла лежитъ и бо́льшая сторона.* Теорема, подобно предыдущей, доказывается способомъ приведенія къ нелѣпости.

Слѣдствіе. *Въ прямоугольномъ треуг. гипотенуза есть наибольшая изъ сторонъ.*

138. Равенство треугольниковъ. *Двѣ фигуры наз. равными, если при наложеніи онѣ могутъ быть совмѣщены всѣми своими точками.*

Теорема 1-я. *Два треугольника равны, если сторона и два, прилежащіе къ ней, угла въ одномъ треугольникѣ равны соотвѣтственно сторонѣ и двумъ, прилежащимъ къ ней, угламъ въ другомъ треугольникѣ.* Положимъ, что въ треуг. ABC и DEF (чер. 215),

Чер. 215.



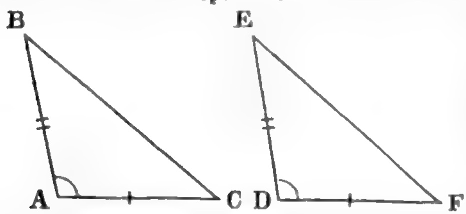
сторона $AC = DF$, уг. $A =$ уг. D и уг. $C =$ уг. F. Вообразимъ, что треугол. DEF наложенъ на треуг. ABC такъ, что точка D упала въ A и сторона DF пошла по AC; по равенству этихъ сторонъ и точка F упадетъ въ C. По равенству угловъ D и A сторона DE пойдетъ по AB и слѣд. вершина E упадетъ гдѣ нибудь на сторонѣ AB или на ея продолженіи. По равенству угловъ F и C, сторона FE пойдетъ по CB и вершина E должна упасть на сторонѣ CB или на ея продолженіи. Вершина E такимъ образомъ должна находиться заразъ на двухъ линіяхъ AB и CB; слѣд. она совпадетъ съ точкою пересѣченія этихъ линій, т. е. съ вершиною B. Итакъ стороны треуг. DEF совмѣстились съ сторонами ABC; углы также совмѣстились, слѣд. треугольники равны.

Слѣдствія. 1. Углы B и E, лежащіе противъ равныхъ сторонъ AC и DF, совмѣстились; стороны AB и DE, лежащія противъ равныхъ угловъ C и F, также совмѣстились. Отсюда заключаемъ, что *въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы, и противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны.*

2. *Треугольники равны, если они имѣютъ по одной равной сторонѣ и по два равныхъ угла*, ибо тогда и третьи углы равны (§ 136 теор. 1, слѣд. 1), слѣд. треугольники будутъ имѣть по одной равной сторонѣ и по два равныхъ угла, на ней лежащихъ.

Теорема 2-я. *Два треугольника равны, если двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный, въ одномъ треуг. равны двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ треуг.* Пусть въ треуг. ABC и DEF (чер. 216) сторона $AC = DF$, $AB = DE$ и уг. $A =$ уг. D; требуется доказать, что треугольникъ $ABC =$ треуг. DEF. Для этого представимъ себѣ, что треуг. DEF наложенъ на треуг. ABC такъ, что вершина D упала въ вершину A и сторона DF пошла по AC. Тогда по равенству сторонъ AC и DF точка F упадетъ въ C; по равенству угловъ A и D сторона DE пойдетъ по сторонѣ AB и по равенству этихъ сторонъ вершина E совпадетъ съ B. Вслѣдствіе того, что конечныя точки E и F стороны EF совпали съ конечными точками стороны BC, и сторона EF совмѣстится со стороною BC. Всѣ стороны и вершины треуг. DEF совпали съ соотвѣтствующими сторонами и вершинами треуг. ABC; слѣд. треуг. равны.

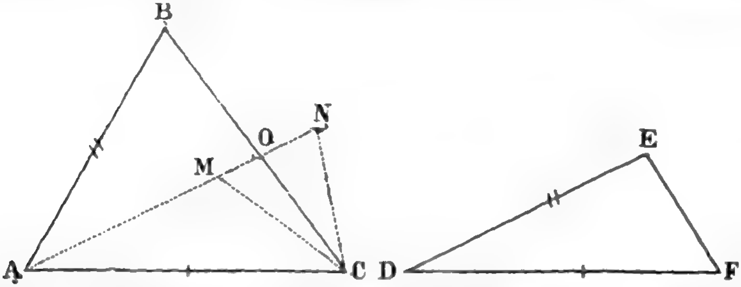
Чер. 216.



Теорема 3-я. *Если двѣ стороны одного треуг. равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а углы, заключенные между равными сторонами, не равны, то противъ бо́льшаго угла лежитъ и бо́льшая сторона.*

Пусть въ треуг. ABC и DEF (чер. 217) сторона $AC = DF$, $AB = DE$, а уг. $A >$ уг. D. Докажемъ, что $BC > EF$. Наложимъ

Чер. 217.



треуг. DEF на треуг. ABC такъ, чтобы точка D упала въ вершину A и сторона DF пошла по сторонѣ AC. Тогда, по равенству этихъ сторонъ, точка F упадетъ въ C. Вслѣдствіе же того, что уг. $D <$ уг. A, сторона DE пойдетъ внутри угла A, и точка E можетъ упасть или внутри треуг. ABC, напр. въ точку M, или на сторону его—въ точку O, или внѣ его—въ точку N. Сообразно съ этимъ, треуг. DEF можетъ имѣть три различныя положенія: треуг. AMC, AOC и ANC. Докажемъ, что во всѣхъ этихъ случаяхъ $BC > EF$.

Въ первомъ случаѣ $AB + BC$ будетъ внѣшней ломаной, а $AM + MC$ внутренней, и мы будемъ имѣть:

$$AB + BC > AM + MC,$$

гдѣ $AB = AM$, такъ какъ по условію $AB = DE$, а $DE = AM$. Отнявъ отъ обѣихъ частей предъидущаго неравенства по ровну, именно отъ первой AB, а отъ второй AM, получимъ:

$BC > MC$, или, такъ какъ MC есть EF, то

$BC > EF$, что и требовалось доказать.

Во второмъ случаѣ очевидно, что $BC > OC$, которая въ этомъ случаѣ равна EF.

Въ третьемъ случаѣ сумма пересѣкающихся AN и BC будетъ болѣе суммы не пересѣкающихся AB и NC; т. е.:

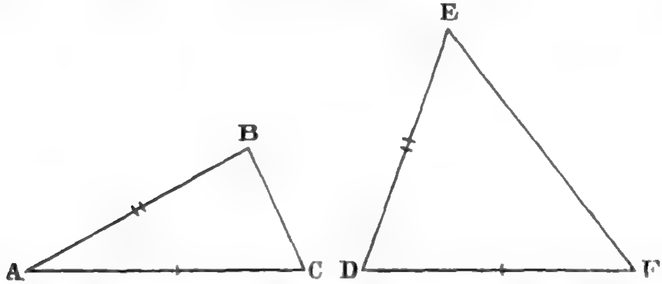
$AN + BC > AB + NC$; но $AB = AN$, слѣд.

$BC > NC$, или $BC > EF$.

Теорема 4-я, обратная 3-й. *Если двѣ стороны одного треуг. равны двумъ сторонамъ другаго, а третьи стороны не равны, то противъ большей стороны лежитъ и большій уголъ.* Пусть въ треуг. ABC и DEF (чер. 218) сторона $AB = DE$, $AC = DF$, а $BC < EF$; тогда уг. A не можетъ быть равенъ уг. D, потому что при этомъ по 2-й теор. и треуг. $ABC =$ треуг. DEF, а слѣд. и сторона BC должна быть равна сторонѣ EF. Уг. A не можетъ быть и больше уг. D, потому что тогда по предыдущей теоремѣ и сторона BC должна быть больше EF. Слѣд. уг. $A <$ уг. D.

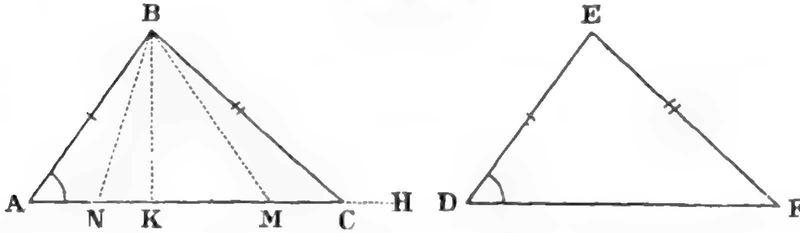
Теорема 5-я. *Если двѣ стороны и уголъ, лежащій противъ большей изъ нихъ, въ одномъ треуг. равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ большей изъ нихъ, въ*

Чер. 218.



другомъ, то треугольники равны. Положимъ, что въ треугол. ABC и DEF (чер. 219) сторона $AB = DE$, $BC = EF$ и уг. $A =$ $=$ уг. D, притомъ $BC > AB$ и слѣд. $EF > DE$. Наложимъ треуг. DEF на треуг. ABC такъ, чтобы точка D упала въ A и сторона DE пошла по AB; тогда и точка E упадетъ въ точку B по

Чер. 219.



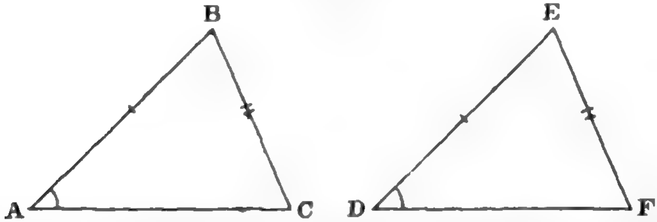
равенству этихъ сторонъ. По равенству угловъ A и D, стороны DF пойдетъ по сторонѣ AC. Для доказательства теоремы намъ остается доказать, что точка F при этомъ непремѣнно упадетъ въ C.

Дѣйствительно, еслибъ мы допустили, что точка F упала между A и C въ точку M и что линія EF заняла положеніе BM, то мы имѣли бы $BC = BM$, между тѣмъ какъ этого равенства быть не можетъ, ибо BC и BM суть наклонныя, находящіяся въ различныхъ разстояніяхъ отъ перпендикуляра, который можно опустить изъ B на AC. Точно также точка F не можетъ упасть и на продолженіи AC, напр. въ H. Наконецъ, точка C не можетъ упасть и по лѣвую сторону перпендикуляра BK, напр. въ N; потому что тогда линія EF, занявши положеніе BN, была бы къ перпендикуляру BK ближе, чѣмъ линія BA, и потому EF должна бы быть меньше BA, между тѣмъ какъ по условію $EF > DE$ и слѣд. $EF > AB$. Такимъ образомъ точка F непремѣнно упадетъ въ C, прямая EF совмѣстится съ BC и слѣд. треуг. $DEF = ABC$.

Мы взяли такіе треугольники, въ которыхъ равные углы D и A, лежащіе противъ большей изъ равныхъ сторонъ, суть острые; но легко доказать теорему и въ томъ случаѣ, когда углы A и D будутъ тупые или прямые.

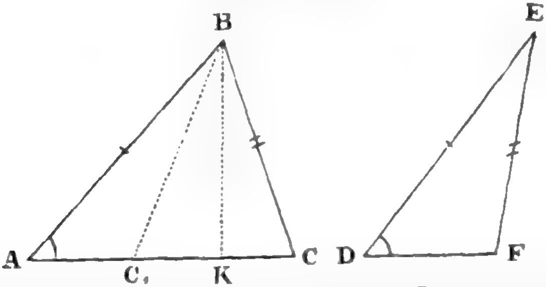
Когда двѣ стороны AB и BC (чер. 220 и 221) и уголъ A, лежащій противъ меньшей изъ нихъ, въ треуг. ABC равны порознь двумъ сторонамъ DE и EF и углу D, лежащему противъ меньшей же EF, въ другомъ треуг. DEF, то нельзя заключать о равенствѣ треуг., не имѣя еще какого либо условія. Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлавъ наложеніе какъ въ предъидущей теоремѣ, мы найдемъ, что сторона EF можетъ занять два положенія: она пойдетъ или по BC (чер. 220),

Чер. 220.



и тогда треуг. DEF=треуг. ABC, или по BC_1 (чер. 221), разстояніе которой C_1K отъ основанія перпендикуляра BK равно CK

Чер. 221.



и которая поэтому равна BC и слѣд. равна EF; тогда треуг. DEF не будетъ равенъ треуг. ABC.

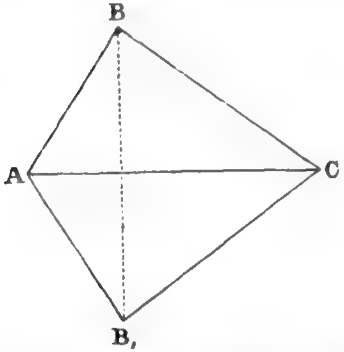
Чер. 222.

Теорема 6. *Два треугольника равны, если три стороны одного равны порознь тремъ сторонамъ другаго.* Положимъ (чер. 222), что $AB=DE$, $BC=EF$ и $AC=DF$; тогда уг. A не можетъ быть.

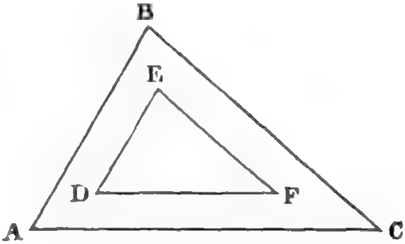
больше уг. D, потому что тогда по теоремѣ 3-й и сторона BC должна быть $>EF$; уг. A не можетъ быть и меньше уг. D, потому что тогда сторона BC должна быть $<EF$. Слѣд. уг. $A=$уг. D, и треугольники, какъ имѣющіе по равному углу, заключенному между равными сторонами, будутъ равны между собою.

Приведемъ еще другое доказательство теоремы 6-й. Приложимъ треуг. DEF (чер. 222) къ треуг. ABC такъ, чтобы точка D упала въ A и сторона DF пошла по AC; тогда и точка F упадетъ въ C по равенству сторонъ AC и DF. Положимъ, что третья вершина E треуг. DEF упадетъ при этомъ (чер. 223) въ точку B_1 и треуг. DEF приметъ положеніе AB_1C. Соединивъ вершины B и B_1 прямою BB_1, мы получимъ два равнобедренныхъ треуг. BAB_1 и BCB_1 потому что по условію $BA=AB_1$ и $BC=CB_1$; слѣд. (теор. 1 § 137) уг. $ABB_1=$уг. AB_1B и уг. $B_1BC=$уг. CB_1B. Отсюда слѣдуетъ, что и уг. ABC, состоящій изъ угловъ ABB_1 и B_1BC, равенъ уг. AB_1C, состоящему изъ угловъ AB_1B и CB_1B, или, что тоже, уг. $ABC=$ $=$уг. DEF. Если же эти углы равны, то и треуг. $ABC=DEF$.

Чер. 223.



Чер. 224.



139. Такимъ образомъ для какихъ угодно треугольниковъ мы имѣемъ слѣдующія условія равенства:

Два треугольника равны, если они имѣютъ: 1) по одной равной сторонѣ и по два равныхъ угла; 2) по двѣ равныхъ стороны и по равному углу между ними; 3) по двѣ равныхъ стороны и по равному углу, противолежащему большей изъ нихъ; 4) по три равныхъ стороны.

Въ каждое изъ этихъ условій входитъ равенство трехъ частей треугольника, въ числѣ которыхъ находится по крайней мѣрѣ одна сторона. Легко видѣть, что если всѣ углы одного треуг. равны порознь угламъ другаго, то нельзя заключить, что треуг. равны между собою; такъ въ треуг. ABC и DEF (чер. 224) уг. $A=$ уг. D, уг. $B=E$, $C=F$ какъ углы съ параллельными сторонами, обращенные отверстіями въ одну сторону; между тѣмъ треугольники, очевидно, не равны между собою, и треуг. ABC болѣе треуг. DEF.

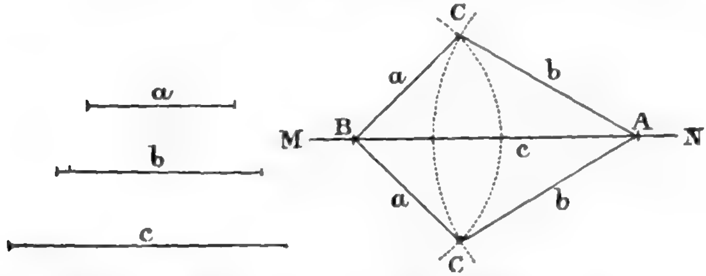
140. По тремъ даннымъ частямъ треуг., заключающимся въ каждомъ изъ условій равенства, можно всегда построить треуг., если только эти части заданы такъ, что не противорѣчатъ условіямъ, выраженнымъ во всѣхъ предъидущихъ теоремахъ, напр. если сумма двухъ данныхъ угловъ треугольника меньше $2d$.

Такимъ образомъ всегда возможно построить треуг.: 1) по тремъ сторонамъ, если бо́льшая изъ этихъ сторонъ меньше суммы двухъ остальныхъ и больше ихъ разности; 2) по двумъ сторонамъ и углу между ними: 3) по сторонѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ, если сумма этихъ угловъ$<2d$; 4) по сторонѣ и двумъ угламъ, изъ которыхъ одинъ прилежитъ, а другой противолежитъ данной сторонѣ, если сумма данныхъ угловъ$<2d$; 5) по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему большей изъ нихъ.

Рѣшимъ эти задачи.

1. Построить треуг. по сторонамъ a, b, c (чер. 225)? Для этого

Чер. 225.



на произвольной прямой MN (чер. 225) отложимъ часть AB, равную одной изъ данныхъ прямыхъ, напр. c, и такимъ образомъ опредѣлимъ двѣ вершины A и B искомаго треуг.

Чтобы опредѣлить третью вершину, описываемъ изъ точекъ B и A радіусами a и b дуги; если линіи a, b, c имѣютъ такія величины, что $c<a+b$ и $c>a-b$, то (§ 123—2) дуги пересѣкутся, и мы получимъ двѣ точки C и C_1, которыя будутъ находиться отъ A и B въ разстояніяхъ a и b. Соединивъ C и C_1, съ A и B, получимъ два треуг. ACB и AC_1B, стороны которыхъ будутъ равны даннымъ прямымъ a, b, c.

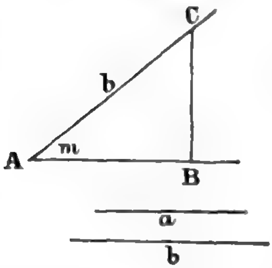
Какъ эти два треуг., такъ и всѣ другіе, построенные по тѣмъ же самымъ даннымъ на другихъ линіяхъ, будутъ на основаніи теоремы 6-й § 138-го равны между собою. Поэтому *три стороны вполнѣ опредѣляютъ треугольникъ.*

2. Построить треуг. по двумъ сторонамъ a и b (чер. 226) и углу m между ними? На сторонахъ угла m откладываемъ отъ вершины часть $AB=a$, $AC=b$ и соединяемъ B съ C; треуг. ABC будетъ требуемый.

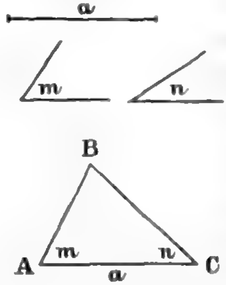
3. Построить треуг. по сторонѣ a (чер. 227) и двумъ угламъ m и n, прилежащимъ къ ней? Беремъ прямую $AB=a$ и при концахъ ея строимъ углы, равные m и n; треуг. ABC будетъ искомый.

4. Построить треуг. по сторонѣ a (чер. 228), углу m, ей противолежащему, и углу n, который прилежитъ къ ней? Для этого па прямой $AB=a$ описываемъ дугу ACB, вмѣщающую уголъ m (зад. 38 § 130); потомъ при точкѣ A прямой AB строимъ уголъ $=n$; соединивъ точки C и B, получимъ требуемый треугольникъ ACB.

Чер. 226.

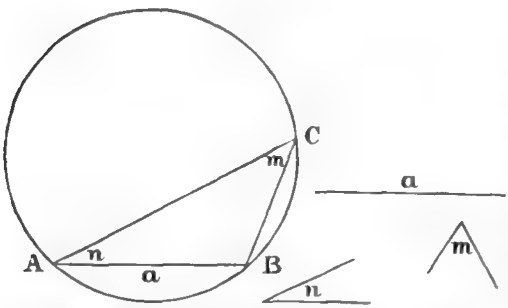


Чер. 227.

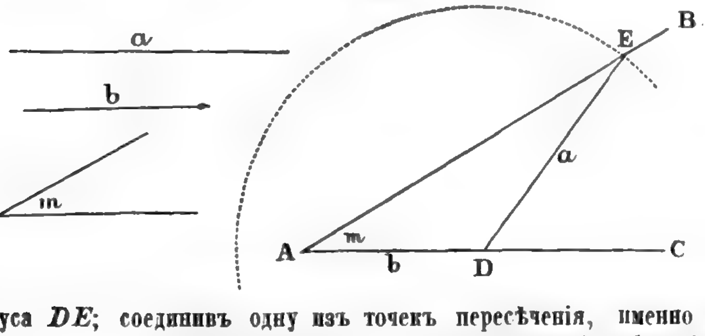


5. Построить такой треуг., чтобы одна сторона его $=$ прямой a (чер. 229), другая$=b$; а уголъ, лежащій противъ большей стороны a, былъ бы равенъ m? Для этого на произвольной прямой (чер. 229) строимъ уг. BAC, равный m; откладываемъ на AC часть $AD =$ меньшей изъ данныхъ линій, т. е. b; потомъ изъ D радіусомъ $= a$ описываемъ дугу; дуга эта непремѣнно пересѣчетъ AB, ибо разстояніе прямой AB отъ центра D меньше AD, а слѣд. и подавно меньше радіуса DE; соединивъ одну изъ точекъ пересѣченія, именно E, съ точкою D, получимъ треуг. AED, удовлетворяющій требованіямъ задачи.

Чер. 228.



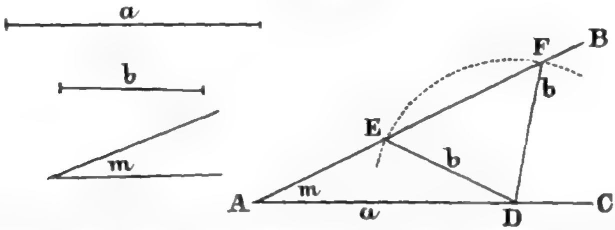
Чер. 229.



Рѣшимъ еще слѣдующую задачу.

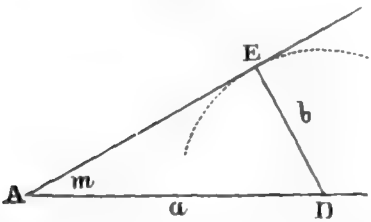
6. Построить треуг. по двумъ сторонамъ (чер. 230) *a* и *b* и уг. *m*, лежащему противъ меньшей стороны *b*? Отложивъ на прямой *AC* (чер. 230) часть AD=большей линіи a, опишемъ изъ D дугу ра-

Чер. 230.

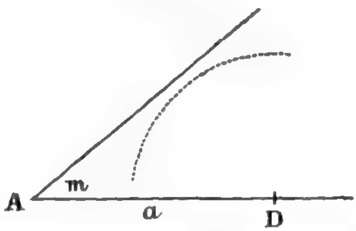


діусомъ=b; эта дуга или пересѣчетъ AB въ точкахъ E и F (чер.

Чер. 231.



Чер. 232.



230), или коснется ея (чер. 231), или не будетъ имѣть съ AB общихъ точекъ (чер. 232). Въ первомъ случаѣ, соединивъ E и F съ D, мы получимъ два треуг. ADE и ADF; оба они удовлетворяютъ требованіямъ задачи, ибо имѣютъ стороны, равныя a и b, и уг. m, лежащій противъ меньшей стороны b; слѣд. задача имѣетъ два рѣшенія. Во второмъ случаѣ (чер. 231) задача имѣетъ только одно рѣшеніе, именно треуг. ADE, прямоугольный при E. Если окружность, описанная изъ D, не встрѣтитъ AB (чер. 232), то задача невозможна.

Два рѣшенія получатся тогда, когда b больше перпендикуляра, опущеннаго изъ D на AB; одно рѣшеніе, когда b=этому перпендикуляру; если же b меньше перпендикуляра, то задача невозможна.

Изъ рѣшенія 2, 3, 4 и 5 задачи можно сдѣлать выводы, подобные тому, какой мы сдѣлали при рѣшеніи первой зад., а именно, что треугольникъ вполнѣ опредѣляется: 2) стороной и двумя углами; 3) двумя сторонами и угломъ между ними; 4) двумя сторонами и угломъ, противолежащимъ большей изъ нихъ.

141. Прямоугольные треуг. всегда имѣютъ по одной равной части—прямому углу, и для такихъ треуг. доказанныя нами теоремы (§ 139) о равенствѣ можно представить въ болѣе простой формѣ, именно:

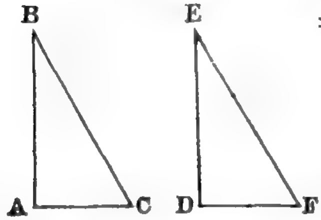
Прямоугольные треуг. равны, если они имѣютъ:

1) *по равной сторонѣ и острому углу* (на основаніи перваго условія равенства);

2) *по двѣ равныхъ стороны* (на основаніи втораго и третьяго условій).

Такъ если углы A и D (чер. 233) прямые, то треуг. $ABC = DEF$, когда 1) $AB=DE$, уголъ $B=$ уг. E или уг. $C=$ уг. F;

Чер. 233.



2) $BC = EF$, уг. $B=$ уг. E или уг. $C=$ уг. F;

3) $AB=DE$, $AC=DF$;

4) $AB=DE$, $BC=EF$.

142. Задачи на вычисленіе. 1. Въ какихъ цѣлыхъ числахъ можетъ выразиться величина одной стороны треуг., если двѣ другія стороны его равны 7 и 5 дюйм.? 10 и 14 верш.? 31 и 52?

2. Опредѣлить величину стороны равнобедр. треуг., если другія стороны его равны 9 и 4 дюйм.? 17 и 10 верш.? 19 и 7?

3. Одна сторона треуг.=1 футу, другая=1 дюйму; опредѣлить третью сторону, зная, что она выражается цѣлымъ числомъ дюймовъ?

4. Рѣшить предъид. зад. для чиселъ 20 и 1? 41 и 1?

5. Можетъ ли треуг. имѣть стороны въ 10, 15 и 20 верш.? въ 1, 2 и 3 дюйм.? въ 1 ф., 1 дюймъ, 1 лин.?

6. Периметръ равнобедр. треуг.=28, 24 дюйм.; основаніе его= $^2/_3$ одной изъ прочихъ сторонъ; опредѣлить стороны?

7. Периметръ треуг. $ABC = 1{,}185$ арш.; $AB={}^1/_2$ арш.; разность двухъ другихъ сторонъ=4 верш.; опредѣлить эти стороны?

8. Можетъ ли треуг. имѣть углы въ 37°, 21° и 85°? 75°, 80° и 25°? 80°, 70° и 90°? $^3/_4d$, $^2/_3d$ и $^1/_3d$? d, $\frac{d}{n}$ и $\frac{(n-1)\,d}{n}$?

9. Опредѣлить третій уг. треуг., если одинъ изъ угловъ$={}^2/_3d$, а другой $^3/_5d$? если одинъ$=27°\ 8'\ 35''$, а другой$=87°\ 42'\ 43''$? если одинъ$=0{,}37d$, а другой $0{,}73d$?

10. Одинъ уг. треуг. въ $1^1/_2$ раза больше другаго, а другой вдвое больше третьяго; опредѣлить углы?

11. Одинъ уг. треуг. меньше другаго на 12° 12′, а другой больше третьяго на 5° 43′; опредѣлить углы треуг.?

12. Одинъ изъ внѣшнихъ угловъ треуг.=134° 48′; а разность внутреннихъ, съ нимъ не смежныхъ, равна 28° 36′; опредѣлить внутренніе и внѣшніе углы треуг.?

13. Какого вида будетъ треуг., если одинъ изъ внутр. угл. его= суммѣ двухъ остальныхъ? больше этой суммы? меньше ея?

14. Какого вида будетъ треуг., если одинъ изъ его внутр. угл.= смежному съ нимъ внѣшнему? больше его? меньше?

15. Внутр. уг. треуг.=38° 27′; а внѣшній, не смежный съ нимъ, равенъ 112° 36′. Опредѣлить остальные внутр. и внѣшніе углы?

16. Отношеніе острыхъ уг. прямоуг. треуг.=3; опредѣлить углы?

17. Опредѣлить углы прямоуг. треуг., если одинъ изъ внѣшнихъ угл. его$=1{,}35d$? $143^\circ\ 27'\ 30''$?

18. Опредѣлить уголъ, образуемый прямыми линіями, дѣлящими пополамъ острые углы прямоуг. треугольника? внѣшніе тупые углы прямоуг. треуг.?

19. Въ треуг. ABC уг. $A=36^\circ$; какой уголъ образуютъ прямыя линіи, дѣлящія пополамъ углы B и C?

20. Двѣ прямыя, дѣлящія пополамъ углы B и C треугольника ABC, пересѣкаются подъ угл. 114°; опредѣлить уг. A?

21. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла прямоуг. треуг. на гипотенузу, дѣлитъ этотъ уголъ на части, относящіяся между собою какъ $3:5$; опредѣлить острые углы этого треуг.?

22. Уг. при вершинѣ равнобедр. треуг.$=138^\circ\ 37'$; опредѣлить углы при основаніи?

23. Уг. при основаніи равнобедр. треуг.$=57^\circ\ 30'\ 41''$; опредѣлить уг. при вершинѣ?

24. Внѣшній уг. при основаніи равнобедр. треуг.$=101^\circ\ 25'$; опредѣлить внутр. углы треуг.?

25. Опредѣлить углы равнобедр. треуг., если уг. при основаніи вчетверо больше угла при вершинѣ? вдвое меньше? если отношеніе этихъ угловъ$=3$? $^1/_5$?

26. Опредѣлить углы равнобедр. треуг., если сумма угловъ, прилежащихъ къ одной изъ равныхъ сторонъ, равна $114^\circ\ 35'$? $^{10}/_9 d$? $\frac{m}{n}d$, гдѣ $m>n$?

27. Опредѣлить уголъ, образуемый линіей, дѣлящей пополамъ уг. при вершинѣ равнобедр. треуг., съ основаніемъ этого треуг.?

28. Отношеніе внѣшнихъ угл. треуг.$=1:1^1/_2:1{,}25$; опредѣлить внутр. углы?

29. Опредѣлить углы равнобедр. треуг., если уг. при вершинѣ больше угла при основаніи на $9^\circ\ 36'\ 39''$? на $\frac{m}{n}d$?

30. Въ треуг. сумма двухъ внѣшнихъ угловъ$=n^\circ$; опредѣлить внутренній, не смежный съ ними, уголъ?

31. Опредѣлить уг. A треуг. ABC, зная, что сумма внѣшнихъ угловъ, смежныхъ съ B и C, больше $B+C$ втрое? вчетверо? въ n разъ?

32. Въ треуг. ABC проведены всѣ высоты; уг. $A=86^\circ\ 19'\ 40''$, а часть его, отсѣкаемая высотой и прилежащая къ прямой AB, равна $29^\circ\ 31'\ 46''$; опредѣлить углы B, C и части ихъ, отсѣкаемыя высотами?

33. Рѣшить предъид. зад., полагая $A=26^\circ\ 25'\ 24''$, а часть его $=8^\circ\ 29'\ 48''$?

34. Опредѣлить внутр. уголъ треугольника, если сумма внѣшнихъ угловъ, не смежныхъ съ нимъ, больше его втрое? вчетверо? въ n разъ?

35. Въ треуг. ABC уг. A раздѣленъ пополамъ прямою AD и изъ его вершины проведена высота AE; уг. $DAE=18^\circ\ 17'\ 16''$, уг. $BAC=46^\circ\ 48'\ 50''$. Опредѣлить углы B и C треугольника?

36. Полагая въ предъид. зад. уг. $DAE=20^\circ\ 9'\ 6''$ и большій

изъ прочихъ угловъ треуг. $B=58^{\circ}\ 27'\ 36''$, опредѣлить углы A и C треугольника?

143. Задачи на доказательство теоремъ. Доказать слѣдующія теоремы: 1. Каждая сторона треуг. меньше половины его периметра.

2. Высота треуг. меньше полусуммы сторонъ, выходящихъ съ ней изъ общей вершины.

3. Сумма высотъ треуг. меньше его периметра.

4. Если въ двухъ равнобедр. треуг. углы при вершинѣ равны, то равны и прочіе углы. Составить и доказать обратную теорему?

5. Внѣшній уг. при вершинѣ равнобедр. треуг. вдвое больше внутр. угла при основаніи. Составить и доказать обратную теорему?

6. Меньшій изъ угловъ треуг. непремѣнно острый.

7. Если въ двухъ треуг. ABC и $A_1B_1C_1$ уг. $A=A_1$, а $B+B_1=180^{\circ}$, то $C=B_1-A_1$, $C_1=B-A$.

8. Если въ треуг. ABC и $A_1B_1C_1$ уг. $A=A_1$, $B+B_1=\ddot{a}$, то уг. $C=d-(A_1-B_1)$, $C_1=d-(A-B)$.

9. Если въ треуг. ABC и $A_1B_1C_1$ уг. $A+A_1=90^{\circ}$ и $B+B_1=90^{\circ}$, то $C=A_1+B_1$, $C_1=A+B$.

10. Могутъ ли быть такіе треуг. ABC и $A_1B_1C_1$, чтобы въ нихъ одновременно $A+A_1=2d$ и $B+B_1=2d$, или также одновременно $A+A_1=2d$, $B+B_1=2d$, $C+C_1=2d$?

11. Если изъ конечной точки основанія равнобедр. треуг. опустить перпендикуляръ на противолежащую сторону, то уголъ этого перпендикуляра съ основаніемъ вдвое меньше угла при вершинѣ равнобедр. треуг.

12. Прямая, параллельная основанію равнобедр. треуг., образуетъ съ сторонами его или съ ихъ продолженіями новый равнобедр. треуг., и отрѣзки сторонъ, заключенные между параллелями, равны между собою.

13. Прямая, параллельная основанію равнобедр. треуг. и проходящая черезъ его вершину, дѣлитъ пополамъ внѣшній уг. при вершинѣ.

14. Двѣ прямыя, дѣлящія пополамъ внутренніе или внѣшніе углы при основаніи равнобедр. треуг., образуютъ съ основаніемъ его новый равнобедр. треуг.

15. Если одинъ изъ внутр. угловъ при основаніи равнобедр. треуг. раздѣлить прямой линіей пополамъ, продолжить эту прямую до пересѣченія съ противолежащей стороной и изъ точки пересѣченія провести прямую, параллельную основанію, то отрѣзки сторонъ, прилежащіе къ основанію, и отрѣзокъ параллели между сторонами будутъ равны между собою.

16. Если соединить прямой линіей вершины двухъ равнобедр. треуг., имѣющихъ общее основаніе, то эта прямая будетъ перпендикулярна къ основанію и раздѣлитъ пополамъ углы при вершинахъ.

17. Если отъ вершины равнобедр. треуг. отложить на сторонахъ его равныя части и соединить полученныя такимъ образомъ точки прямою линіей, то эта прямая будетъ параллельна основанію.

18. Если изъ точекъ A и B прямой AB провести по одну сторону этой прямой двѣ, параллельныя между собой, прямыя AL и

BM; затѣмъ, взявъ на AB между A и B произвольную точку C, отложить на AL часть $AD=AC$ и на BM часть $BE=BC$, то прямыя, соединяющія точку C съ точками D и E, будутъ взаимно перпендикулярны.

19. Если въ равнобедр. треуг. уголъ при основаніи вдвое больше уг. при вершинѣ, то прямая, дѣлящая уг. при основаніи пополамъ, дѣлитъ треуг. на два также равнобедр. треуг.

20. Если въ равнобедр. треуг. ABC продолжить основаніе BC за обѣ его конечныя точки, на продолженіяхъ отложить стороны треуг., такъ что $BD=CE=AB$, и соединить полученныя такимъ образомъ точки D и E съ вершиной A треуг., то уг. DAE будетъ дополненіемъ до 180° углу при основаніи треуг.?

21. Если въ равнобедр. треуг. ABC, котораго основаніе BC, продолжить стороны AB и AC за точки B и C, отложить на продолженіяхъ части BD и CE, равныя основанію BC, точку D соединить съ C, а E съ B, то уголъ между прямыми BE и CD будетъ равенъ углу при основаніи даннаго треуг.

22. Если каждую сторону равносторонняго треугольника раздѣлить на три равныя части и соединить прямыми линіями каждыя двѣ точки дѣленія, ближайшія къ вершинамъ треуг., то образуется равносторонній и равноугольный шестиугольникъ.

23. Если два угла равносторонняго треуг. раздѣлить прямыми линіями пополамъ, продолжить эти прямыя до пересѣченія и изъ срединъ ихъ возставить къ нимъ перпендикуляры, то эти перпендикуляры раздѣлятъ на три равныя части сторону, заключенную между раздѣленными углами.

24. Если въ прямоуг. треуг. изъ вершины прямаго уг. опустить перпендикуляръ на гипотенузу, то данный треуг. раздѣлится на два треуг., равноугольныхъ съ даннымъ и между собою?

25. Если въ прямоуг. треуг. одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое больше другаго, то гипотенуза вдвое больше меньшаго катета. Составить и доказать обратную теорему?

26. Если на гипотенузѣ BC треуг. ABC отложить отъ ея конечныхъ точекъ, не продолжая ея, части BD и CE, равныя прилежащимъ катетамъ AB и AC, и точки D и E соединить съ A, то средняя часть прямаго угла (т. е. уг. DAE) будетъ равна 45°.

27. Если продолжить гипотенузу за ея конечныя точки на длины, равныя прилежащимъ катетамъ, и полученныя такимъ образомъ точки соединить съ вершиной прямаго угла прямыми линіями, то уг. между этими линіями будетъ$=1^1/_2d$.

28. Если въ треуг. ABC раздѣлить уг. B пополамъ прямой BE и изъ точки E пересѣченія этой прямой съ противоположной стороной AC провести $ED \parallel BC$ до встрѣчи съ AB, то $ED=BD$.

29. Если въ треуг. ABC раздѣлить пополамъ углы B и C прямыми BF и CF и черезъ точку F пересѣченія этихъ прямыхъ провести $DFE \parallel BC$ до встрѣчи съ AB и AC въ точкахъ D и E, то DE будетъ равна суммѣ отрѣзковъ DB и EC.

30. Если въ треуг. ABC раздѣлить пополамъ внутрен. уг. B и внѣшній уг. при C прямыми BF и CF и черезъ точку F пересѣ-

ченія этихъ прямыхъ провести $FD \parallel BC$, то часть DE этой паралдели внутри треуг. ABC (или между продолженіями сторонъ AB и AC) будетъ равна разности частей сторонъ AB и AC, заключенныхъ между стороной BC и параллелью къ ней FD.

31. Если въ треуг. прямая, соединяющая вершину угла съ срединою противолежащей стороны, равна половинѣ этой стороны, то этотъ уг. прямой.

32. Если прямая, соединяющая вершину треуг. съ срединой противолежащей стороны, больше половины этой стороны, то уг. при вершинѣ острый.

33. Если прямая, соединяющая вершину треуг. съ срединой основанія, меньше половины основанія, то уг. при вершинѣ тупой.

34. Составить теоремы, обратныя тремъ предъидущимъ, и доказать ихъ, не прибѣгая къ способу приведенія къ нелѣпости.

35. Если въ треуг. ABC, въ которомъ углы B и C острые и $AB>AC$, опустить изъ A перпендикуляръ на BC, то сторона BC и уг. A раздѣлятся на неравныя части, изъ которыхъ бо̀льшія будутъ прилежать къ сторонѣ AB.

36. Прямая, дѣлящая пополамъ уголъ треуг., разсѣкаетъ противолежащую сторону на части, меньшія прилежащихъ сторонъ.

37. Если ко всѣмъ сторонамъ треуг. провести параллели, то онѣ образуютъ треуг., равноугольный съ даннымъ.

38. Прямыя, перпендикулярныя къ сторонамъ треуг., образуютъ между собой треуг., равноугольный съ даннымъ.

39. Если изъ всѣхъ вершинъ треуг. провести три прямыя линіи подъ однимъ и тѣмъ же угломъ къ сторонамъ треуг., такъ чтобы всѣ эти прямыя были внѣ треуг. или всѣ внутри его, то онѣ образуютъ треуг., равноугольный съ даннымъ.

40. Если на сторонахъ треуг. ABC взять три произвольныя точки G, H, K и провести изъ нихъ прямыя, составляющія съ сторонами треуг. одинакія углы, то эти прямыя образуютъ треуг. DEF, равноугольный съ даннымъ.

41. Если продолжить двѣ стороны треуг. за ихъ общую вершину, такъ чтобы продолженіе каждой стороны было равно другой сторонѣ, то прямыя, соединяющія конечныя точки этихъ продолженій съ вершинами треуг., будутъ параллельны между собою.

42. Если черезъ средину D основанія BC равнобедр. треуг. ABC провести прямую такъ, чтобы она пересѣкала одну изъ сторонъ AC и продолженіе BE другой стороны AB, то отрѣзокъ BE стороны внѣ треуг. больше отрѣзка FC внутри треуг.

43. Если въ равнобедр. треуг. раздѣлить основаніе на три равныя части и точки дѣленія соединить съ вершиною, то уг. при вершинѣ раздѣлится на три части, изъ которыхъ крайнія будутъ равны между собою, а средняя больше каждой изъ крайнихъ.

44. Если на сторонахъ равносторонняго треуг. отложить отъ вершинъ его равныя части и полученныя такимъ образомъ точки соединить прямыми линіями, то эти линіи образуютъ новый равносторонній треуг.

45. Если внутри равностор. треуг. построить равносторонній же

треуг. такъ, чтобы вершины втораго находились на сторонахъ перваго, то эти вершины отрѣжутъ отъ сторонъ перваго треуг. равныя части.

46. Если отъ вершинъ равносторонняго треуг. на сторонахъ его отложить третьи доли этихъ сторонъ и соединить полученныя точки, то получится новый равностор. треуг., и стороны его будутъ перпендикулярны къ сторонамъ даннаго треуг.

47. Прямая, дѣлящая уг. треугольника пополамъ, меньше полусуммы сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ.

48. Сумма прямыхъ линій, дѣлящихъ пополамъ углы треуг., меньше периметра треуг.

49. Прямая, соединяющая средину стороны треуг. съ противолежащей вершиною, меньше полусуммы остальныхъ двухъ сторонъ.

50. Сумма прямыхъ, соединяющихъ средины всѣхъ сторонъ треуг. съ противолежащими вершинами, меньше периметра треуг.

51. Если два треуг. равны, то въ нихъ равны между собой слѣдующія прямыя линіи: 1) высоты, проведенныя изъ вершинъ равныхъ угловъ; 2) линіи, соединяющія вершины равныхъ угловъ съ срединами противолежащихъ сторонъ; 3) отрѣзки линій, дѣлящихъ пополамъ равные углы, отъ вершинъ угловъ до противолежащихъ сторонъ.

52. Равнобедр. треугольники равны, если имѣютъ соотвѣтственно равные: 1) основанія и углы при основаніи или при вершинѣ; 2) стороны и углы при основаніи или при вершинѣ; 3) стороны и основанія; 4) высоты и углы при вершинахъ; 5) высоты и основанія; 6) высоты и стороны.

53. Равнобедр. треуг. равны, если углы при вершинахъ и суммы или разности стороны и основанія въ обоихъ соотвѣтственно равны.

54. Равнобедр. треуг. равны, если ихъ периметры и углы при вершинахъ соотвѣтственно равны.

55. Два треуг. равны, если они имѣютъ по двѣ равныхъ стороны и по равному углу, лежащему противъ меньшей стороны, и если притомъ углы, лежащіе противъ бо́льшихъ равныхъ сторонъ, будутъ одного свойства (т. е. оба острые, оба прямые или оба тупые).

56. Прямоугольные треуг. равны, если имѣютъ по равнымъ: 1) гипотенузѣ и суммѣ катетовъ; 2) гипотенузѣ и разности катетовъ.

57. Прямоуг. треуг. равны, если гипотенузы и разности острыхъ угловъ въ обоихъ соотвѣтственно равны.

58. Прямоуг. треуг. равны, если имѣютъ по равному катету и если суммы или разности прочихъ сторонъ также равны.

59. Прямоуг. треуг. равны, если имѣютъ по равному катету и если разности острыхъ угловъ равны.

60. Два остроуг. треуг. равны: 1) если они имѣютъ по равной высотѣ и отрѣзки сторонъ, на которыя опущены эти высоты, также равны;

2) если они имѣютъ по равной сторонѣ и если линіи, соединяющія средины этихъ сторонъ съ вершинами противолежащихъ угловъ, и углы, заключенные между этими линіями и равными сторонами, равны;

3) если они имѣютъ по двѣ равныхъ стороны, и линіи, соединяющія средины этихъ сторонъ съ вершинами противолежащихъ угловъ, также равны;

4) если они имѣютъ по равной высотѣ, и если углы, образуемые этими высотами съ прилежащими сторонами, соотвѣтственно равны.

61. Два треуг. равны, если сторона, прилежащій къ ней уголъ и 1) сумма или 2) разность двухъ прочихъ сторонъ въ одномъ треуг. соотвѣтственно равны тѣмъ же частямъ въ другомъ.

62. Два треуг. равны, *если имѣютъ по равной сторонѣ*, противолежащему углу и 1) суммѣ или 2) разности двухъ прочихъ сторонъ.

63. Перпендикуляры, возставленные ко всѣмъ сторонамъ треуг. изъ срединъ этихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

64. Точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ къ сторонамъ треуг. изъ срединъ этихъ сторонъ, равно отстоитъ отъ вершинъ треуг.

65. Линіи, дѣлящія пополамъ углы треуг., пересѣкаются въ одной точкѣ.

66. Точка пересѣченія прямыхъ линій, дѣлящихъ пополамъ всѣ углы треуг., находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ сторонъ его.

144. Задачи на построеніе. *Примѣч.* Въ слѣдующихъ задачахъ будемъ обозначать черезъ a, b, c стороны треуг.; A, B, C противолежащіе имъ углы; h_a, h_b, h_c — высоты, опущенныя на a, b, c; l_a, l_b, l_c — прямыя, соединяющія вершины угловъ A, B, C съ срединами противолежащихъ сторонъ; m_a, m_b, m_c, — отрѣзки прямыхъ, дѣлящихъ углы A, B, C пополамъ, заключенные между вершинами угловъ и противолежащими сторонами; p — периметръ треуг.

Въ прямоуг. треуг. A будетъ означать прямой уг. и слѣд. a — гипотенузу.

Въ равнобедр. треуг. a будетъ означать основаніе и слѣд. A уголъ при вершинѣ.

Построить прямоуг. треуг. по даннымъ:

1. b, c? 2. a, B? 3. a, b? 4. b, C? 5. b, B?

Построить равнобедр. треуг. по даннымъ:

7. a, B? 8. a, A? 9. a, h_a? 10 b, B?
11. b, h_a? 12. h_a, B? 13. h_a, A?

Построить равнобедр. прямоуг. треуг. по даннымъ:

14. a? 15. b? 16. h_a?
17. h_b? 18 l_a? m_b?

Построить равносторонній треуг. по даннымъ:

19. a? 20 h?

21. Опредѣлить геометр. мѣсто вершинъ прямоугольныхъ треуг., имѣющихъ общую гипотенузу?

22. Опредѣлить геометр. мѣсто вершинъ треуг., имѣющихъ общее основаніе и уголъ m при вершинѣ?

Построить треуг. по даннымъ:

23. b, c, h_a? 24. a, l_a, B? 25. a, h_b, h_c?
26. h_a, B, C? 27. a, h_a, B?
28. a, h_a и углу между b и h_a?
29. a, h_a и углу между a и l_a?
30. a, b, h_a? 31. a, h_a, l_a? 32. a, h_b, l_a?

Построить прямоуг. треуг. по даннымъ:

33. b и $B-C$? 34. a и $B-C$?
35. a и $b+c$? 36. a и $b-c$? 37. b и $a+c$?
38. b и $a-c$? 39. $b+c$ и B? 40. $b-c$ и B?

Построить равнобедр. треуг. по даннымъ:

41. $b+a$ и B? 42. $b-a$ (или $a-b$) и B?

43. Построить треуг. по даннымъ a, b и $A+B$?

44. Построить треуг. по двумъ сторонамъ и линіи, соединяющей средину одной изъ сторонъ съ вершиной противолежащаго угла?

45. Построить треуг. по даннымъ p, B, C?

46. Построить равнобедр. треуг. по даннымъ p, B?

47. Построить прямоуг. треуг. по даннымъ p, B?

48. Построить равнобедр. прямоуг. треуг. по данному p?

49. Построить треуг. по даннымъ: b, $a+c$ и A или b, $c-a$ и A?

50. Раздѣлить прямой уг. на три равныя части?

51. На окружности O даны точки A и B; найти на этой окружности такую точку, чтобы 1) сумма или 2) разность разстояній ея отъ данныхъ точекъ равнялась данной прямой n?

Построить треуг. по даннымъ:

52. b, B, $a+c$? 53. b, B, $a-c$?

54. Построить равностор. треуг. по данному периметру p?

55. На сторонѣ AC угла BAC найти точку, которая находилась бы на равныхъ разстояніяхъ отъ другой стороны AB и отъ точки D на сторонѣ AC?

56. На прямой AB найти такую точку, чтобы разность разстояній ея отъ точекъ C и D, расположенныхъ по обѣ стороны AB, была наибольшей?

57. Раздѣлить пополамъ уголъ между прямыми MP и NQ, не продолжая ихъ до пересѣченія?

58. Построить треуг. по даннымъ l_a, m_a и h_a?

59. Построить равносторонній треуг. такъ, чтобы вершины его лежали на трехъ параллеляхъ X, Y, Z?

60. Черезъ данную точку A провести сѣкущую ABC къ сторонамъ угла O такъ, чтобы она съ сторонами угла образовала треуг., котораго периметръ$=p$?

61. Изъ точки O провести прямую линію такъ, чтобы она пересѣкла стороны угла A тр-ка BAC и чтобы отрѣзокъ ея MN внутри угла A равнялся суммѣ отрѣзковъ BM и CN сторонъ тр-ка, заключающихъ уг. A?

62. Черезъ данную точку A провести прямую MN такъ, чтобы концы ея находились на двухъ данныхъ окружностяхъ O и O_1 и чтобы она въ точкѣ A дѣлилась пополамъ?

63. Изъ вершинъ треуг. ABC описать три, извнѣ касающіяся между собой, окружности?

64. Черезъ точку A, лежащую внѣ окружности O, провести къ окружности сѣкущую такъ, чтобы она въ точкѣ пересѣченія съ окружностью дѣлилась пополамъ?

65. Черезъ точку M, данную на діаметрѣ AB окружности O или

на его продолженіи, провести сѣкущую такъ, чтобы отношеніе дугъ, заключенныхъ между сѣкущей и діаметромъ, было равно 3?

66. Описать окружность такъ, чтобы она касалась прямой XY въ точкѣ A и пересѣкала окружность C подъ угл. n*.?

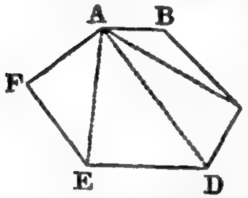
67. Данъ уг. XAY и точка P внутри его; въ этотъ уголъ вписать треуг. наименьшаго периметра. притомъ такъ, чтобы одна изъ вершинъ его была въ P (т. е. построить треуг. такъ, чтобы двѣ его вершины находились на сторонахъ угла XAY)?

68. Внутри треуг. ABC найти точку, изъ которой стороны тр-ка были бы видны подъ однимъ и тѣмъ же угломъ?

Многоугольники.

145. Изъ каждой вершины мног. $ABCDEF$ (чер. 234), напр. изъ A, можно провести діагонали во всѣ прочія вершины кромѣ ея самой и двухъ смежныхъ вершинъ; слѣд. *изъ каждой вершины многоуг. можно провести столько діагоналей, сколько въ многоуг. сторонъ безъ трехъ.* Такъ въ семиуг. можно провести изъ каждой вершины 4 діаг., въ 10-кѣ семь и т. под.

Чер. 234.

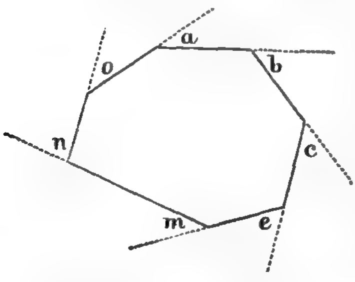


146. Діагоналями, проведенными изъ A (чер. 234), многоуг. $ABCDEF$ раздѣлился на тр—ки ABC, ACD, ADE, AEF, изъ которыхъ два крайніе состоятъ каждый изъ діагонали и двухъ сторонъ многоуг.; каждый же изъ среднихъ имѣетъ своими сторонами двѣ діагонали и одну сторону многоуг.; слѣд. *діагонали, проведенныя изъ каждой вершины многоуг., дѣлятъ его на столько треуг., сколько въ многоуг. сторонъ безъ двухъ.*

147. Такъ какъ сумма внутр. угловъ треуг. равна двумъ прямымъ, то изъ предъид. § слѣдуетъ, что *сумма внутреннихъ угловъ многоуг. = двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ безъ двухъ.* Такъ сумма внутр. угловъ 6—ка равна $2d.\ 4{=}8d$.

148. Продолжимъ всѣ стороны многоуг. (чер. 235) по одному направленію; тогда получимъ внѣшніе углы a, b, c.... Каждый внѣшній уг. съ смежнымъ ему внутреннимъ составляетъ въ суммѣ $2d$; слѣд. если въ многоуг. будетъ n сторонъ, то сумма всѣхъ угловъ его, внутреннихъ и внѣшнихъ, будетъ$=2dn$; сумма же однихъ внутр. угл., какъ сейчасъ видѣли, равна $2d\,(n-2)$; слѣд. сумма внѣшнихъ угловъ =

Чер. 235.

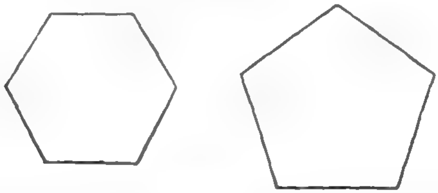


* Угломъ между двумя пересѣкающимися окружностями наз. уголъ, составленный касательными къ этимъ окружностямъ, проведенными въ точкѣ пересѣченія окружностей.

$=2dn-2d(n-2)=2dn-2dn+4d=4d$. Итакъ *сумма внѣшнихъ угловъ всякаго многоуг. равна 4 прямымъ угламъ*; т. е. она есть величина постоянная, тогда какъ сумма внутр. угловъ зависитъ отъ числа сторонъ многоуг.

149. Мног—къ, у котораго всѣ стороны, а также и всѣ углы, равны между собою, наз. *правильнымъ*; на чер. 236-мъ представлены

Чер. 236.



правильный 6—къ и 5—къ. Теоремы § 147 и 148 даютъ возможность опредѣлить величину каждаго изъ внутр. или внѣшнихъ угл. правильнаго многоугольника; такъ напр. сумма внутрен. уг. 6—ка$=2d.4=8d$; слѣд. внутр. уголъ прав. 6—ка$=\,^8/_6 d=\,^4/_3 d=$ $=120^\circ$. Внутр. уг. прав. 8—ка$=\,^{12}/_8 d=\,^3/_2 d=135^\circ$; въ прав. 10—кѣ уг.$=1,6d=144^\circ$...; вообще въ прав. n—кѣ внутр. уголъ$=\frac{2d(n-2)}{n}$. Съ увеличеніемъ числа сторонъ внутр. уголъ правил. многоуг. увеличивается и приближается къ $2d$.

Внѣшній уг. правил. n—ка равенъ $\frac{4d}{n}$; поэтому съ увеличеніемъ числа сторонъ онъ уменьшается и приближается къ нулю; такъ внѣшній уг. прав. 3—ка$=\,^4/_3 d=120^\circ$; внѣш. уг. прав. 6—ка$=\,^4/_6 d=\,^2/_3 d$ $=60^\circ$; въ прав. 10—кѣ онъ$=36^\circ$; въ прав. 360—кѣ онъ$=1^\circ$ и т. д.

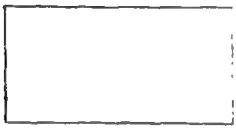
Изъ многоугольниковъ заслуживаютъ особаго вниманія четыреугольники.

150. Виды четыреугольниковъ. Изъ теоремы § 147 слѣдуетъ, что сумма внутр. угловъ четыр—ка равна $4d$; поэтому въ равноугольномъ четыреуг. всѣ углы будутъ прямые, и такой четыреуг. (чер. 237) наз. *прямоугольникомъ*.

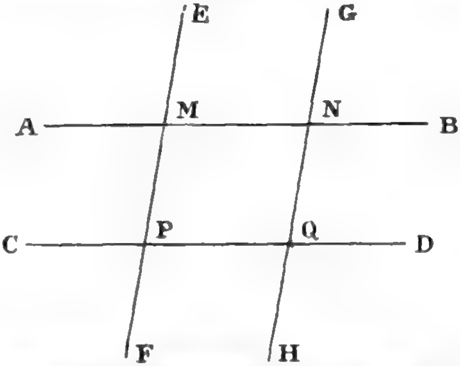
Если мы двѣ параллели AB и CD (чер. 238) пересѣчемъ двумя параллелями EF и GH, то у насъ образуется четыреуг. $MNPQ$, въ которомъ противоположныя стороны параллельны; такой четыреуг. наз. *параллелограммомъ*. Прямоугольникъ есть также параллелограммъ, ибо каждыя двѣ противоположныя стороны его, какъ перпендикуляры къ одной и той же прямой линіи, параллельны между собою.

151. Въ каждомъ параллелограммѣ противолежащіе углы равны между собою; такъ (чер. 239) уголъ $A=$уг.C и уг. $B=$уг.D, какъ углы съ параллельными сторонами, обращенные отверстіями въ противоположныя стороны. Углы же, прилежащіе къ одной изъ сторонъ параллелограмма, дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ;

Чер. 237.



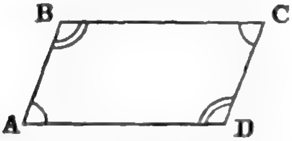
Чер. 238.



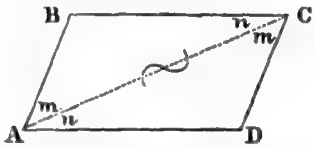
такъ уг. $A+$уг. $D=2d$, ибо это суть внутренніе односторонніе углы при параллеляхъ AB и CD, пересѣченныхъ прямой AD.

152. *Противоположныя стороны параллелограмма равны между собою.*

Чер. 239.



Чер. 240.

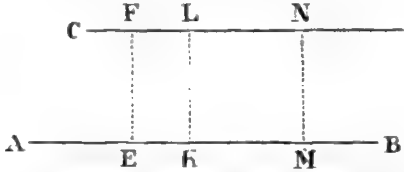


Дѣйствительно, проведя діагональ AC (чер. 240), получимъ два треуг. ABC и ADC, которые имѣютъ общую сторону AC и уг. $m=m$, какъ перекрестные при параллеляхъ AB и CD; уг. $n=n$ какъ перекрестные при параллеляхъ BC и AD; слѣд. $BC=AD$, $AB=CD$.

Доказывая эту теорему, мы вмѣстѣ съ тѣмъ доказали, что *параллелограммъ дѣлится діагональю на два равныхъ треугольника.*

153. Доказанное сейчасъ свойство сторонъ параллелограмма выражаютъ часто въ такой формѣ: *отрѣзки параллельныхъ между параллельными равны между собою*; такъ (чер. 238) $MP=NQ$ и $MN=PQ$, ибо фигура $MNPQ$ есть параллелограммъ.

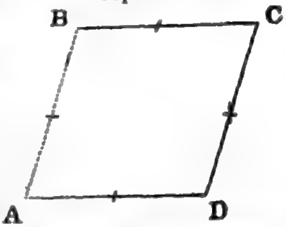
Чер. 241.



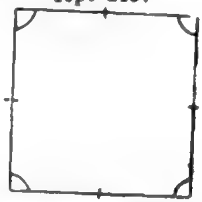
154. Если въ различныхъ точкахъ прямой AB (чер. 241) возставимъ къ ней перпендикуляры EF, KL, MN.... до встрѣчи съ прямой DC, которая параллельна AB, то всѣ эти перпендикуляры будутъ параллельны между собою и слѣд. по предъид. теор. равны между собою; эти перпендикуляры наз. разстояніями между параллельными линіями; поэтому *двѣ параллели на всемъ своемъ протяженіи находятся другъ отъ друга въ одинакомъ разстояніи.*

155. Если мы на сторонахъ уг. BCD (чер. 242) отложимъ части CB и CD, равныя между собой, и изъ B и D проведемъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя сторонамъ угла, то эти прямыя пересѣкутся съ сторонами угла и тогда образуется параллелограммъ $ABCD$, въ которомъ всѣ стороны равны между собою; такой параллелогр. наз. *ромбомъ*.

Чер. 242.



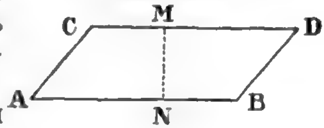
Чер. 243.



Прямоугольникъ (чер. 243), въ которомъ всѣ стороны равны; иначе говоря, ромбъ съ прямыми углами, наз. *квадратомъ*. Квадратъ есть правильный четыреуг., ибо въ немъ всѣ стороны и всѣ углы равны между собою.

156. Одна изъ сторонъ параллелограмма (какая угодно) принимается за *основаніе*; а перпендикуляръ, опущенный на основаніе изъ какой нибудь точки противоположной стороны, будетъ *высотой* параллелограмма. Такъ если въ параллелогр. $ABCD$ (чер. 244) примемъ за основаніе AB, то высота будетъ MN.

Чер. 244.



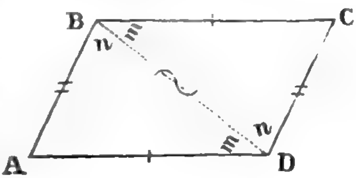
Въ прямоугольникѣ высотой будетъ сторона, смежная съ той, которая принимается за основаніе.

Въ квадратѣ основаніе и высота равны между собою.

157. Мы видѣли, что въ параллелограммѣ противоположныя стороны равны. Теорема эта допускаетъ двѣ обратныхъ.

1. *Четыреугольникъ, въ которомъ противоположныя стороны равны, есть параллелограммъ.* Пусть (чер. 245) въ 4-кѣ $ABCD$ сторона $BC=AD$ и $AB=CD$. Проведя діагональ BD, получимъ треугольн. $ABD=BDC$, ибо у нихъ BD общая, а прочія стороны равны по условію; слѣд. уг. $m=m$ и потому $BC \parallel AD$; уг. $n=n$ и $CD \parallel AB$; стало быть четыреуг. $ABCD$ есть параллелограммъ.

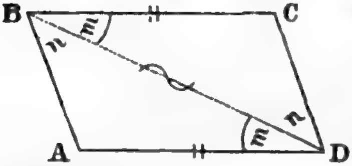
Чер. 245.



Теорему эту можно выразить еще такъ: *равныя прямыя, заключенныя между равными же, параллельны между собою.*

2. *Четыреугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны и параллельны, есть параллелограммъ.* Пусть (чер. 246) въ четыреуг. $ABCD$ сторона BC равна сторонѣ AD и параллельна ей; проведя діаг. BD, получимъ треуг. $ABD = BDC$, ибо у нихъ сторона BD общая, $BC = AD$ по условію; уг. $m = m$ по параллельности BC и AD; слѣд. уг. $n = n$ поэтому $AB \parallel CD$ и $ABCD$ есть параллелограммъ.

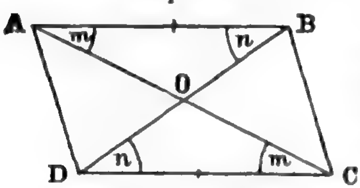
Чер. 246.



Теорему эту выражаютъ еще такъ: *прямыя, соединяющія концы двухъ равныхъ и параллельныхъ линій, притомъ не пересѣкающіяся между собой, сами равны и параллельны.*

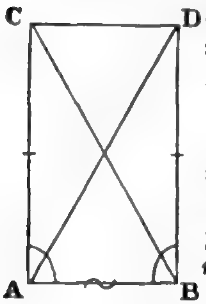
Разсмотримъ свойства діагоналей въ различныхъ видахъ параллелограммовъ.

Чер. 247.



158. *Діагонали параллелограмма дѣлятъ другъ друга пополамъ.* Дѣйствительно (чер. 247), треуг. $AOB = DOC$, потому что $AB = CD$, уг. $m = m$ и уг. $n = n$; слѣд. $BO = OD$ и $AO = OC$.

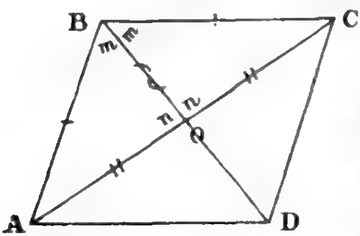
Чер. 248.



159. *Діагонали прямоугольника равны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ (чер. 248), треуг. $ABC = ABD$, потому что AB общая, $AC = BD$ и углы A и B прямые; слѣд. $CB = DA$.

160. *Діагонали ромба взаимно перпендикулярны и дѣлятъ углы ромба пополамъ.* Треуг. $AOB = BOC$ (чер. 249), потому что BO общая, $AB = BC$ какъ стороны ромба, $AO = OC$ по свойству діагоналей всякаго параллелограмма; слѣд. уг. $m = m$, уг. $n = n$; но углы n и n смежные, слѣд. они прямые; поэтому $BD \perp AC$.

Чер. 249.

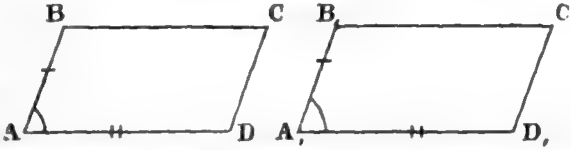


161. Такъ какъ квадратъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ ромбъ и прямоугольникъ, то діагонали квадрата 1) дѣлятъ другъ друга пополамъ, 2) взаимно перпендикулярны, 3) равны между собою и 4) дѣлятъ углы квадрата пополамъ.

162. Всѣ теоремы о свойствахъ діагоналей параллелограммовъ имѣютъ себѣ обратныя; напр. четыреугольникъ, въ которомъ діагонали дѣлятся пополамъ, есть параллелограммъ; или четыреугольникъ, въ которомъ діагонали дѣлятся пополамъ и перпендикулярны между собою, есть ромбъ, и т. под. Всѣ эти обратныя теоремы легко доказать, пользуясь условіями равенства треугольниковъ.

163. ***Два параллелограмма равны между собою, если они имѣютъ по двѣ равныя стороны и по равному углу между ними.*** Пусть напр. (чер. 250) $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ и уг. $A=A_1$; тогда и $CD=C_1D_1$, $BC=B_1C_1$, уг. $B=B_1$, $C=C_1$, $D=D_1$; поэтому, если мы наложимъ параллел. $ABCD$ на $A_1B_1C_1D_1$, такъ чтобы точка A упала въ A_1 и сторона AD пошла по A_1D_1, то очевидно, D упадетъ въ D_1, B въ B_1, C въ C_1; слѣд. всѣ стороны и углы пар—ма $ABCD$ совмѣстятся съ сторонами и углами $A_1B_1C_1D_1$, а потому и самые параллелограммы будутъ равны между собою.

Чер. 250.



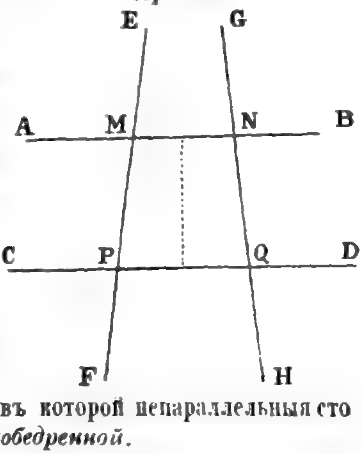
Слѣдствія. 1) Прямоугольники равны, если они имѣютъ по двѣ смежныя стороны соотвѣтственно равныя; иначе говоря—прямоугольники съ равными основаніями и высотами равны между собою.

2) Ромбы равны, если имѣютъ по равной сторонѣ и углу.

3) Квадраты равны, если сторона одного равна сторонѣ другаго.

4) Параллелограммъ опредѣляется двумя сторонами и угломъ между ними; поэтому, если при рѣшеніи задачи, на построеніе параллелогр. имѣются такія данныя, по которымъ можно опредѣлить двѣ стороны его и уголъ между ними, то можно построить пар—мъ, и притомъ только одинъ. Напр. пар—мъ можно построить по сторонѣ и двумъ діагоналямъ; ромбъ можно построить по двумъ діагоналямъ; прямоугольникъ по діагонали и углу между діагоналями или углу діагонали съ стороной; квадратъ—по діагонали и т. п.

Чер. 251.

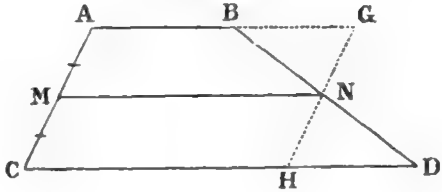


164. Кромѣ параллелограмма замѣчателенъ еще видъ четыреуг., который получимъ, если двѣ параллели AB и CD (чер. 251) пересѣчены двумя непараллельными между собой прямыми EF и GH; такой 4-къ $MNPQ$ наз. *трапеціей.* Параллельныя стороны трапеціи MN и PQ наз. ея *основаніями*; а разстояніе между ними, иначе говоря — перпендикуляръ, проведенный изъ какой нибудь точки одного основанія до встрѣчи съ другимъ, наз. *высотою.* Трапеція $KLMN$ (чер. 252), въ которой непараллельныя стороны равны между собою, наз. *равнобедренной.*

165. ***Если чрезъ средину одной изъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи проведемъ прямую линію, параллельную основаніямъ трапеціи, то и другая непараллельная сторона раздѣлится пополамъ, а проведенная линія*** (она наз. *средней линіей*) ***будетъ равна полсуммѣ основаній.*** Пусть (чер. 253) $AM=MC$ и $MN \parallel CD$; дока-

Чер. 252.

Чер. 253.



жемъ, что $BN=ND$ и $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$. Проведемъ изъ N прямую, параллельную AC, до встрѣчи съ CD и продолженіемъ AB: въ треуг. BNG и DNH стороны NG и NH равны между собою, потому что $NG=MA$ и $NH=MC$ какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными, а $MA=MC$ по условію. Кромѣ того, углы при N равны какъ вертикальные, уг. $G=$уг.H какъ перекрестные; слѣд. треуг. $BNG=DNH$ и потому $BN=ND$.

Прямая $MN=AG=AB+BG$ и

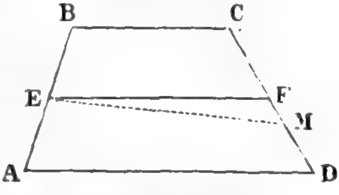
$$MN=CH=CD-DH.$$

Сложивъ эти два равенства, получимъ

$2MN=AB+CD$ (такъ какъ $BG=DH$ по равенству треуг. BNG и DNH); поэтому $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

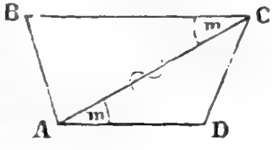
Обратно—*прямая, соединяющая средины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, параллельна ея основаніямъ.* Пусть (чер. 254), E и F будутъ средины сторонъ AB и DC; докажемъ, что $EF \parallel AD \parallel BC$. Допустивъ, что EF не $\parallel AD$ и BC, мы черезъ E могли бы провести $EM \parallel AD \parallel BC$; эта прямая EM раздѣлила бы CD въ M пополамъ; такимъ образомъ мы пришли бы къ нелѣпому заключенію, что прямая CD имѣетъ двѣ средины F и M.

Чер. 254.



Діагональ (чер. 255) дѣлитъ трапецію на два неравныхъ треуг.; для построенія каждаго треуг. надо имѣть 3 данныхъ; но какъ въ этихъ треуг. сторона AC общая и уг. $m=m$, то два изъ данныхъ, необходимыхъ для построенія одного изъ треуг.,

Чер. 255.



могутъ быть опредѣлены изъ другаго треуг; поэтому для построенія трапеціи нужно имѣть четыре данныхъ.

166. Задачи на вычисленіе. 1. **Сколько всего діагоналей можно провести въ 5-угольникѣ? въ 7-угол.? 15-угол.? 96-угол.? n-угольникѣ?**

2. Сколько сторонъ въ многоугольникѣ, полное число діагоналей котораго$=n$? 54? 4850? 464?

3. Чему равна сумма внутрен. угловъ 6-ка? 9-ка? 24-ка? 48-ка? 100-ка?

4. Сколько сторонъ имѣетъ многоуг., сумма угловъ котораго$=md$? $16d$? $12d$? $32d$? $76d$? $236d$?

5. Опредѣлить внутр. и внѣшній уг. правил. 12-угол.? правил. 15-ка? 36-ка?

6. Сколько сторонъ имѣетъ прав. многоуг., внутренній уг. котораго $= 108^0$? 135^0? 165^0? 175^0? $176^0\ 24'$? a^0? $^6/_5d$? $1{,}6d$? $\dfrac{m}{n}d$?

7. Въ какомъ правил. многоуг. внѣшній уг.$=40^0$? $22^0\,{}^1/_2$? 12^0? 1^0? b^0? d? $^1/_7d$? $^2/_3d$? $\dfrac{d}{n}$?

8. Опредѣлить число сторонъ многоуг., въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ вмѣстѣ съ однимъ изъ внѣшнихъ равна $11^1/_3d$? $25^3/_7d$? $870^0\ 35'$?

9. Опредѣлить число сторонъ мног-ка, если сумма внутр. угловъ его больше одного изъ внѣшнихъ на $28^3/_7d$? на $34^3/_4d$? на $951^0 15'$?

10. Опредѣлить уг. D четыр-ка $ABCD$, если $A={}^3/_4d$, $B={}^5/_6d$, $C={}^7/_8d$? $A=109^0\ 12'\ 36''$, $B=56^0\ 19'\ 29''$, $C=63^0\ 25'\ 27''$?

11. Въ 4-кѣ $ABCD$ діагональ AC дѣлитъ углы A и C такъ, что уг. $BAC={}^7/_9d$, $DAC={}^5/_{12}d$, $BCA={}^8/_{15}d$, $DCA={}^5/_{18}d$; опредѣлить углы 4-ка?

12. Одинъ уг. трапеціи$=131^0\ 47'\ 49''$, а другой$=128^0\ 9'\ 11''$; опредѣлить остальные углы?

13. Опредѣлить углы параллелограмма, если одинъ изъ нихъ$={}^5/_6d$? $76^0\ 15'\ 42''$?

14. Разность двухъ угловъ параллелогр. $= 37^0\ 25'$; опредѣлить углы его?

15. Опредѣлить углы ромба, если діагональ его образуетъ съ стороной уг. въ $26^0\ 27'\ 30''$?

16. Сторона ромба образуетъ съ діагоналями углы, разность которыхъ$={}^3/_{16}d$; опредѣлить углы ромба?

17. Периметръ параллелограмма $= 312$ дюйм., а разность между двумя сторонами его$=25$ дюйм.; опредѣлить стороны?

18. Периметръ трапеціи$=20$ ф.; непараллельныя стороны равны 4 и 3 ф.; опредѣлить длину средней линіи?

19. Въ 4-кѣ $ABCD$ уг. $A=2B$, $B={}^1/_3C$, $C={}^3/_4D$; опредѣлить углы 4-ка?

20. Какого вида будетъ 4-къ $ABCD$, если $A=80^0$, $B=100^0$, $C=75^0$? $A=72^0$, $B=108^0$, $D=108^0$? $A=32^0$, $B=148^0$, $C=32^0$?

21. Какого вида будетъ 4-къ $ABCD$, если $A+B=C+D$? $A+B=C+D$ и $A=C$? $A+B=C+D$ и $A=D$?

22. Опредѣлить сторону квадрата, периметръ котораго=периметру прямоугольника, имѣющаго основаніе 32 ф., а высоту 28 ф.?

167. Задачи на доказательство теоремъ. Доказать теоремы:

1. Въ параллелограммѣ та діагональ больше, которая лежитъ противъ тупаго угла.

2. Каждая прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія діагоналей параллелограмма и ограниченная точками пересѣченія ея съ сторонами параллелограмма, дѣлится точкой пересѣченія діагоналей пополамъ и сама дѣлитъ пополамъ периметръ парал-ма.

3. Точка пересѣченія діагоналей ромба одинаково отстоитъ отъ сторонъ его.

4. Точки, дѣлящія пополамъ стороны параллелограмма, образуютъ вершины новаго параллелограмма.

5. Точки, дѣлящія пополамъ стороны прямоугольника, образуютъ вершины ромба.

6. Точки, дѣлящія пополамъ стороны ромба, образуютъ вершины прямоугольника.

7. Если въ квадратѣ $ABCD$ отложить отъ вершинъ A, B, C, D соотвѣтственно на сторонахъ AB, BC, CD и DA четыре равныхъ отрѣзка, то полученныя точки образуютъ вершины новаго квадрата.

8. Если раздѣлить пополамъ всѣ внутренніе или внѣшніе углы параллелограмма, то эти линіи образуютъ прямоугольникъ.

9. Два параллелограмма равны, если имѣютъ соотвѣтственно равными: 1) двѣ стороны и діагональ, 2) сторону и двѣ діагонали, 3) сторону, уголъ и діагональ, 4) діагонали и уголъ между ними.

10. Въ равнобедренной трапеціи углы при каждомъ основаніи равны между собою. Составить и доказать обратныя теоремы?

11. Въ равнобедр. трапеціи діагонали равны, и отрѣзки ихъ, прилежащіе къ каждому основанію, тоже равны.

12. Двѣ трапеціи равны, если имѣютъ соотвѣтственно равными: 1) непараллельную сторону, параллельную сторону и два угла, прилежащихъ къ этой послѣдней; 2) обѣ параллельныя стороны, одну непараллельную и уголъ, прилежащій къ этой послѣдней; 3) параллельную сторону, обѣ непараллельныя стороны и уголъ, прилежащій къ меньшей изъ нихъ; 4) всѣ четыре стороны.

13. Сумма діагоналей 4-ка меньше суммы разстояній каждой, внутренней или внѣшней, точки отъ всѣхъ вершинъ его.

14. Два 4-ка равны, если имѣютъ соотвѣтственно равными: 1) три стороны и углы между равными сторонами, 2) всѣ стороны и по углу, одинаково расположенному; 3) всѣ стороны и по діагонали, одинаково расположенной; 4) по три угла и по двѣ смежныхъ стороны.

15. Два n—угольника равны, если имѣютъ равными: 1) $n-2$ слѣдующихъ другъ за другомъ сторонъ и $n-1$ угловъ, къ нимъ прилежащихъ; 2) $n-2$ другъ за другомъ слѣдующихъ угловъ и $n-1$ къ нимъ прилежащихъ и одинаково расположенныхъ сторонъ.

16. Если черезъ какую нибудь точку одной стороны треуг. провести прямыя линіи, параллельныя двумъ другимъ сторонамъ его, то

сумма периметровъ отсѣченныхъ такимъ образомъ двухъ треуг. будетъ равна периметру даннаго треуг.?

17. Если черезъ средину D одной стороны AB тр-ка ABC провести $DE \parallel$ другой сторонѣ BC, то DE разсѣчетъ пополамъ AC и будетъ равна $^1/_2$ BC.

18. Прямая, соединяющая средины двухъ сторонъ треуг., параллельна третьей сторонѣ и равна половинѣ ея.

19. Три высоты треуг. пересѣкаются въ одной точкѣ.

20. Прямыя, соединяющія вершины треуг. съ срединами противолежащихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, отсѣкающей отъ каждой изъ нихъ треть длины ея (начиная отъ соотвѣтствующей стороны).

21. Изъ всѣхъ треуг. съ угломъ A при вершинѣ, заключеннымъ между сторонами, сумма которыхъ постоянна, равнобедренный треуг. имѣетъ периметръ наименьшій.

168. Задачи на построеніе. 1. Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся отъ прямой AB въ разстояніи a?

2. Черезъ точку M провести сѣкущую къ двумъ параллелямъ AB и CD такъ, чтобы часть ея, заключенная между ними, равнялась прямой a?

Построить прямоугольникъ по даннымъ:
3. сторонамъ a и b? 4. сторонѣ a и уг. m между діагоналями? 5. діагонали e и углу m между діагоналями? 6. периметру p и діагонали e?

Построить квадратъ по даннымъ:
7. сторонѣ a? 8. діагонали e? 9. суммѣ діаг. e и стор. a? 10. разности діаг. e и стор. a?

Построить ромбъ по даннымъ:
11. стор. a и уг. m? 12. діагоналямъ e и f? 13. стор. a и разности угловъ $A-B$? 14. высотѣ h и уг A? 15. высотѣ h и діаг. e? 16. стор. a и суммѣ діаг. $e+f$?

Построить параллелограммъ по даннымъ:

17. сторонамъ a и b и уг. A между ними?

18. стор. a и b и высотѣ h, опущенной на b?

19. стор. a и діагоналямъ e и f?

20. діаг. e и f и углу m между ними?

21. стор. b, высотѣ h_1, опущенной на сторону a, и высотѣ h_2, опущенной на b?

22. периметру p, меньшей діагонали f и углу A, противолежащему ей?

23. перим. p, діагонали e и уг. A, изъ вершины котораго идетъ діагон. e?

Построить трапецію по даннымъ:

24. основанію d, непараллельной сторонѣ c, угламъ A и D при основаніи?

25. основаніямъ b и d, уг. B и C, прилежащимъ къ b, полагая $b>d$?

26. сторонамъ a, b, c, d, гдѣ $b \parallel d$ и $b>d$?

27. Построить четыреугольникъ по даннымъ:

1) сторонамъ a, b, c, d и діагон. e?

2) сторонамъ a, b, c, d и уг. A между a и b?

28. Построить многоугольникъ, равный данному?

29. Черезъ точку O внутри угла A провести прямую между сторонами угла такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ?

30. На продолженіяхъ сторонъ AB и AC треуг. ABC отложить два отрѣзка, сумма которыхъ равнялась бы третьей сторонѣ BC, притомъ чтобы прямая, соединяющая полученныя точки, имѣла наименьшую длину?

31. Найти геометр. мѣсто конечныхъ точекъ прямыхъ, имѣющихъ длину a и составляющихъ съ данной прямой AB уголъ = данному уг. m?

32. Найти геометр. мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма разстояній каждой изъ нихъ отъ двухъ данныхъ, параллельныхъ между собою, прямыхъ AB и CD равнялась прямой a?

33. Рѣшить предъид. зад., полагая, что AB не $\parallel$ CD?

34. Найти геометр. мѣсто точекъ такого свойства, чтобы разность разстояній каждой изъ нихъ отъ двухъ данныхъ, параллельныхъ между собою, прямыхъ AB и CD, которыхъ разстояніе = n, была равна a?

35. Рѣшить предъид. зад., полагая, что AB не $\parallel$ CD?

Построить треугольникъ по даннымъ:

36. прямымъ, соединяющимъ средины сторонъ съ вершинами противолежащихъ угловъ?

37. основанію a, углу при вершинѣ A и высотѣ h?

38. периметру p, высотѣ h и углу B при основаніи?

39. На билліардѣ, имѣющемъ видъ прямоугольника $ABCD$, находятся шары M и N; по какому направленію надо ударить шаръ M, чтобы онъ, отразившись отъ всѣхъ бортовъ билліарда, попалъ въ N?

40. Какой путь долженъ сдѣлать шаръ M (см. предъид. зад.), чтобы, отразившись отъ всѣхъ бортовъ билліарда, пройти черезъ первоначальное свое мѣсто?

41. Въ данный квадратъ $ABCD$ вписать другой данный квадратъ $MNPQ$?

42. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей O и O_1 провести общую сѣкущую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между окружностями = a?

43. Около треуг. MNP описать треуг. ABC?

44. Около треуг. ABC описать равносторонній треуг. наибольшаго периметра?

45. Между двумя окружностями O и O_1 провести прямую, параллельную прямой AB и имѣющую длину a?

46. На окружности даны точки A и B; провести черезъ нихъ двѣ хорды такъ, чтобы онѣ были параллельны между собою и чтобы сумма ихъ = a?

47. Къ двумъ окружностямъ O и O_1 провести двѣ равныя касательныя, такъ чтобы онѣ составляли между собой уг. n?

48. Найти геометр. мѣсто центровъ окружностей радіуса r, касательныхъ къ прямой AB?

49. Описать радіусомъ r окружность, которая касалась бы прямой AB, такъ чтобы центръ ея находился на прямой MN? на окружности C?

50. Къ двумъ окружностямъ O и O_1, которыхъ радіусы r и r_1, провести общую касательную?

51. **Провести прямую, касательную къ окружности O и пересѣкающую окружность O_1 такъ, чтобы часть этой прямой внутри окружности O_1 равнялась данной прямой a?**

52. **Провести сѣкущую къ двумъ окружностямъ O и O_1 такъ, чтобы часть ея внутри O равнялась a, а внутри O_1 равнялась b?**

ГЛАВА VII.

Пропорціональныя линіи и подобіе фигуръ.

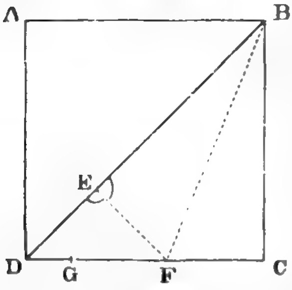
169. Четыре прямыя линіи наз. *пропорціональными*, если отношеніе двухъ изъ нихъ равно отношенію двухъ другихъ. Если напр. имѣемъ линіи AB, CD, EF, GH, и если AB во столько разъ больше или меньше CD, во сколько EF больше или меньше GH, то изъ этихъ линій можно составить пропорцію $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$. При этомъ одна изъ линій наз. *четвертой пропорціональной* къ тремъ остальнымъ; такъ CD есть 4-я пропорціональная къ AB, EF и GH.

Три линіи могутъ также составить пропорцію, напр. $\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{GH}$ или $\frac{CD}{AB}=\frac{GH}{CD}$; въ этомъ случаѣ линія CD наз. *средней пропорціональной* между AB и GH; а каждая изъ этихъ послѣднихъ линій будетъ *третьей пропорціональной* къ двумъ остальнымъ.

Если прямыя AB и CD соизмѣримы, то EF и GH также соизмѣримы, и тогда, принимая общую мѣру ихъ за единицу, можно всѣ четыре прямыя выразить числами—и величину четвертой пропорціональной или третьей пропорціональной можно опредѣлить совершенно точно. Что касается до средней пропорціональной, то она не всегда можетъ быть опредѣлена вполнѣ точно; дѣйствительно, если длины двухъ линій означимъ черезъ a и b, а длину средней пропорціональной черезъ x, то изъ пропорціи $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ найдемъ $x^2=ab$. или $x=\sqrt{ab}$, причемъ ab можетъ не быть полнымъ квадратомъ, и тогда x будетъ число ирраціональное или несоизмѣримое съ единицей. Если же линіи AB и CD не соизмѣримы, то отношеніе ихъ можно найти, какъ мы знаемъ, только приближенно; поэтому и для четвертой или третьей пропорціональной можетъ быть найдено число, не точно ее выражающее. Но во всѣхъ случаяхъ можно, какъ мы это увидимъ дальше, построить точно, т. е. посредствомъ циркуля и линейки, четвертую, третью и среднюю пропорціональную.

170. Чтобы показать, что *несоизмѣримыя линіи* дѣйствительно существуютъ, будемъ искать общую мѣру между діагональю квадрата и стороной его. Сторона квадрата меньше діагонали его; поэтому BC (черт. 256) можетъ отложиться по BD отъ точки B одинъ разъ; при этомъ получится остатокъ ED, который будетъ меньше BC. Дѣйствительно, $BC+CD > BD$ или $2BC > BD$, слѣд. $BC > {}^1/_2\, BD$; поэтому BC не можетъ уложиться въ BD два раза или болѣе. Теперь, чтобы отложить остатокъ ED на BC или, что тоже, на DC, проведемъ $EF \perp BD$; тогда треуг. BEF и BCF равны, ибо имѣютъ общую гипотенузу BF и $BE = BC$; слѣд. и $EF = CF$. Но $EF = ED$, такъ какъ треуг. EDF равнобедр., ибо въ немъ уг. $D = 45^\circ$; поэтому $ED = CF$. Итакъ мы отложили ED на CD одинъ разъ отъ точки C до F; затѣмъ отъ F до D она отложится еще одинъ разъ (ибо $ED < FD$) съ остаткомъ $DG < ED$, потому что въ равнобедр. треуг. DEF сторона $DE > {}^1/_2 FD$. Отсюда заключаемъ, что разность между діагональю и стороной квадрата укладывается въ сторонѣ квадрата два раза съ остаткомъ, меньшимъ этой разности. Этотъ остатокъ DG мы можемъ принять также за разность между діагональю DF и стороной DE квадрата, половину котораго представляетъ треуг. DEF, и на основаніи предъидущаго заключаемъ, что DG уложится въ DE также два раза съ остаткомъ. Тоже самое можно, очевидно, сказать и про всякій слѣдующій остатокъ, ибо каждый остатокъ будетъ представлять разность между діагональю нѣкотораго квадрата и стороной его. Такимъ образомъ мы никогда не найдемъ общей мѣры между BD и BC; поэтому *діагональ квадрата не соизмѣрима съ стороной его*. Означая длину діагонали черезъ l, длину стороны черезъ a, длины послѣдовательныхъ остатковъ черезъ r_1, r_2, r_3...., на основаніи вышеизложеннаго получимъ

Чер. 256.



$$l = a + r_1;\ a = 2r_1 + r_2;\ r_1 = 2r_2 + r_3 \ldots\ldots,$$

$$\text{откуда } \frac{l}{a} = 1 + \frac{r_1}{a};\ \frac{a}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1};\ \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2} \ldots\ldots$$

$$\text{или } \frac{l}{a} = 1 + \frac{r_1}{a};\ \frac{r_1}{a} = \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}};\ \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}} \ldots\ldots,$$

а слѣд. $\dfrac{l}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$. Итакъ отношеніе

діагонали квадрата къ сторонѣ его выражается суммою единицы и безконечной непрерывной періодической дроби.

Означивъ $\frac{l}{a}$ —черезъ x, получимъ

$$x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

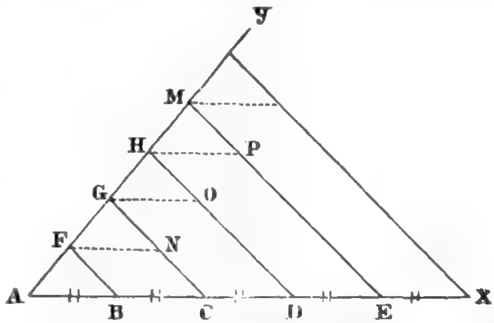
или $x-1=\frac{1}{2+x-1}$; $x-1=\frac{1}{x+1}$, откуда

$x^2-1=1$; $x^2=2$; $x=\sqrt{2}$. Такимъ образомъ отношеніе діагонали квадрата къ сторонѣ его выражается *ирраціональнымъ числомъ* $\sqrt{2}$, и зная длину стороны, мы не можемъ точно вычислить длину діагонали; между тѣмъ построить эту діагональ мы можемъ.

171. Основной теоремой для пропорціональности прямыхъ служитъ слѣдующая:

Если на одной изъ сторонъ угла XAY отложимъ отъ вершины его A (чер. 257) *равныя части $AB=BC=CD=\ldots\ldots$ и изъ точекъ B, C, $D\ldots$ проведемъ параллельныя между собой прямыя BF, CG, DH..до встрѣчи съ другой стороной, то на этой послѣдней получатся также равныя части $AF=FG=GH=\ldots$*

Чер. 257.

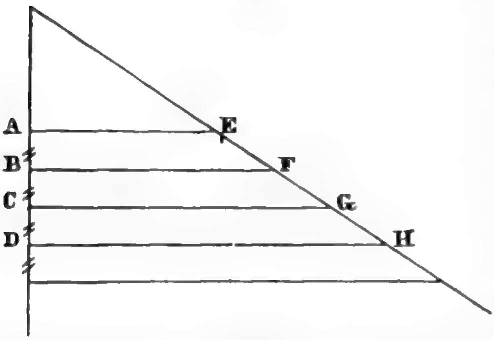


Для доказательства проведемъ изъ точекъ F, G, $H\ldots$ прямыя FN, GO, $HP\ldots$, параллельныя AX; тогда $FN=BC$, $GO=CD$, $HP=DE\ldots$ какъ параллельныя между параллельными; но $AB=$ $=BC=CD=\ldots$ по условію; слѣд. $AB=FN=GO=HP=\ldots$; поэтому треуг. AFB, FGN, $GHO\ldots$ имѣютъ по одной равной сторонѣ и по два равныхъ угла, на ней лежащихъ (уг. $FAB=$ уг. GFN какъ соотвѣтственные; уг. $ABF=FNG$ какъ углы съ параллельными сторонами); слѣд. эти треуг. равны между собою; а потому $AF=FG=GH\ldots$

Легко доказать также, что если (чер 258) отложить не отъ вершины угла, а отъ другой точки A части $AB=BC=CD=\ldots$ и провести $AE \parallel BF \parallel CG \parallel \ldots$, то $EF=FG=GH=\ldots$ Для этого стоитъ только изъ A провести прямую, параллельную другой сторонѣ угла.

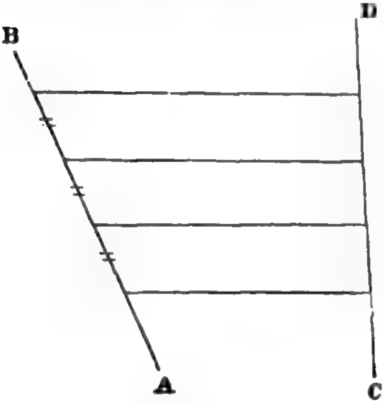
Если прямыя AB и CD (чер. 259), изъ которыхъ на первой отложены равныя части, не продолжены до пересѣченія, то, продолживъ ихъ, приведемъ этотъ случай къ предъидущему.

Чер. 268.

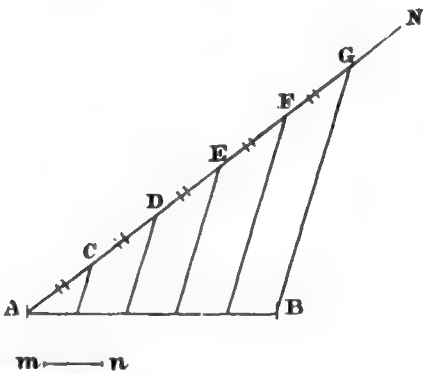


172. На предъидущей теоремѣ основано рѣшеніе задачи: *данную прямую* AB (чер. 260) *раздѣлить на нѣсколько частей*, напр. на 5. Для этого изъ A проведемъ произвольную прямую AN и отложимъ на ней отъ A пять частей, равныхъ какой нибудь прямой mn; точку G соединимъ съ B и изъ точекъ C, D.... проведемъ линіи, параллельныя GB; тогда и AB раздѣлится на 5 равныхъ частей.

Чер. 259.



Чер. 260.



173. *Прямая, параллельная одной сторонѣ треугольника, разсѣкаетъ двѣ другія стороны его на части пропорціональныя*

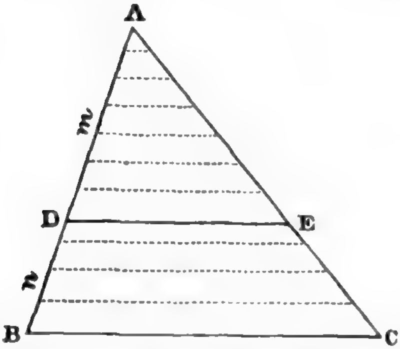
Пусть (чер. 261) $DE \parallel BC$; докажемъ, что $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. При этомъ могутъ быть два случая: 1) AD соизмѣрима съ DB и 2) AD и DB не соизмѣримы.

1. Пусть общая мѣра укладывается m разъ въ AD и n разъ въ DB; тогда отношеніе AD къ DB равно $\frac{m}{n}$. Проведя черезъ точки, которыя получатся при отложеніи общей мѣры на AD и DB, прямыя линіи, параллельныя BC, мы раздѣлимъ AE на m (§ 171), а EC на n равныхъ частей, и слѣд. отношеніе AE къ EC также

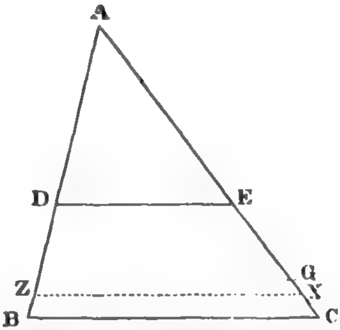
равно $\frac{m}{n}$. Итакъ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

2. Положимъ, что AD и DB несоизмѣримы. Чтобы доказать, что и въ этомъ случаѣ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Положимъ, что $\frac{AD}{DB}>\frac{AE}{EC}$; тогда, чтобы уравнять

Чер. 261.



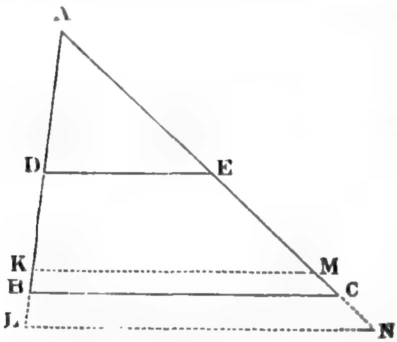
Чер. 262.



эти отношенія, надо второе отношеніе увеличить; а для этого надо уменьшить послѣдующій членъ, взявъ напр. EG вмѣсто EC; итакъ пусть $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EG}$. Раздѣлимъ прямую AE на равныя части, которыя были бы меньше GC, и станемъ одну изъ такихъ частей откладывать по EC, начиная отъ E; тогда одна изъ точекъ дѣленія упадетъ между G и C, напр. въ X; проведемъ $XZ \parallel BC$; тогда EX будетъ соизмѣрима съ AE; поэтому получимъ $\frac{AD}{DZ}=\frac{AE}{EX}$. Сравнивая эту пропорцію съ допущенной нами пропорціей $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EG}$, видимъ, что у нихъ предъидущіе члены равны: а потому послѣдующіе члены должны быть пропорціональны, т. е. $\frac{DZ}{DB}=\frac{EX}{EG}$. Но изъ чертежа видно, что въ этой пропорціи первое отношеніе меньше единицы (ибо $DZ<DB$), а второе больше единицы; слѣд. эта пропорція не вѣрна, а потому не вѣрна и допущенная нами пропорція $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EG}$. Итакъ $\frac{AD}{DB}$ не можетъ быть больше $\frac{AE}{EC}$. Подобнымъ образомъ можно доказать, что $\frac{AD}{DB}$ не можетъ быть и меньше $\frac{AE}{EC}$; для этого надо только вмѣсто EC взять бо́льшую линію и повторить предъидущія разсужденія. Итакъ и въ случаѣ несоизмѣримости имѣемъ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

Приведемъ еще другое доказательство предъидущей теоремы въ случаѣ несоизмѣримости прямыхъ AD и DB (чер. 263). Докажемъ сначала, что отношеніе $\frac{DB}{AD}$, вычисленное съ какой угодно точностью, напр. до $\frac{1}{n}$, равно отношенію $\frac{EC}{AE}$, вычисленному съ той же точностью. Для этого раздѣлимъ AD на n равныхъ частей и одну часть будемъ откладывать по DB отъ точки D; при этомъ она не можетъ уложиться въ DB безъ остатка, потому что AD и DB несоизмѣримы; а потому она уложится напр. m разъ до точки K, нѣсколько выше B, и $m+1$ разъ до точки L, ниже B; поэтому $\frac{DK}{AD}=\frac{m}{n}$; $\frac{DL}{AD}=\frac{m+1}{n}$; а такъ какъ $DB >DK$ и $< DL$, то $\frac{DB}{AD}>\frac{m}{n}$ и $<\frac{m+1}{n}$, или $\frac{DB}{AD}=\frac{m}{n}$ съ точностью $\frac{1}{n}$. Проведя изъ точекъ дѣленія прямой AB линіи, параллельныя BC, мы раздѣлимъ AE на n равныхъ частей, EM на m и EN на $m+1$ такихъ же частей; поэтому $\frac{EM}{AE}=\frac{m}{n}$, $\frac{EN}{AE}=\frac{m+1}{n}$, а слѣд. $\frac{EC}{AE}>\frac{m}{n}$ и $<\frac{m+1}{n}$; т. е. $\frac{EC}{AE}=\frac{m}{n}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Итакъ отношеніе $\frac{DB}{AD}$, вычисленное съ точностью до $\frac{1}{n}$, равно отношенію $\frac{EC}{AE}$, вычисленному съ такой же точностью.

Чер. 263.



Теперь не трудно доказать, что отношенія $\frac{DB}{AD}$ и $\frac{EC}{AE}$ не могутъ быть различны. Для этого допустимъ обратное; а именно положимъ, что между этими отношеніями существуетъ нѣкоторая разность, равная числу κ, т. е. что $\frac{DB}{AD}-\frac{EC}{AE}=\kappa$. Опредѣлимъ отношенія $\frac{DB}{AD}$ и $\frac{EC}{AE}$ съ точностью до какой нибудь дроби $\frac{1}{n}$, причемъ для n выберемъ такое большое число, чтобы дробь $\frac{1}{n}$ была меньше κ.

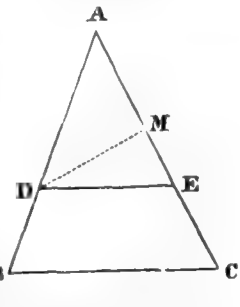
Тогда будемъ имѣть $\frac{DB}{AD}=\frac{m}{n}+x$; $\frac{EC}{AE}=\frac{m}{n}+y$, гдѣ x и y суть величины, на кототорыя истинныя отношенія $\frac{DB}{AD}$ и $\frac{EC}{AE}$ разнятся отъ ихъ приближенной величины $\frac{m}{n}$; x и y не равны между собою, ибо мы допустили, что отношенія не равны; притомъ x и y меньше $\frac{1}{n}$. Тогда $\frac{DB}{AD}-\frac{EC}{AE}=\frac{m}{n}+x-\frac{m}{n}-y=x-y$. Но разность отношеній мы означили черезъ κ; слѣд. $\kappa=x-y$. По условію $\kappa>\frac{1}{n}$; а x и y меньше $\frac{1}{n}$; разность же величинъ, меньшихъ $\frac{1}{n}$, очевидно, не можетъ быть равна величинѣ, которая больше $\frac{1}{n}$; стало быть равенство $\kappa=x-y$ невозможно; а потому нельзя допустить, что между отношеніями $\frac{DB}{AD}$ и $\frac{EC}{AE}$ существуетъ какая нибудь разность. Слѣд. $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$, а потому и $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

174. *Слѣдствіе.* Извѣстно, что въ каждой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ своему предъидущему или послѣдующему такъ, какъ сумма членовъ втораго отношенія относится къ своему предъидущему или послѣдующему; поэтому изъ выведенной нами пропорціи $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ получимъ $\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$ и $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$, или $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ и $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

Такимъ образомъ *прямая, параллельная одной изъ сторонъ треугол., раздѣляетъ прочія стороны на части пропорціональныя не только между собою, но и цѣлымъ сторонамъ.*

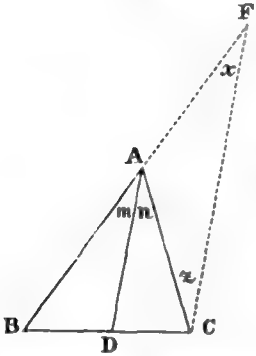
175. Обратно—*прямая, дѣлящая двѣ стороны треугольника на части пропорціональныя, параллельна третьей сторонѣ.* Пусть (чер. 264) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$; докажемъ, что DE BC. Для этого употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости; т. е. положимъ, что DE не параллельна BC; тогда изъ D можно провести параллельную BC, и пусть $DM \parallel BC$. По предъидущей теоремѣ имѣемъ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AM}$. Сравнивая эту пропорцію съ данной, видимъ, что у нихъ первые три члена равны; слѣд. и четвертые должны быть равны; т. е. $AE=AM$; а этого быть не можетъ, ибо AM есть часть AE; поэтому нельзя допустить, что DE не параллельна BC, и стало быть $DE \parallel BC$.

Чер. 264.



176. *Линія, дѣлящая уголъ треугольника пополамъ, разсѣкаетъ противолежащую сторону на части, пропорціональныя прилежащимъ сторонамъ.* Положимъ, что въ треуг. BAC (чер. 265) прямая AD дѣлитъ уг. A пополамъ; докажемъ, что $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Для этого продолжимъ BA и изъ C проведемъ $CF \parallel DA$; тогда въ треуг. CBF прямая AD, параллельная сторонѣ CF, раздѣлитъ двѣ другія стороны на части пропорціональныя; слѣд. $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AF}$. Но треуг. CAF равнобедренный, такъ какъ уг. $x=m$ какъ соотвѣтственные, а уг. $z=n$ какъ перекрестные, углы же m и n равны между собой по условію; поэтому $AF=AC$. Вставивъ въ предъидущую пропорцію AC вмѣсто AF, выведемъ то, что требуется доказать.

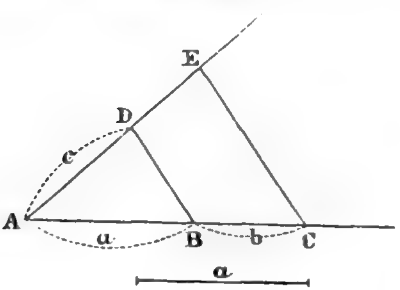
Чер. 265.



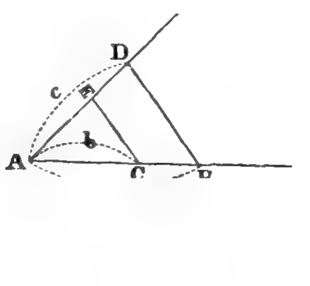
177. Обратно—*прямая, проходящая черезъ вершину угла треугольника и дѣлящая противоположную сторону на части, пропорціональныя прилежащимъ къ нимъ сторонамъ, дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ.* Пусть (чер. 265) $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$. Сдѣлавъ такое же построеніе, какъ въ предъидущей теоремѣ, получимъ $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AF}$. Сравнивая эту пропорцію съ данной, находимъ, что $AC=AF$; слѣд. треуг. AFC равнобедренный, а потому уг. $x=z$. Но $x=m$, $z=n$, слѣд. и $m=n$.

178. На теоремѣ § 173-го основано рѣшеніе задачи: *къ тремъ даннымъ прямымъ линіямъ* a, b, c (чер. 266) *найти четвертую*

Чер. 266.



Чер. 267.



пропорціональную. Для этого на одной изъ сторонъ произвольнаго угла откладываемъ отъ вершины его A часть $AB = a$, $BC = b$, а на другой часть $AD = c$; точку B соединяемъ съ D, а изъ C проводимъ $CE \parallel BD$; тогда ED будетъ искомая, ибо $\frac{a}{b} = \frac{c}{ED}$.

Можно также, отложивъ отъ A (чер. 267) часть $AB = a$, потомъ $AC = b$, $AD = c$, соединить B съ D и изъ C провести $CE \parallel BD$; тогда AE будетъ искомая линія.

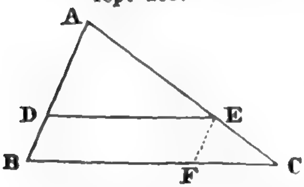
Если a, b, c будутъ длины данныхъ линій, а x длина четвертой пропорціональной, то изъ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ находимъ $x = \frac{bc}{a}$. Величина x можетъ быть вычислена вполнѣ точно лишь въ такомъ случаѣ, когда a, b, c суть числа раціональныя; но построить ее можно во всякомъ случаѣ, когда даны линіи, которыхъ длины суть a, b, c.

Если b будетъ равно c, то пропорція $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ обратится въ $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, и x будетъ третья пропорціональная къ a и b. Построить ее легко; нужно только начертить четвертую пропорціональную къ a, b и c.

Подобіе фигуръ.

179. Проведемъ въ треуг. ABC (чер. 268) прямую $DE \parallel BC$; тогда (§ 174) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. Проведя же изъ E прямую $EF \parallel AB$, получимъ $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$; но $BF = DE$, слѣд. $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$; поэтому въ треуг. ABC и ADE мы

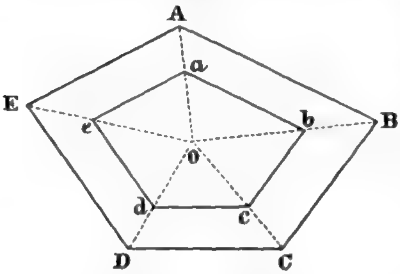
Чер. 268.



имѣемъ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$; кромѣ того уг. A у этихъ треуг. общій, уг. $B = D$ и $C = E$ какъ соотвѣтственные. *Треугольники, въ которыхъ углы одного равны порознь угламъ другаго, и стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, пропорціональны*, наз. *подобными.* Итакъ *прямая, параллельная одной изъ сторонъ тр—ка, образуетъ съ двумя другими сторонами новый треуг., подобный данному.* Стороны подобныхъ тр—ковъ, лежащія противъ равныхъ угловъ, наз. *сходственными.*

180. Если внутри многоуг. $ABCDE$ (чер. 269) возьмемъ какую нибудь точку O, проведемъ изъ нея прямыя линіи во всѣ вершины; затѣмъ, взявъ на OA произвольную точку a, проведемъ $ab \parallel AB$; далѣе проведемъ $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$ и наконецъ соединимъ e съ a, то легко вывести, что

Чер. 269.



$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea}$$

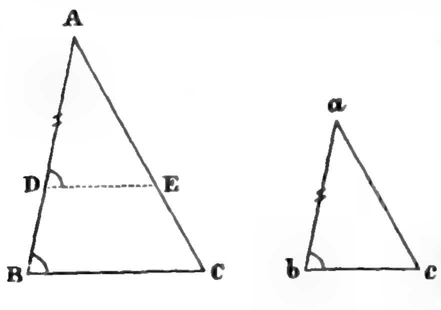
и что уг. $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, $E=e$. Итакъ многоуг. $abcde$ и $ABCDE$ имѣютъ равные углы и пропорціональныя стороны. ***Многоугольники, имѣющіе соотвѣтственно равные углы и пропорціональныя стороны***, наз. ***подобными***. Пропорціональныя стороны наз. также сходственными. Сходственныя стороны во всѣхъ вообще подобныхъ прямолинейныхъ фигурахъ лежатъ между равными углами; въ подобныхъ же треуг. онѣ лежатъ также и противъ равныхъ угловъ. Отношеніе между сходственными сторонами наз. ***отношеніемъ подобія***; такимъ образомъ если отношеніе подобія двухъ многоуг. равно напр. 3, то это значитъ, что каждая сторона одного многоуг. втрое больше сходственной ей стороны другаго. Знакъ подобія есть $\propto$.

181. ***Всѣ правильные одноименные многоуг. подобны***; напр. всякій правильный 6-къ подобенъ другому прав. 6-ку, потому что каждый уг. одного$=120^0$ и каждый уг. другаго$=120^0$; во сколько разъ одна изъ сторонъ одного 6-ка больше или меньше стороны другаго, во столько же разъ и каждая изъ прочихъ сторонъ одного больше или меньше стороны другаго, ибо всѣ стороны каждаго многоуг. равны между собою; стало быть стороны этихъ многоуг. пропорціональны.

Разсмотримъ, при какихъ условіяхъ бываютъ подобны треугольники.

182. ***Треугольники подобны, если углы одного равны порознь угламъ другаго.*** Пусть (чер. 270) уг. $A=a$, $B=b$, $C=c$; докажемъ, что $abc \infty ABC$. Отложимъ на AB отъ точки A часть $AD=ab$ и проведемъ $DE \parallel BC$; въ треуг. ADE и abc сторона $AD=ab$ по отложенію, уг. $A=a$ по условію, уг. $D=b$, потому что $D=B$ какъ соотвѣтственные, а $B=b$ по условію; слѣд.

Чер. 270.



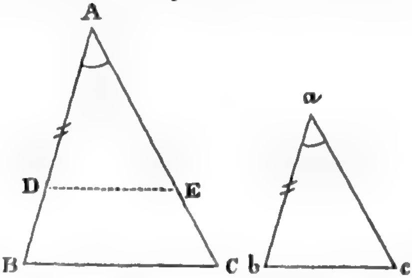
треуг. $ADE = abc$. Но $ADE \infty ABC$ по § 179; слѣд. и $abc \infty ABC$.

Слѣдствія. 1. *Треугольники подобны, если они имѣютъ по два равныхъ угла*, ибо тогда и третьи углы равны, какъ дополненія до двухъ прямыхъ.

2. *Прямоуг. треуг. подобны, если имѣютъ по равному острому углу.*

183. *Треугольники подобны, если они имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами.* Пусть (чер. 271) уг. $A =$ уг. a и $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$; докажемъ, что $abc \infty ABC$. Отложимъ $AD = ab$ и проведемъ $DE \parallel BC$; тогда получимъ треуг. $ADE = abc$. Дѣйствительно, въ этихъ треуг. сторона $AD = ab$ по отложенію, уг. $A = a$ по условію; легко доказать, что и сторона $AE = ac$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треуг. ABC и ADE слѣдуетъ, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; сравнивая эту пропорцію съ данной пропорціей $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, видимъ, что у нихъ первые три члена равны; слѣд. и послѣдніе должны быть равны, т. е. $AE = ac$. Итакъ треуг. $abc = ADE$; но $ADE \infty ABC$, слѣд. и $abc \infty ABC$.

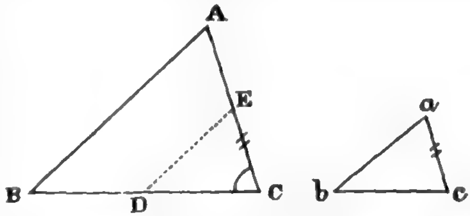
Чер. 271.



Слѣдствіе. *Прямоугольные треугольники подобны, если катеты ихъ пропорціональны.*

184. *Треугольники подобны, если двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другаго и притомъ углы, лежащіе противъ большихъ изъ этихъ сторонъ, равны между собою.* Пусть (чер. 272) $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, уг. $C = c$, притомъ сторона $AB > AC$ и $ab > ac$. Чтобъ доказать, что $abc \infty ABC$, отложимъ $CE = ca$ и проведемъ $ED \parallel AB$; тогда въ треуг. EDC и abc сторона $EC = ac$ по отложенію, уг. $C = c$ по условію; нетрудно доказать, что и сторона $ED = ab$; дѣйствительно, изъ подобія треуг. EDC и ABC слѣдуетъ, что $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC}$; а сравнивъ эту пропорцію съ данной пропорціей $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, видимъ, что въ нихъ

Чер. 272.

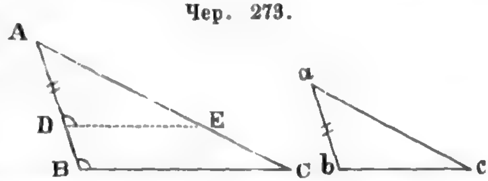


первые, третьи и четвертые члены равны; слѣд. и вторые члены равны, т. е. $ED = ab$. Итакъ треуг. EDC и abc имѣютъ по двѣ равныхъ стороны ($ED = ab$ и $EC = ac$) и по равному углу (уг. $C = c$), лежащему противъ бо́льшей изъ нихъ (сторона $ED > EC$, потому что $AB > AC$, а $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC}$ или $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{EC}$). Поэтому треуг. $EDC = abc$; но $EDC \infty ABC$, слѣд. и $abc \infty ABC$.

Слѣдствіе. *Прямоугольные треуг. подобны, когда гипотенуза и катетъ одного пропорціональны гипотенузѣ и катету другаго.*

185. *Треугольники подобны, если всѣ стороны ихъ пропорціональны.* Пусть (чер. 273) $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$; докажемъ, что $abc \infty ABC$.

Чер. 273.



Отложивъ $AD = ab$, проведемъ $DE \parallel BC$; тогда треуг. $ADE \infty ABC$; поэтому $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$. Сравнивая этотъ рядъ отношеній съ даннымъ рядомъ, находимъ, что первыя отношенія равны, ибо $ab = AD$; слѣд. вторыя отношенія равны, а также и третьи, т. е. $\frac{AC}{ac} = \frac{AC}{AE}$ и $\frac{BC}{bc} = \frac{BC}{DE}$. Но въ каждой изъ этихъ пропорцій предъидущіе члены равны, слѣд. и послѣдующіе равны, т. е. $ac = AE$ и $bc = DE$.

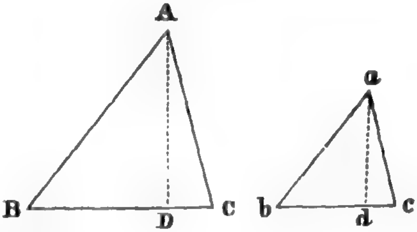
Итакъ треуг. abc и ADE имѣютъ стороны соотвѣтственно равныя, слѣд. $abc = ADE$. Но $ADE \infty ABC$, слѣд. и $abc \infty ABC$.

186. *Треугольники подобны, если стороны ихъ взаимно параллельны или перпендикулярны.* Означимъ черезъ A, B, C углы одного треуг., а черезъ a, b, c углы другаго, причемъ одинакія буквы означаютъ углы между параллельными или перпендикулярными сторонами. Какъ извѣстно, углы съ параллельными, а также и съ перпендикулярными сторонами, или равны между собою или составляютъ въ суммѣ $2d$. Допустить, что каждая изъ всѣхъ трехъ паръ угловъ равна $2d$, невозможно, потому что тогда сумма всѣхъ угловъ вышла бы $= 6d$, тогда какъ сумма всѣхъ угловъ въ двухъ треуг. должна быть $= 4d$. Также невозможно допустить и того, чтобы углы одной только пары были равны между собой, потому что тогда сумма угловъ прочихъ двухъ паръ равнялась бы $4d$, между тѣмъ какъ сумма всѣхъ шести угловъ должна быть $4d$. Итакъ необходимо допустить, что углы двухъ паръ равны между собою, напр. что $A = a$, $B = b$; а тогда и третьи углы C и c должны быть равны какъ дополненія до $2d$. Слѣд. треуг. подобны.

187. Первыя четыре теоремы о подобіи треуг. (§§ 182, 183, 184 и 185) соотвѣтствуютъ четыремъ случаямъ равенства косоугольныхъ треуг., съ той однакоже разницей, что для равенства треуг. необходимы три условія, тогда какъ для подобія достаточно двухъ. Дѣйствительно, условія первой теоремы приводятся къ двумъ равенствамъ: уг. $A=a$, $B=b$ такъ какъ третье ($C=c$) есть слѣдствіе двухъ первыхъ. Условія второй и третьей теоремъ заключаютъ въ себѣ два равенства: равенство двухъ отношеній и равенство двухъ угловъ. Наконецъ условія третьей теоремы также представляютъ два равенства $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}$ и $\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc}$, такъ какъ третье равенство $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$ есть слѣдствіе двухъ первыхъ.

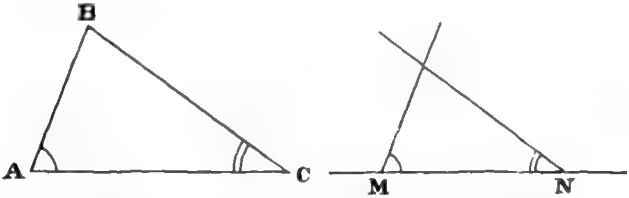
188. *Въ подобныхъ треугольникахъ высоты пропорціональны сторонамъ.* Пусть (чер. 274) $ABC \infty abc$; проведя высоты AD и ad, получимъ два подобные треуг. ABD и abd, ибо уг. $B=b$ по подобію треуг. ABC и abc; уг. $D=d$ какъ прямые. Изъ подобія ABC и abc получаемъ $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$; а изъ подобія ABD и abd имѣемъ $\frac{AB}{ab}=\frac{AD}{ad}$; слѣд. $\frac{AD}{ad}=\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab}$.

Чер. 274.



189. Чтобъ построить треуг., подобный данному, можно воспользоваться однимъ изъ вышеизложенныхъ условій подобія треуг. Напр. чтобъ построить треуг., подобный ABC (чер. 275), беремъ

Чер. 275.

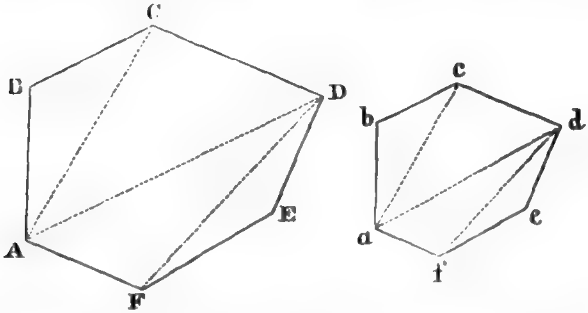


произвольную прямую MN и строимъ при точкахъ M и N углы, равные A и C.

Или, построивъ при M уголъ $=A$, откладываемъ на сторонѣ его такую часть, которая была бы четвертой пропорціональной къ AB, AC и MN, и т. под.

190. *Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ* *одинакаю числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треуг.* Пусть (чер. 276) $ABC \infty abc$, $ACD \infty acd$, $ADF \infty adf$ и $DEF \infty def$; докажемъ, что $ABCDEF \infty abcdef$. Углы этихъ

Чер. 276.



многоуг. равны или какъ углы подобныхъ треуг. (напр. уг. $B = b$, $E = e$) или какъ суммы равныхъ угловъ подобныхъ треуг. (напр. уг. $D = d$, ибо оба эти угла состоятъ изъ трехъ, соотвѣтственно равныхъ, угловъ).

Стороны многоуг. пропорціональны. Дѣйствительно, такъ какъ треуг. $ABC \infty abc$, то $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$. Изъ подобія треуг. ACD и acd слѣдуетъ $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd} = \frac{AD}{ad}$. Изъ подобія треуг. ADF и adf имѣемъ $\frac{AD}{ad} = \frac{AF}{af} = \frac{DF}{df}$. Наконецъ такъ какъ DEF и def подобны, то $\frac{DF}{df} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef}$.

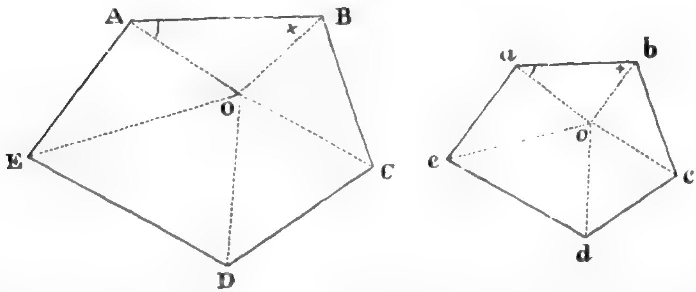
Такъ какъ послѣднее отношеніе перваго ряда составляетъ первое отношеніе втораго, послѣднее отношеніе втораго составляетъ первое отношеніе третьяго, послѣднее отношеніе третьяго есть первое отношеніе четвертаго, то всѣ эти отношенія равны, и

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{AF}{af}.$$

Итакъ углы многоуг. соотвѣтственно равны и стороны пропорціональны; слѣд. многоуг. подобны.

191. Обратно: *если многоугольники подобны, то ихъ можно раздѣлить на одинакое число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.* Положимъ, что (чер. 277) многоуг. $ABCDE \infty abcde$. Возьмемъ внутри многоуг. $ABCDE$ произвольную точку O и соединимъ ее со всѣми его вершинами; затѣмъ въ многоуг. $abcde$ построимъ при точкахъ a и b прямой ab углы bao и abo, соотвѣтственно равные угл. BAO и ABO, и точку *o* соединимъ со всѣми вершинами многоуг. *abcde*. Тогда многоуг. *ABCDE* и *abcde* раздѣлятся на одинакое число треуг., и эти треуг. будутъ соотвѣтственно подобны. Дѣйствительно, треугольникъ $ABO \infty abo$, такъ какъ они по построенію имѣютъ по два равныхъ угла; изъ подобія ихъ слѣдуетъ, что $\frac{OB}{ob}=\frac{AB}{ab}$; но изъ подобія многоуг. имѣемъ $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$; слѣд. $\frac{OB}{ob}=\frac{BC}{bc}$; кромѣ того уг. $OBC=obc$,

Чер. 277.



ибо $OBC=ABC-ABO$, а $obc=abc-abo$; уголъ же $ABC=abc$ по подобію многоуг., а $ABO=abo$ по построенію; слѣд. треуг. *OBC* и *obc* имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами; поэтому они подобны. Изъ подобія *OBC* и *obc* выведемъ подобіе *OCD* и *ocd* и такъ далѣе до конца.

192. Точки *O* и *o* (чер. 277) назыв. *сходственными* точками. Итакъ сходственными точками въ подобныхъ многоуг. наз. такія точки, которыя расположены въ плоскостяхъ этихъ многоуг. и имѣютъ то свойство, что отъ соединенія каждой изъ нихъ съ концами двухъ сторонъ получаются подобные и одинаково расположенные треугольники.

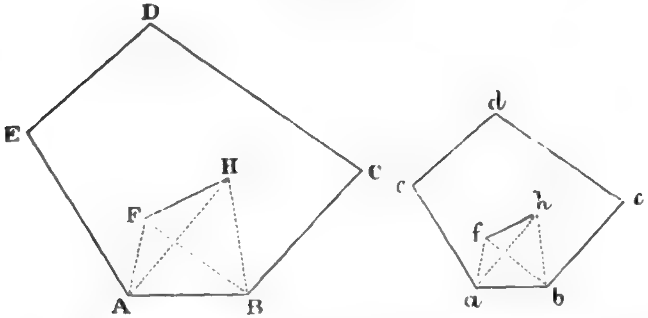
Если точка *O* совпадетъ съ *A*, то *o* совпадетъ съ *a*, прямыя *OA*, *OB*.... и *oa*, *ob*.... обратятся въ діагонали, проведенныя изъ вершинъ равныхъ угловъ *A* и *a*; поэтому *діагонали, проведенныя изъ вершинъ равныхъ угловъ подобныхъ многоугольниковъ, разбиваютъ ихъ на подобные и одинаково расположенные треугольники.*

193. Двѣ прямыя линіи, расположенныя въ плоскостяхъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ, наз. *сходственными*, если концы ихъ суть попарно сходственныя точки. По этому опредѣленію діагонали, проведенныя изъ вершинъ равныхъ угловъ, будутъ сходственными прямыми.

194. *Въ подобныхъ многоуг. сходственныя прямыя линіи* *относятся какъ сходственныя стороны.* Пусть (чер. 278) $ABCDE \infty abcde$ и прямыя FH, fh сходственныя. Такъ какъ треуг. $ABH \infty abh$ и $ABF \infty abf$, то уг. $ABH = abh$ и уг. $ABF = abf$, слѣд. уг. $ABH -$ уг. $ABF =$ уг. $abh -$ уг. abf, или уг. $FBH =$ уг. fbh.

Сверхъ того изъ подобія тѣхъ же треуг. имѣемъ

Чер. 278.



$$\frac{BH}{bh} = \frac{AB}{ab} \text{ и } \frac{BF}{bf} = \frac{AB}{ab}, \text{ слѣд. } \frac{BH}{bh} = \frac{BF}{bf}; \text{ поэтому}$$

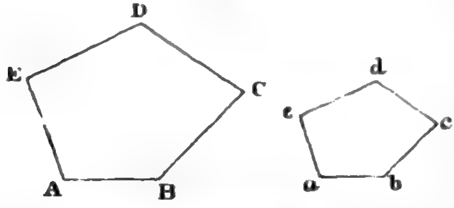
треуг. $BFH \infty bfh$, слѣд. $\frac{FH}{fh} = \frac{BH}{bh}$; но $\frac{BH}{bh} = \frac{AB}{ab}$; слѣд.

$$\frac{FH}{fh} = \frac{AB}{ab},$$ что и требовалось доказать.

195. Въ подобныхъ треуг. высоты, опущенныя на сходственныя стороны; прямыя, дѣлящія пополамъ равные углы; прямыя, соединяющія средины сходственныхъ сторонъ съ вершинами противолежащихъ угловъ, будутъ соотвѣтственно сходственными прямыми; поэтому всѣ эти прямыя относятся какъ сходственныя стороны. Впрочемъ это можно доказать и непосредственно, подобно тому, какъ въ § 188 доказано относительно высотъ.

196. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ сходственныя стороны.* Дѣйствительно, если (чер. 279) $ABCDE$ подобенъ $abcde$, то

Чер. 279.

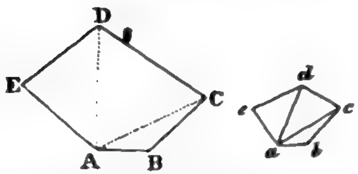


$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots$$

Но въ ряду равныхъ отношеній сумма предъидущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ какъ одинъ изъ предъидущихъ къ своему послѣдующему; слѣд. $\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots} = \frac{AB}{ab}$.

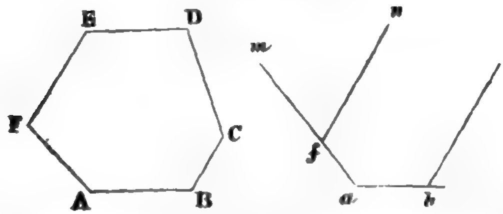
197. Чтобы построить многоуг., подобный данному $ABCDE$ (чер. 280), разбиваемъ данный многоуг. діагоналями на треуг.; потомъ беремъ произвольную прямую ab и строимъ на ней треуг. $abc \infty ABC$; далѣе на ac строимъ $acd \infty ACD$; наконецъ на ad строимъ $ade \infty ADE$; тогда и получимъ многоуг. $abcde \infty ABCDE$.

Чер. 280.



Другое рѣшеніе. На произвольной прямой (чер. 281) строимъ при

Чер. 281.



a и b углы, равные уг. A и B, и откладываемъ на am часть af, которая была бы четвертой пропорціональной къ AB, ab и AF; затѣмъ при f строимъ уголъ $= F$, откладываемъ на fn четвертую пропорціональную къ AF, af и FE и т. д.

На свойствахъ подобныхъ треуг. основано устройство слѣдующихъ инструментовъ.

198. Дѣлительный циркуль (compas de reduction). Приборъ этотъ, служащій для дѣленія прямой линіи на равныя части, состоитъ изъ двухъ ножекъ AB и CD (чер. 282), съ обоихъ концовъ заостренныхъ; вдоль обѣихъ ножекъ сдѣланы прорѣзы, и ножки соединяются посредствомъ подвижнаго винта O.

Чтобы посредствомъ этого прибора найти напр. пятую часть прямой MN, закрѣпляютъ винтъ O въ такомъ мѣстѣ, чтобы разстояніе BO было въ 5 разъ больше OA; затѣмъ ставятъ приборъ такъ, чтобы концы B и D его приходились въ точкахъ M и N; тогда разстояніе между концами C и A будетъ равно $^1/_5$ MN. Дѣйствительно, изъ подобія треуг. BOD и COA имѣемъ $\frac{CA}{BD} = \frac{OA}{OB}$; но $OA = {}^1/_5\, OB$, слѣд. и $CA = {}^1/_5\, BD = {}^1/_5\, MN$.

Чтобы знать, гдѣ именно надо остановить винтъ O, на ножкахъ AB и CD поставлены цыфры 1, 2, 3, 4....

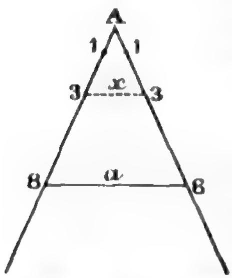
199. Пропорціональный циркуль (compas de proportion) состоитъ (чер. 283) изъ двухъ равныхъ линеекъ, соединенныхъ шарньеромъ и раздѣленныхъ на одинакое число равныхъ частей; части эти отмѣчены цыфрами 1, 2... Посредствомъ этого прибора можно опредѣлить линію, находящуюся къ данной линіи въ данномъ отношеніи;

Чер. 282.

Чер. 283.

напр. чтобы найти прямую, которая относилась бы къ a (чер. 284)

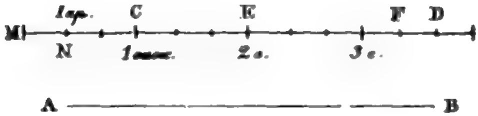
Чер. 284.



какъ $3:8$, беремъ пропорціональнымъ циркулемъ прямую a такъ, чтобы она помѣстилась между точками, означенными цыфрами 8; тогда искомая прямая x будетъ разстояніе между точками 3 — 3; дѣйствительно изъ подобія треуг. $A33$ и $A88$ имѣемъ $\frac{x}{a} = \frac{A3}{A8} = \frac{3}{8}$. Разстояніе между точками 1—1 представитъ $\frac{1}{8}a$; слѣд. этимъ приборомъ можно также и дѣлить данную прямую на равныя части.

200. Масштабъ. Масштабъ служитъ для того, чтобы можно было начертить какую нибудь прямую линію въ меньшемъ видѣ, и чтобы по длинѣ начерченной линіи можно было опредѣлить длину той линіи, которую изображаетъ начерченная. Чтобы построить масштабъ, проводятъ прямую линію, откладываютъ по ней нѣсколько разъ какую нибудь часть MN (чер. 285) и принимаютъ эту часть за аршинъ, сажень, версту..., вообще за какую нибудь линейную единицу. Положимъ, что MN означаетъ 1 арш.; тогда линія MC изобразитъ сажень, ME—двѣ сажени и т. под. Если надо изобра-

Чер. 285.



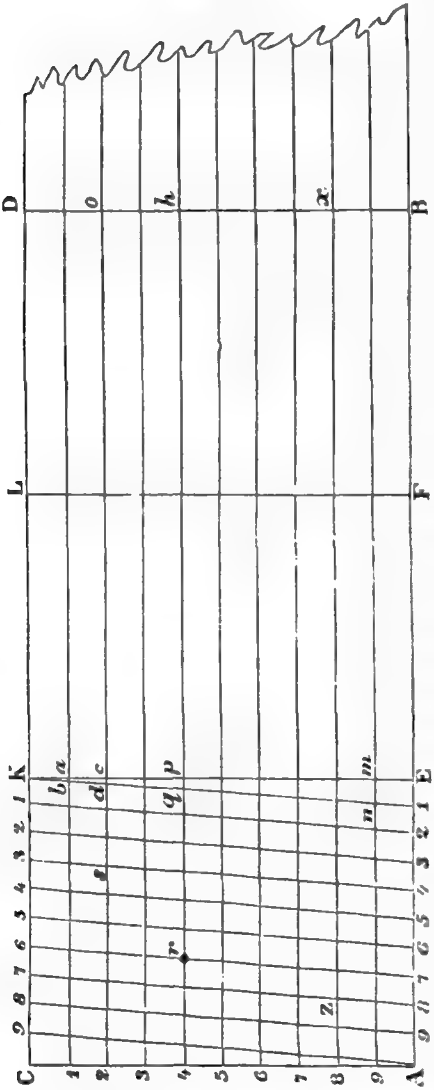
зить линію въ 3 саж. 2 арш. или въ 11 арш., то нужно начертить линію $=MD$. Наоборотъ, если AB представляетъ напр. длину дома, начерченную по предъидущему масштабу, то чтобы узнать, сколько аршинъ въ этой длинѣ, мы беремъ линію AB циркулемъ и накладываемъ на масштабъ такъ, чтобы точка A упала въ M; если при этомъ точка B упадетъ въ F, то линія $AB=10MN$, слѣд. длина дома $=10$ арш. Если B упадетъ между F и D, то 10 арш. будетъ выражать длину дома съ точностью до 1 арш.

Обыкновенно строятъ такой масштабъ, чтобы посредствомъ него можно было чертить сотыя доли версты, сажени..., вообще принятой единицы, и наоборотъ, чтобы можно было измѣрять линіи съ точностью до $^1/_{100}$ вер., саж.... Для этого нужно было бы линію m (чер. 286), принятую за единицу, раздѣлить на 100 равныхъ частей; но какъ эта линія всегда бываетъ небольшая (обыкновенно 1 дюймъ), то сотыя части ея будутъ весьма мелки, и для нахожденія ихъ строятъ такъ называемый *поперечный* масштабъ. Для этого проводятъ двѣ параллельныя прямыя AB и CD (чер. 287) и къ нимъ перпендикуляръ AC; откладываютъ по AB части AE, EF, FB..., равныя линіи m (чер. 286) и изъ точекъ E, F, B.... проводятъ линіи, параллельныя AC; тогда на CD отдѣлятся части CK, KL, LD.., равныя m. Затѣмъ линію AE дѣлятъ на 10 равныхъ частей; первую точку дѣленія, считая отъ E, соединяютъ съ K, а изъ точекъ 2, 3, 4..,. линіи AE проводятъ прямыя, параллельныя линіи $1K$; этими прямыми линія CK раздѣлится на 10 частей, которыя будутъ равны между собою и равны частямъ линіи AE. Линію AC также дѣлятъ на 10 равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проводятъ линіи, параллельныя AB и CD; тогда часть ab будетъ равна $^1/_{10}$ прямой $1E$ или $^1/_{100}\ AE$; $cd={}^2/_{10}\ 1E$ $={}^2/_{100}\ AE$..., $mn={}^9/_{100}\ AE={}^9/_{100}\ m$. Дѣйствительно, $\frac{ab}{1E}=\frac{Ka}{KE}$; $\frac{cd}{1E}=\frac{Kc}{KE}$; но $Ka={}^1/_{10}\ KE$; $Kc={}^2/_{10}\ KE$...., слѣдоват. $ab=$ $={}^1/_{10} 1E$; $cd={}^2/_{10}\ 1E={}^2/_{100}AE$...

Чер. 286.

Положимъ теперь, что, принимая линію AE за сажень, нужно начертить линію въ 2,64 саж.; тогда надо взять по масштабу линію, равную $2AE+{}^6/_{10}AE+$ $+\,{}^4/_{100}\;AE$. Прямая $DK=$ $=2AE$; линія $K6={}^6/_{10}AE$; $pq={}^4/_{100}\;AE$; $DK+$ $+K6+pq$ и будетъ слѣд. равна 2,64 AE. Но такъ какъ $DK=hp$, а $K6=qr$, то линія hr и будетъ$=$2,64 AE.

Чер. 287.



Чтобы взять по масштабу линію опредѣленной длины, поступаютъ на практикѣ слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что нужно начертить линію въ 2,78 саж. Беремъ циркуль и одну ножку его ставимъ въ точкѣ D*, а другую въ точкѣ 7 линіи KC; потомъ двигаемъ циркуль внизъ, такъ чтобы одинъ конецъ его шелъ по линіи DB, а другой по косвенной линіи, означенной цыфрами 7—8, притомъ такъ, чтобы оба конца циркуля находились на однихъ и тѣхъ же параллеляхъ (для этого циркуль надо понемногу раздвигать); циркуль подвигаемъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока онъ не дойдетъ до 8-й параллели, т. е. пока не займетъ положенія xz; xz и будетъ равна 2,78 AE или 2,78 саж.

Если нужно измѣрить масштабомъ какую нибудь прямую, напр. MN (чер. 288), то беремъ ее циркулемъ, потомъ прикладываемъ циркуль къ линіи CD такъ, чтобы одинъ конецъ его находился въ одной

---

* Если бы требовалось взять линію въ 1,78 саж., то конецъ циркуля надо бы поставить въ точкѣ L, т. е. на первомъ дѣленіи, считая отъ K; если бы въ 3 саж., то на третьемъ дѣленіи, и т. д.

изъ точекъ K, L, D, а другой между C и K; положимъ, что, сдѣлавъ это, найдемъ, что одинъ конецъ придется въ D, а другой

Чер. 288.

между точками 3 и 4; тогда $MN = 2AE + {}^3/_{10}\,AE +$ нѣсколько сотыхъ AE. Чтобы найти, сколько именно сотыхъ, мы, не измѣняя растворенія циркуля, двигаемъ его внизъ такъ, чтобы правый конецъ его шелъ по линіи DB, и чтобы оба конца всегда были на одной параллели; продолжаемъ двигать циркуль до тѣхъ поръ, пока лѣвый конецъ его встрѣтитъ одну изъ наклонныхъ линій; если это случится, когда ножки циркуля будутъ на второй параллели, т. е. одна будетъ въ o, а другая въ s, то данная линія $MN = os = 2{,}32\ AE$.

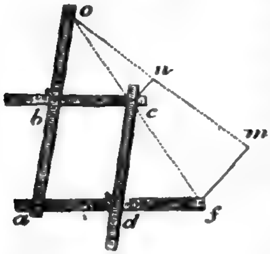
Описанный нами масштабъ есть масштабъ сотенный, и посредствомъ него можно съ точностью начертить линію, содержащую десятыя и сотыя доли принятой единицы; такъ если линія AE означаетъ сажень, то можно начертить всякую линію, содержащую десятыя и сотыя доли сажени; если AE означаетъ 100 верстъ, то можно начертить линію, содержащую сотни, десятки и единицы верстъ. Если же требовалось бы, принимая AE за сажень, начертить линію въ 3,4825 саж., то мы должны тысячныя и слѣдующія доли отбросить и чертить линію въ 3,48 саж.; стало быть, требуемая линія будетъ начерчена не точно, а только приближенно. Замѣтимъ при этомъ, что если первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ будетъ больше 5-и, то предъидущую надо увеличить единицею; это основано на томъ, что если напр. вмѣсто 3,487 мы возьмемъ 3,48, то ошибемся на 0,007; взявши же 3,49, сдѣлаемъ ошибку только на 0,003, т. е. меньше первой.

Мы уже говорили, что линія AE (чер. 287) бываетъ обыкновенно равна 1 дюйму; что же касается до того, какую линейную единицу должна представлять AE, то это зависитъ отъ того, какой длины линію нужно представить въ уменьшенномъ видѣ. Если бы напр. мы хотѣли изобразить линію длиной въ версту, то нельзя было бы принять дюймъ за сажень, ибо линія въ 500 дюйм. не умѣстится на листѣ бумаги. При черченіи изображенія дома принимаютъ обыкновенно дюймъ за сажень; при черченіи изображенія поля берутъ масштабъ 100 и болѣе саж. въ дюймѣ; географическія карты чертятся по масштабу 100 и болѣе верстъ въ дюймѣ.

201. Пантографъ. Приборъ этотъ, служащій для черченія подобныхъ многоугольниковъ, состоитъ (чер. 289) изъ четырехъ линеекъ, соединенныхъ между собой въ точкахъ a, b, c, d такъ, чтобы разстояніе ab было равно cd, $bc = ad$, и чтобы три точки

a, c и f находились на одной прямой линіи; тогда, если сдвигать или раздвигать линейки, фигура $abcd$ всегда будетъ параллелограммомъ.

Чер. 289.



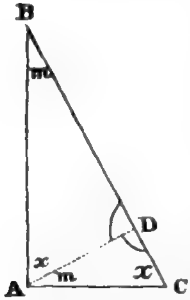
Если точку o укрѣпимъ на бумагѣ, а въ точкахъ c и f вставимъ карандаши и подвинемъ карандашъ f такъ, чтобы онъ начертилъ прямую fm, то карандашъ c начертитъ прямую cn, параллельную fm; притомъ, такъ какъ треуг. $ocn \infty ofm$, то $\frac{cn}{fm}=\frac{oc}{of}$; изъ подобія же треуг. ocb и ofa имѣемъ $\frac{oc}{of}=\frac{ob}{oa}$; слѣд. $\frac{cn}{fm}=\frac{ob}{oa}$; т. е. линія cn будетъ составлять такую же часть линіи fm, какую ob составляетъ отъ oa; если напр. $ob = {}^1/_2\, oa$ или $ob = ba$, то и $cn={}^1/_2\, fm$.

Положимъ, что посредствомъ пантографа нужно начертить многоугольникъ, подобный данному, притомъ такой, чтобы стороны его были втрое меньше сходственныхъ имъ сторонъ даннаго многоуг. Тогда мы соединяемъ линейки прибора такъ, чтобы разстояніе ob составляло ${}^1/_3\, oa$ (для этого въ линейкахъ сдѣлано нѣсколько отверстій въ равномъ одно отъ другаго разстояніи), потомъ укрѣпимъ приборъ въ точкѣ o, а въ точкѣ c утвердимъ карандашъ; если теперь вести точку f по периметру даннаго многоуг., то карандашъ c и опишетъ требуемый многоугольникъ.

Соотношеніе между сторонами треугольника.

202. *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы; а каждый катетъ есть средняя пропорціональная между цѣлой гипотенузою и прилежащимъ отрѣзкомъ.* Положимъ (чер. 290), что въ треуг. BAC уг. A прямой и $AD \perp BC$; тогда треуг. ABD и ADC будутъ подобны между собою и подобны всему треуг. ABC. Дѣйствительно, въ треуг. ABD и ADC углы при D равны какъ прямые, уг. $m=m$ какъ углы съ перпендикулярными сторонами ($BA \perp AC$ и $BD \perp AD$); слѣд. $x=x$, и треуг. $ABD \infty ADC$. Чтобы составить пропорцію изъ сторонъ этихъ треуг., беремъ отношеніе двухъ сторонъ треуг. ABD, именно $\frac{BD}{AD}$; сторона BD лежитъ противъ угла x; въ треуг. ADC противъ угла x лежитъ AD; сторона AD въ треуг. ABD лежитъ противъ уг. m;

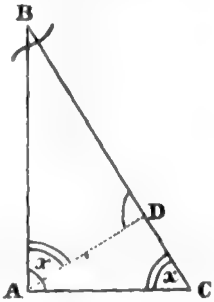
Чер. 290.



въ треуг. ADC лежитъ противъ уг. m сторона DC. Итакъ стороны AD и DC треуг. ADC будутъ сходственны сторонамъ BD и AD тр—ка ABD; слѣд. $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC}$.

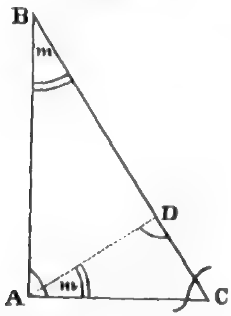
Треуг. $ABD \infty ABC$ (чер. 291), ибо у нихъ уг. B общій, $A=D$ какъ прямые, слѣд. $x=x$. Чтобъ составить пропорцію изъ сторонъ тр—ковъ, беремъ изъ треуг. ABD отношеніе $\frac{AB}{BD}$; сторона AB въ треуг. ABD лежитъ противъ прямаго уг. D; уг. D=уг. A въ треуг. ABC; противъ A въ треуг. ABC лежитъ BC; сторона BD въ треуг. ABD лежитъ противъ уг. x; уг. x=уг. x въ треуг. ABC; противъ x лежитъ въ треуг. ABC сторона AB.

Чер. 291.

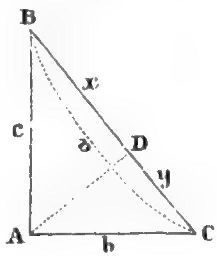


Итакъ стороны BC и AB треуг. ABC будутъ сходственны сторонамъ AB и BD треуг. ABD; слѣд. $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{AB}$.

Чер. 292.



Чер. 293.



Треуг. ADC (чер. 292) также подобенъ ABC, ибо уг. C общій, уг. $A=D$; уг. $m=m$; изъ подобія ихъ получимъ $\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}$.

203. Если мы означимъ числа, выражающія въ одной и той же единицѣ длины гипотенузы BC, катетовъ AC и AB, отрѣзковъ BD и DC (чер. 293) соотвѣтственно черезъ a, b, c, x, y, то на основаніи предъидущей теоремы получимъ

$$\frac{c}{x}=\frac{a}{c};\ \frac{b}{y}=\frac{a}{b}.$$

Взявъ произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ, получимъ

$$ax=c^2,\ ay=b^2.$$

Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ

$$ax+ay=c^2+b^2, \text{ или } a(x+y)=c^2+b^2.$$

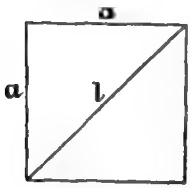
Но $x+y=a$, ибо $BD+DC=BC$; слѣд. $a^2=c^2+b^2$;
т. е. квадратъ числа, выражающаго длину гипотенузы въ какой нибудь линейной единицѣ, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ длины катетовъ въ тойже единицѣ. Для краткости теорему эту выражаютъ обыкновенно такъ:
квадратъ гипотенузы=суммѣ квадратовъ катетовъ.

204. На основаніи этой теоремы можно вычислить одну изъ сторонъ прямоуг. треуг., если извѣстны прочія его стороны. Если напр. одинъ катетъ $=12$ дюйм., а другой $=5$ дюйм., то гипотенуза$=$ $=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ дюйм.

Если гипот.$=5$, а одинъ катетъ$=4$, то другой катетъ$=\sqrt{5^2-4^2}=$ $=\sqrt{9}=3$.

Вообще, гипотенуза $=$ квадратному корню изъ суммы квадратовъ катетовъ; а катетъ $=$ корню квадратному изъ квадрата гипотенузы безъ квадрата другаго катета.

Чер. 294.

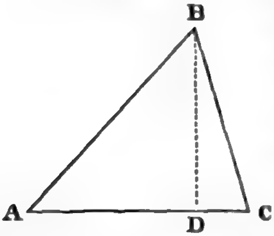


205. Если сторону квадрата (чер. 294) означимъ черезъ a, а діагональ его черезъ l, то найдемъ $l=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$; т. е. діагональ квадрата несоизмѣрима съ стороной его, ибо отношеніе ихъ выражается ирраціональнымъ числомъ $\sqrt{2}$.

Впрочемъ этотъ выводъ мы сдѣлали уже прежде (§ 170).

206. Возьмемъ косоугольный треуг. ABC (чер. 295), въ которомъ уг. A острый; опустимъ изъ B перпендикуляръ BD на основаніе AC; тогда изъ прямоуг. треуг. BDC будемъ имѣть

Чер. 295.



$$BC^2=BD^2+DC^2 \;*.$$

Но BD есть катетъ въ треуг. ABD. слѣд. $BD^2=AB^2-AD^2$; а $DC=AC-$ $-AD$; слѣд. $DC^2=(AC-AD)^2=AC^2-$ $-2AC\,.\,AD+AD^2$. Подставивъ вмѣсто BD^2 и DC^2 ихъ выраженія въ $BC^2=$ BD^2+DC^2, получимъ

$$BC^2=AB^2-AD^2+AC^2-2AC\,.\,AD+AD^2,$$
$$\text{или } BC^2=AB^2+AC^2-2AC\,.\,AD.$$

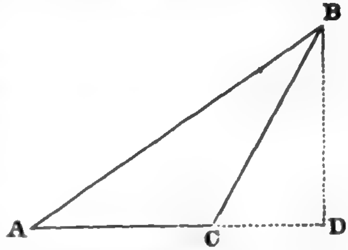
Если перпендикуляръ BD пойдетъ внѣ треуг. ABC (чер. 296), то изъ треуг. BDC имѣемъ $BC^2=BD^2+DC^2$; изъ треуг. ABD

---

* Здѣсь, равно какъ и въ слѣдующихъ §§, подъ BC, BD... будемъ разумѣть не самыя линіи, а числа, ихъ выражающія, такъ какъ самыя линіи, очевидно, нельзя возводить въ квадратъ.

получимъ $BD^2 = AB^2 - AD^2$; а $DC = AD - AC$; слѣд. $DC^2 = AD^2 - 2AD \,.\, AC + AC^2$; поэтому $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \,.\, AD$.

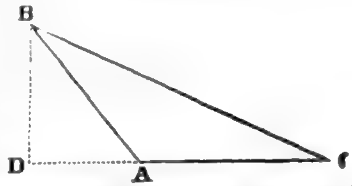
Чер. 296.



Итакъ во всякомъ косоугольномъ треуг. ***квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія основанія на отрѣзокъ его отъ вершины остраго угла до высоты.***

207. Выведемъ теперь выраженіе для квадрата стороны, лежащей противъ тупаго угла A (чер. 297) треугольника ABC. Изъ треуг. BCD имѣемъ $BC^2 = BD^2 + DC^2$; изъ треуг. ABD имѣемъ $BD^2 = AB^2 - AD^2$; $DC = AD + AC$; слѣд. $DC^2 = AD^2 + 2AC \,.\, AD + AC^2$, и $BC^2 = AB^2 - AD^2 + AD^2 + 2AC.AD + AC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.AD$. Итакъ ***квадратъ стороны, лежащей противъ тупаго угла треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ + удвоенное произведеніе основанія на отрѣзокъ отъ вершины тупаго угла до высоты.***

Чер. 297.



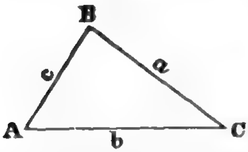
208. Вообще, если углы треуг. будутъ A, B, C; стороны, противолежащія имъ,—a, b, c, а разстояніе вершины уг. A отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ B на сторону b, будетъ равно d, то $a^2 = b^2 + c^2 + 2bd$, какого бы вида ни былъ треуг., т. е. будетъ ли онъ тупоугольный, остроугольный или прямоугольный. Дѣйствительно, если уг. A тупой, то d надо считать положительнымъ; если A острый, то d отрицательное; наконецъ, если A прямой, то $d = 0$.

Изъ предъидущаго видно, что если сторона треуг. лежитъ противъ остраго угла, то квадратъ ея будетъ меньше суммы квадратовъ прочихъ сторонъ; если она лежитъ противъ прямаго угла, то квадратъ ея равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ; наконецъ, если она противолежитъ тупому углу, то квадратъ ея больше этой суммы.

Поэтому и обратно — *уголъ треуг. будетъ острый, прямой или тупой, смотря по тому, будетъ ли квадратъ противолежащей стороны меньше суммы квадратовъ прочихъ сторонъ, равенъ этой суммѣ или больше ея.* Эту теорему легко доказать по способу приведенія къ нелѣпости. Дѣйствительно, если напр. въ треуг. ABC (чер. 298) имѣемъ $a^2 < b^2 + c^2$, то уг. A не можетъ быть прямымъ, ибо тогда $a^2 = b^2 + c^2$; онъ не можетъ быть и тупымъ, потому что тогда $a^2 > b^2 + c^2$; слѣд. уг. A острый.

209. Эта послѣдняя теорема даетъ возможность по даннымъ величинамъ сторонъ треугольника судить о томъ, будетъ ли онъ прямоугольнымъ, тупоугольнымъ или остроугольнымъ.

Чер. 298.

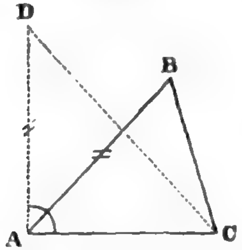


Пусть напр. стороны треуг. выражаются числами 11, 15 и 12; возьмемъ квадратъ большей стороны и сравнимъ его съ суммой квадратовъ прочихъ сторонъ; $15^2 = 225$; $11^2+12^2=121+144=265$, слѣд. $15^2<11^2+12^2$; итакъ уголъ, лежащій противъ бо́льшей стороны, есть острый; прочіе углы слѣд. и подавно острые; поэтому треуг. остроугольный.

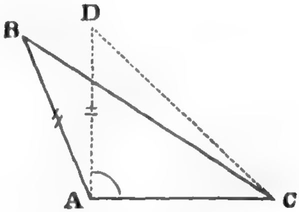
Треуг., котораго стороны суть 65, 63 и 16 будетъ прямоугольный, потому что $65^2=63^2+16^2$. Треуг., имѣющій стороны 20, 16 и 10 дюйм., будетъ тупоугольный, ибо квадратъ большей стороны (400) больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ (356).

210. Что квадратъ стороны треуг. будетъ больше или меньше суммы квадратовъ прочихъ сторонъ, смотря по тому, лежитъ ли эта сторона противъ тупаго или остраго угла, можно вывести еще слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ треуг. ABC (чер. 299 и 300); чтобъ найти сторону, квадратъ которой былъ бы равенъ AC^2+AB^2, надо изъ A возставить перпендикуляръ къ AC и отложить на немъ $AD=AB$; тогда, соединивъ D съ C, получимъ сторону DC, квадратъ которой $=AB^2+AC^2$.

Чер. 299.



Чер. 300.



Треуг. ADC и ABC имѣютъ сторону AC общую, стороны AD и AB равныя; поэтому изъ третьихъ сторонъ ихъ та будетъ больше, которая лежитъ противъ большаго угла; слѣд. если уг. BAC меньше уг. DAC, т. е. если уг. BAC острый (чер. 299), то $BC<DC$ и $BC^2<DC^2$ или $BC^2<AB^2+AC^2$.

Если же уг. BAC больше уг. DAC (чер. 300), т. е. если уг. BAC тупой, то $BC>DC$ и $BC^2>DC^2$ или $BC^2>AB^2+AC^2$.

211. Наименьшія изъ цѣлыхъ чиселъ, могущихъ выразить стороны прямоуг. треугольника, суть 3, 4 и 5. Но кромѣ этихъ чиселъ есть еще безчисленное множество другихъ, взаимно простыхъ, чиселъ, которыя также могутъ выразить стороны прямоуг. треуг.; напр. 13, 5, 12; 109, 91, 60; 113, 15, 112 и т. под.

212. Зная три числа, могущія выразить стороны прямоуг. треуг., можно найти множество другихъ чиселъ, которыя также могутъ представить стороны прямоуг. треуг.; для этого стóитъ только первыя числа помножить на какое угодно число. Дѣйствительно, если a, b, c суть стороны прямоуг. треуг., то треугольникъ, имѣющій стороны na, nb, nc, какъ подобный первому, будетъ также прямоугольный.

213. Прямоуг. треугольники, стороны которыхъ выражаются цѣлыми, взаимно простыми, числами, наз. *раціональными* или *пиѳагоровыми*, такъ какъ соотношеніе между сторонами прямоуг. треуг. впервые было открыто греческимъ ученымъ Пиѳагоромъ. Треуг., стороны котораго выражаются числами 3, 4, 5, наз. *египетскимъ*, потому что свойство его сторонъ было извѣстно еще древнимъ Египтянамъ, и полагаютъ, что Пиѳагоръ во время своихъ путешествій ознакомился съ свойствомъ этого треуг. и тѣмъ былъ наведенъ на открытіе соотношенія между сторонами всѣхъ вообще прямоуг. треуг.

214. Чтобы находить цѣлыя, притомъ взаимнопростыя, числа, которыя могли бы выразить стороны прямоуг. треуг., надо опредѣлить всѣ цѣлыя значенія a, b, c, удовлетворяющія урав. $a^2=b^2+c^2$. Изъ этого урав. имѣемъ $c^2=a^2-b^2=(a+b).(a-b)$; или, положивъ $a+b==m$, $a-b=n$, получимъ $c^2=mn$; т. е. произведеніе mn должно быть полнымъ квадратомъ. Кромѣ того $m+n$ и $m-n$ должны быть четными, потому что $a={}^1/_2\,(m+n)$ и $b={}^1/_2\,(m-n)$; слѣд. если бы $m+n$ или $m-n$ были нечетными, то a или b не могли бы быть цѣлыми числами.

Самый общій видъ для m и n, при которомъ mn представитъ полный квадратъ, есть $m=lk^2$, $n=lh^2$, гдѣ l, k, h суть произвольныя цѣлыя числа. Но, какъ выше сказано, намъ необходимо, чтобы $m+n$ и $m-n$ были четными. Для этого достаточно, чтобы одно изъ этихъ чиселъ было четнымъ; дѣйствительно, если $m+n=2x$, то $m-n==2x-2n=2(x-n)$ есть также четное; если $m-n=2z$, то $m+n==2z+2n=$ также четному числу.

Если $m+n$ есть четное, то слѣд. lk^2+lh^2 или $l(k^2+h^2)$ должно быть четнымъ; а для этого нужно, чтобы или l было четнымъ или k^2+h^2 было четнымъ. Поэтому различаемъ здѣсь два случая.

1. Пусть l четное число, такъ что $l=2q$, гдѣ q произвольное цѣлое число; тогда $m=lk^2=2qk^2$, $n=2qh^2$ и слѣд.

$$a={}^1/_2(m+n)=q(k^2+h^2);\ b={}^1/_2(m-n)=q(k^2-h^2),\ c=\sqrt{mn}==2qkh.$$

Такъ какъ a, b, c должны быть числа взаимно простыя, т. е. несодержащія общихъ множителей (кромѣ единицы), то въ предъидущихъ выраженіяхъ a, b, c надо положить $q=1$; тогда получимъ $a=k^2+h^2$, $b=k^2-h^2$, $c=2kh$, гдѣ k и h суть произвольныя цѣлыя числа.

2. Положимъ, что k^2+h^2 есть четное число; тогда и k^2-h^2 будетъ также четнымъ. Но $k^2-h^2=(k+h).(k-h)$; слѣд. $k+h$ и $k-h$ также четныя, потому что если одно изъ нихъ четное, то и другое также. Положимъ $k+h=2t$, $k-h=2s$, гдѣ t и s произвольныя цѣлыя числа (такъ какъ k и h также произвольныя цѣлыя числа); тогда

$$k=t+s;\ h=t-s, \text{ и слѣд}$$

$$m=lk^2=l(t+s)^2;\ n=lh^2=l(t-s)^2; \text{ а потому}$$

$$a={}^1/_2(m+n)={}^1/_2 l[(t+s)^2+(t-s)^2]=l(t^2+s^2);$$

$$b = {}^1/_2(m-n) = {}^1/_2 l[(t+s)^2-(t-s)^2] = 2lts;$$
$$c = \sqrt{mn} = l(t+s)\ (t-s) = l(t^2-s^2).$$

Такъ какъ a, b, c должны быть взаимно простыми числами, то полагаемъ $l=1$; тогда $a=t^2+s^2$; $b=2ts$; $c=t^2-s^2$.

Эти выраженія совершенно одинаковы съ тѣми, которыя мы получили въ первомъ случаѣ, съ той только разницей, что мѣсто b заняло c и наоборотъ. Такимъ образомъ, чтобы три взаимнопростыхъ цѣлыхъ числа a, b и c представляли стороны прямоуг. треуг., большее изъ нихъ должно быть равно суммѣ квадратовъ двухъ произвольныхъ цѣлыхъ чиселъ; одно изъ двухъ остальныхъ должно быть равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ, а другое = удвоенному произведенію ихъ. И дѣйствительно, если $a=k^2+h^2$, $b=k^2-h^2$, $c=2kh$, то

$$b^2+c^2=(k^2-h^2)^2+(2kh)^2=k^4+h^4-2k^2h^2+4k^2h^2=$$
$$=k^4+h^4+2k^2h^2=(k^2+h^2)^2=a^2.$$

Давая въ выраженіяхъ a, b и c различныя значенія k и h, мы будемъ получать различныя числовыя величины для сторонъ прямоуг. треуг. Такъ если $k=10$, $h=3$, то $a=10^2+3^2=109$; $b=10^2-3^2=91$; $c=2.10.3=60$.

И дѣйствительно, $109^2=91^2+60^2$.

При $k=8$, $h=7$ получимъ $a=113$; $b=15$; $c=112$; при $k=3$, $h=2$ будетъ $a=13$, $b=5$, $c=12$, и т. под.

Пиѳагоръ далъ слѣдующее выраженіе для сторонъ прямоуг. треуг.:

$$a={}^1/_2\,(k^2+1);\ b={}^1/_2(k^2-1);\ c=k.$$

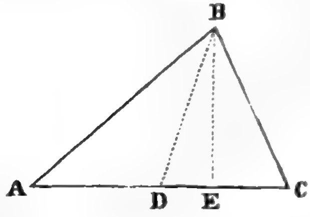
Это выраженіе получится, если въ нашихъ выраженіяхъ для a, b, c положить, что $h=1$, а k есть нечетное цѣлое число.

Если же въ тѣхъ же выраженіяхъ положить $h=1$, а $2k=t$, такъ что t будетъ четное число, то получимъ

$$a=\left(\frac{t}{2}\right)^2+1;\ b=\left(\frac{t}{2}\right)^2-1;\ c=t.$$ Это рѣшеніе принадлежитъ Платону.

215. *Сумма квадратовъ двухъ сторонъ треуг. = удвоенному квадрату линіи, соединяющей средину третьей стороны съ вершиной противолежащаго угла, + удвоенный квадратъ половины третьей стороны.* Возьмемъ треуг. ABC (чер. 301); соединимъ точку B съ срединой D стороны AC; проведемъ $BE \perp AC$; тогда сторона BC будетъ въ треуг. BDC лежать противъ остраго угла, а сторона AB въ треуг. ABD лежитъ противъ тупаго угла, и на основаніи §§ 206 и 207 получимъ:

Чер. 301.



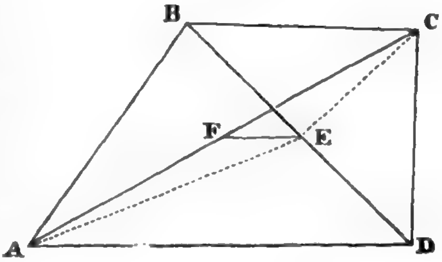
$$BC^2=BD^2+DC^2-2DC.\ DE$$
и $$AB^2=BD^2+AD^2+2AD.\ DE.$$

Сложивъ эти два равенства и замѣтивъ, что $AD=DC$, получимъ

$$BC^2+AB^2=2BD^2+2AD^2.$$

216. *Сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ четыреугольника = суммѣ квадратовъ его діагоналей + учетверенный квадратъ линіи, соединяющей средины діагоналей.* Пусть $ABCD$ (чер. 302) будетъ какой нибудь четыреугольникъ; E и F средины его діагоналей BD и AC; проведемъ линіи AE, EC и EF; тогда изъ треуг. ABD и CBD по предъидущ. теор. будемъ имѣть

Чер. 302.



$AB^2+AD^2=2AE^2+2BE^2$;
$CB^2+CD^2=2CE^2+2BE^2$.
Сложивъ эти два равенства, получимъ $AB^2+AD^2+ CB^2+CD^2=2AE^2+ +2CE^2+4BE^2$.

Но изъ треуг. AEC имѣемъ $AE^2+CE^2=2AF^2+2EF^2$; слѣд.

$$2AE^2+2CE^2=4AF^2+4EF^2.$$ А потому

$$AB^2+AD^2+CB^2+CD^2=4AF^2+4BE^2+4EF^2.$$

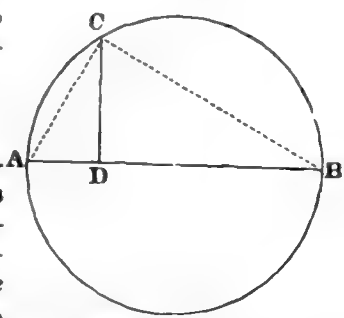
$=(2AF)^2+(2BE)^2+4EF^2=AC^2+BD^2+4EF^2$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Въ параллелограммѣ средины діагоналей совпадаютъ съ точкой ихъ пересѣченія; стало быть линія, соединяющая средины діагоналей, равна нулю, и потому *сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ параллелограмма = суммѣ квадратовъ его діагоналей.* Это легко также вывести и независимо отъ предъидущей теоремы, а на основаніи лишь теоремъ §§ 206 и 207.

Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

217. Проведемъ (чер. 303) діаметръ AB и опустимъ изъ какой нибудь точки C окружности перпендикуляръ CD на AB. Соединивъ точку C съ A и B, получимъ треуг. ACB, прямоугольный при точкѣ C; слѣд. по § 202-му будемъ имѣть

Чер. 303.

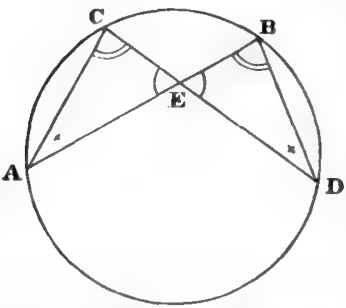


$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB};\ \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD};$$ т. е.

перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра; а хорда, соединяющая туже точку съ концомъ діаметра, есть средняя пропорціональная между цѣлымъ діаметромъ и прилежащимъ его отрѣзкомъ.

218. **Проведемъ въ окружности (чер. 304) двѣ хорды AB и CD, пересѣкающіяся между собою въ точкѣ E. Соединивъ точку A съ C и B съ D, получимъ подобные треуг. AEC и BED (углы при E вертикальные, $A=D$ какъ опирающіеся на дугу CB). Изъ подобія этихъ треуг. получимъ $\frac{AE}{EC}=\frac{ED}{EB}$; т. е. отрѣзокъ первой хорды такъ относится къ отрѣзку второй, какъ отрѣзокъ второй хорды относится къ отрѣзку первой; слѣд. *двѣ пересѣкающіяся хорды дѣлятся на части, обратно пропорціональныя.*

Чер. 304.

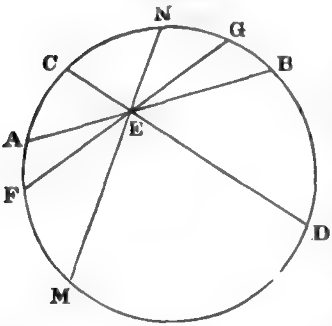


219. Если черезъ точку E (чер. 305) проведемъ кромѣ хордъ AB и CD еще нѣсколько хордъ FG, MN...., то по предъидущему будемъ имѣть

$$\frac{AE}{EC}=\frac{ED}{EB};\ \frac{AE}{EF}=\frac{EG}{EB};\ \frac{AE}{EM}=\frac{EN}{EB},$$

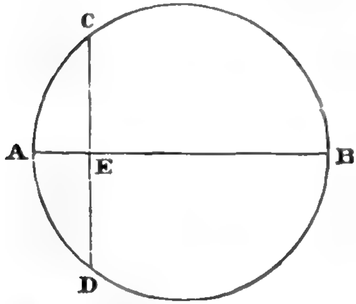
откуда $AE\,.\,EB = EC\,.\,ED = EF.EG=EM.EN=....$; т. е. всѣ хорды, проходящія черезъ одну точку внутри окружности, дѣлятся въ этой точкѣ такъ, что произведенія отрѣзковъ ихъ равны между собою, и слѣд. произведеніе отрѣзковъ пересѣкающихся хордъ есть величина постоянная.

Чер. 305.



220. Если хорды AB и CD (чер. 306) будутъ перпендикулярны между собою, притомъ хорда AB будетъ діаметромъ, то въ пропорціи $\frac{AE}{EC}=\frac{ED}{EB}$ средніе члены будутъ равны, ибо діаметръ, перпендикулярный въ хордѣ, дѣлитъ ее пополамъ; слѣд. CE будетъ средняя пропорціональная между AE и EB, что мы уже и доказали въ § 217-мъ.

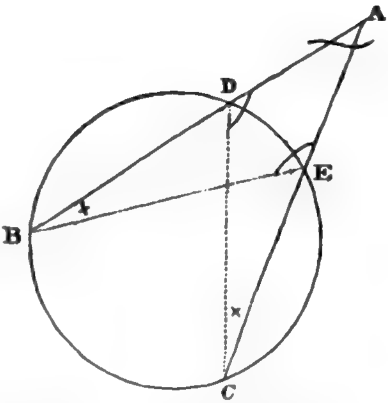
Чер. 306.



221. **Возьмемъ (чер. 307) точку A внѣ окружности и проведемъ изъ нея двѣ сѣкущія AB и AC. Соединивъ точку D съ C**

и B съ E, получимъ треуг. $ABE \sim ACD$ (уг. A общій, уг. $B = C$ какъ опирающіеся на одну дугу DE). Изъ подобія этихъ треуг. получимъ $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$; т. е. первая сѣкущая такъ относится ко второй сѣкущей, какъ внѣшній отрѣзокъ второй относится къ внѣшнему отрѣзку первой; слѣд. *двѣ сѣкущія, выходящія изъ одной точки, лежащей внѣ окружности, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ.*

Чер. 307.



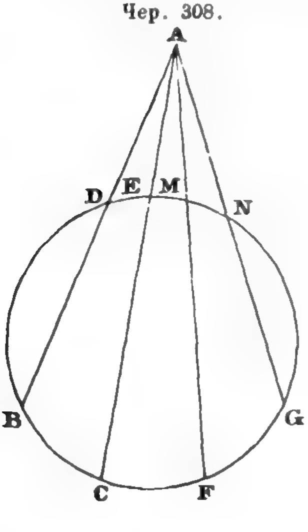
222. Если изъ точки A проведемъ (чер. 308) кромѣ AB и AC еще нѣсколько сѣкущихъ AF, AG...., то будемъ имѣть

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD};\ \frac{AB}{AF} = \frac{AM}{AD};\ \frac{AB}{AG} = \frac{AN}{AD}\ldots,$$

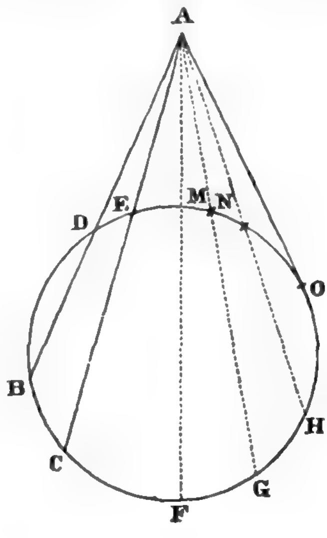
или $AB \cdot AD = AC \cdot AE = AF \cdot AM = AG \cdot AN = \ldots$; т. е. всѣ сѣкущія, выходящія изъ одной внѣшней точки, дѣлятся окружностью такъ, что произведеніе каждой сѣкущей на ея внѣшній отрѣзокъ есть величина постоянная.

223. Если мы вообразимъ, что сѣкущая AC (чер. 309) вра-

Чер. 308.



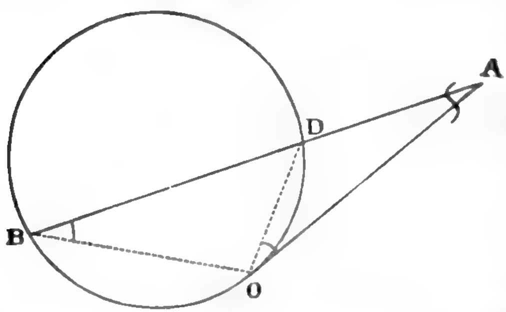
Чер. 309.



щается около точки A вправо, принимая послѣдовательно положенія AF, AG...:, то ея внутренній отрѣзокъ сперва будетъ увеличиваться, а потомъ станетъ уменьшаться (такъ $NG<MF$), а внѣшній будетъ возрастать, и когда наконецъ сѣкущая обратится въ касательную AO, то внутренній отрѣзокъ обратится въ нуль, а внѣшній будетъ равенъ касательной AO. Такимъ образомъ въ пропорціи $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ для этого случая надо замѣнить второй и третій члены черезъ AO; получимъ $\frac{AB}{AO}=\frac{AO}{AD}$; т. е. *касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и ея внѣшней частью.*

224. Теорему эту можно вывести и непосредственно. Дѣйствительно, соединивъ (чер. 310) D и B съ O, получимъ треуг. $BAO \infty DAO$ (уг. A общій, уг. $DOA=B$ какъ измѣряющіеся половиной дуги OD); слѣд. $\frac{AB}{AO}=\frac{AO}{AD}$. Изъ этой пропорціи находимъ $AB.AD=AO^2$; итакъ произведеніе каждой сѣкущей, выходящей изъ внѣшней точки, на внѣшній отрѣзокъ ея равно квадрату касательной, проведенной изъ той же точки.

Чер. 310.

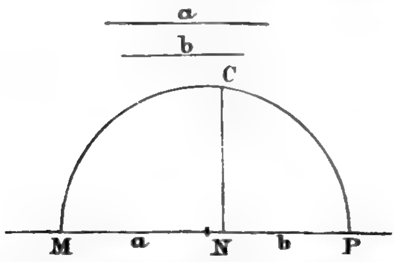


Вышеизложенныя теоремы о пропорціональныхъ линіяхъ въ кругѣ прилагаются къ рѣшенію слѣдующихъ задачъ.

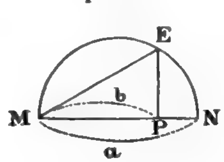
225. *Между двумя данными прямыми a и b* (чер. 311) *найти среднюю пропорціональную?* Это можно сдѣлать тремя способами.

1) На произвольной прямой откладываемъ $MN=a$, $NP=b$: потомъ на MP, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность;

Чер. 311.



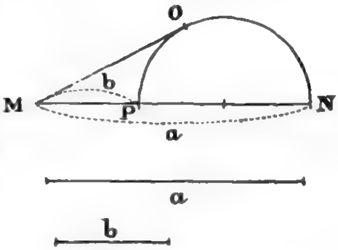
Чер. 312.



изъ N возставляемъ къ MP перпендикуляръ NC; онъ и будетъ средняя пропорціональная между a и b (§ 217)

2. Беремъ (чер. 312) прямую MN=бо́льшей линіи a; описываемъ на ней полуокружность; откладываемъ отъ M часть $MP=b$; проводимъ $PE \perp MN$; соединяемъ E съ M; EM будетъ средней пропорціональной между a и b (§ 217).

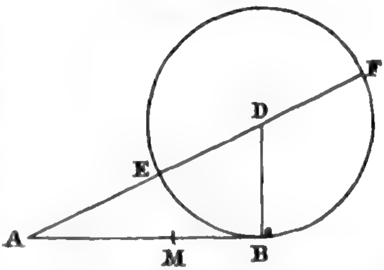
Чер. 313.



3) На линіи MN = большей линіи a (чер. 313) откладываемъ часть $MP=b$; потомъ на NP описываемъ полуокружность; изъ M проводимъ къ окружности касательную MO, которая и будетъ средняя пропорц. между a и b (§ 223).

226. *Данную прямую линію* AB (чер. 314) *раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи*, т. е. раздѣлить AB на такія двѣ части, чтобы бо́льшая часть была средней пропорціональной между всей линіей и меньшей ея частью *? Возставивъ изъ B перпендикуляръ къ AB, отложимъ на немъ часть $BD = \frac{1}{2} AB$; изъ D радіусомъ DB опишемъ окружность; изъ A проведемъ прямую $AEDF$; на AB отъ A отложимъ часть $AM=AE$; въ точкѣ M прямая AB раздѣлится въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и AM будетъ бо́льшій отрѣзокъ ея. Дѣствительно, по свойству касательной (§ 223) имѣемъ

Чер. 314.



$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AE}$. Но разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ, какъ разность членовъ втораго отношенія относится къ своему послѣдующему; слѣд. $\frac{AF-AB}{AB} = \frac{AB-AE}{AE}$. Такъ какъ $AF=AE+EF=AE+AB$, то $AF-AB=AE=AM$; $AB-AE=AB-AM=MB$; поэтому $\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM}$; т. е. AM есть средняя пропорц. между AB и MB.

227. Приведемъ еще алгебраическое рѣшеніе той же задачи. Означивъ линію AB (чер. 314) черезъ a, а бо́льшій отрѣзокъ ея че-

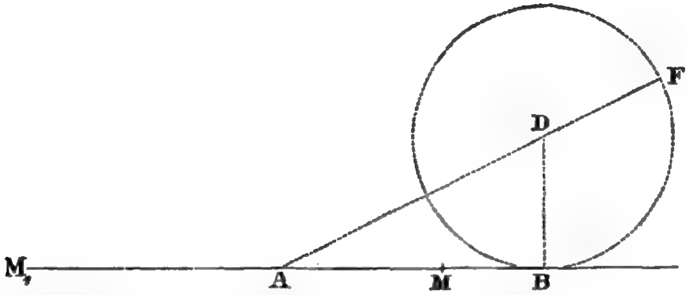
* Если бы требовалось раздѣлить линію на такія двѣ части, чтобы *меньшая* часть была средней пропорціональной между всей линіей и большей частью, то эта задача была бы невозможна, ибо тогда вся линія должна бы такъ относиться къ меньшей части, какъ меньшая часть относится къ большей.

резъ x, будемъ имѣть $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$, или $x^2=a^2-ax$; $x^2+ax-a^2=0$, откуда $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, или $x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$ и $x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Первая величина положительная, такъ какъ $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$ непремѣнно больше $\frac{a}{2}$; поэтому она и составляетъ отвѣтъ на предложенную задачу, т. е. выражаетъ бо́льшую часть линіи AB, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Чтобъ выразить на чертежѣ величину бо́льшаго отрѣзка, надо *построить формулу* $x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Для этого замѣтимъ, что $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$ представляетъ гипотенузу прямоуг. треуг., котораго катеты суть a и $^1/_2a$; чтобъ построить этотъ треуг., возставимъ изъ B (чер. 314) къ AB перпендикуляръ и отложимъ на немъ $BD={}^1/_2AB$; тогда $AD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Теперь, чтобы получить линію x_1, надо изъ AD вычесть $^1/_2a$, т. е. $^1/_2\,AB$; для этого изъ D радіусомъ DB опишемъ дугу, которая пересѣчетъ AD въ точкѣ E; AE и будетъ$=x_1$; остается только на AB отложить отъ A часть $AM=AE$. Такимъ образомъ мы пришли къ предъидущему построенію.

Второй корень $x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$ есть количество отрицательное и не соотвѣтствуетъ предложенной задачѣ. Но онъ все таки имѣетъ геометрическое значеніе, которое мы обнаружимъ, если возьмемъ задачу въ болѣее общемъ видѣ, а именно:

На неопредѣленной прямой даны двѣ точки A и B (чер. 315), *которыхъ разстояніе $=a$; найти на этой прямой такую точку, чтобы разстояніе ея отъ A было средней пропорціональной между AB и разстояніемъ искомой точки отъ B?* Очевидно, эта задача должна имѣть два рѣшенія: кромѣ точки M, которую мы уже нашли, должна существовать еще точка M_1, такъ чтобы M_1A была средней пропорціональной между AB и M_1B; этому то второму рѣшенію и соотвѣтствуетъ величина x_2, и такъ какъ положеніе линіи AM_1 совершенно обратно положенію AM (AM вправо отъ A, а AM_1 влѣво отъ A), то величина x_2 и должна быть отрицательной. Величину x_2 легко построить такъ же, какъ мы строили величину x_1. Дѣйствительно, линія $AF = AD + DF =$

Чер. 315.



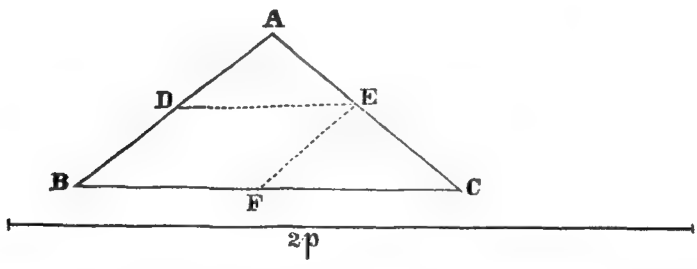
$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2}$ представляетъ абсолютную величину выраженія x_2; отложивъ влѣво отъ A часть $AM_1 = AF$, опредѣлимъ и самую точку M_1.

228. Изъ предъидущаго примѣра мы видимъ, что иногда условіе геометрической задачи даютъ такія соотношенія между искомыми и данными, которыя возможно *выразить уравненіями.* Рѣшая эти уравненія по извѣстнымъ изъ алгебры правиламъ, мы получаемъ формулу, выражающую искомую величину черезъ данныя, и для рѣшенія задачи останется только *построить* эту формулу.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ на рѣшеніе геометрическихъ задачъ такимъ способомъ.

Задача 1-я. Въ треуг. ABC (чер. 316) вписать параллелограммъ такъ, чтобы онъ имѣлъ съ треуг. общій уг. B, чтобы вершины параллелограмма лежали па сторонахъ треуг., и чтобы его

Чер. 316.



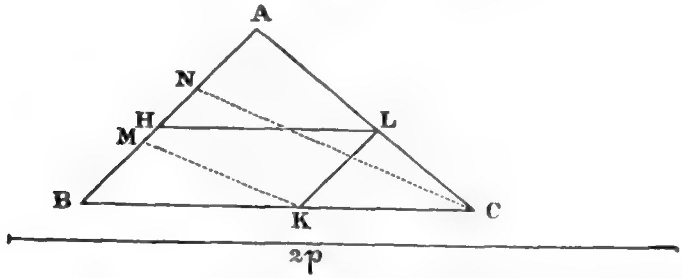
периметръ$=2p$? Пусть $BDEF$ будетъ искомый параллелограммъ; положимъ, что $BF=x$; $BD=y$; $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$; тогда по условію задачи будемъ имѣть $2x+2y=2p$.... (1).

Такъ какъ треуг. $ABC \infty ADE$, то $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$, или $\frac{a}{x} = \frac{c}{c-y}$, откуда $ac - ay = cx$..... (2).

Опредѣливъ y изъ ур. (1) и подставивъ въ урав. (2), получимъ $ac - ap + ax = cx$, откуда $x = \frac{a(p-c)}{a-c}$. Такимъ образомъ мы опредѣлили сторону x параллелограмма, совпадающую съ стороной BC треугольника, а слѣд. можемъ построить и самый параллелограммъ.

Изъ найденнаго для x выраженія слѣдуетъ, что $\frac{x}{a} = \frac{p-c}{a-c}$; т. е. x есть четвертая пропорціональная къ прямымъ линіямъ a, $p-c$ и $a-c$. Раздѣливъ пополамъ прямую $2p$ и вычтя c изъ p, потомъ c изъ a, мы опредѣлимъ линіи $p-c$ и $a-c$; затѣмъ, чтобы построить линію x, откладываемъ отъ B (чер. 317) на линіи BA часть $BN = a - c$ и $BM = p - c$; точку N соединяемъ съ C, а изъ

Чер. 317.

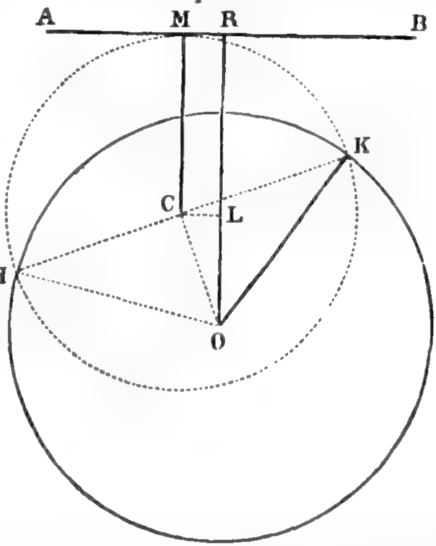


M проводимъ $MK \parallel NC$; тогда $BK = x$. Проведя $KL \parallel BA$ и $LH \parallel BC$, получимъ параллелогр. $BKLH$, который будетъ требуемый. Дѣйствительно, онъ имѣетъ съ треуг. ABC общій уг. B, и вершины его лежатъ на сторонахъ треуг. Остается доказать, что периметръ параллелограмма$=2p$. Мы видѣли, что $BK = \frac{a(p-c)}{a-c}$; изъ подобія же треуг. CLK и CAB найдемъ, что $LK = \frac{c(a-BK)}{a}$ или $LK = \frac{c}{a}\left\{a - \frac{a(p-c)}{a-c}\right\} = c - \frac{c(p-c)}{a-c}$; слѣд. $BK + LK =$ $= \frac{a(p-c)}{a-c} + c - \frac{c(p-c)}{a-c} = c + \frac{(p-c)\ (a-c)}{a-c} = c + p - c = p$; а потому $2BK + 2LK = 2p$.

Чтобы задача была возможна, x должно быть положительнымъ; а это будетъ въ такомъ случаѣ, если $a > c$ и $p > c$, или же если $a < c$ и $p < c$.

Задача 2-я. Провести кругъ, который касался бы прямой AB (чер. 318) въ точкѣ M и пересѣкалъ бы данный кругъ O такъ, чтобы хорда пересѣченія была равна діаметру искомаго круга? Предположимъ, что задача рѣшена и что искомый кругъ есть C, а хорда пересѣченія его съ даннымъ кругомъ O есть HCK— діаметръ искомаго круга C. Соединимъ центръ O даннаго круга съ C и K, точку M съ C и проведемъ $OR \perp AB$ и $CL \perp OR$. Положимъ $OR=a$, $MR=b$, $CM = CK = x$; $OK = r$. Тогда изъ треуг. OCK, въ которомъ уг. C прямой (ибо линія центровъ $CO \perp$ къ общей хордѣ HK), получимъ $OK^2 = CK^2 + CO^2$, или $r^2 = x^2 + CO^2$; а изъ прямоуг. треуг. OCL найдемъ $CO^2 = OL^2 + CL^2$. Но $OL = OR - LR = OR - CM = a - x$; а $CL = MR = b$; слѣд.

Чер. 318.



$$CO^2 = (a-x)^2 + b^2, \text{ и потому } r^2 = x^2 + (a-x)^2 + b^2, \text{ или}$$

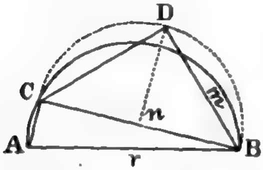
$$2x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0;\ x^2 - ax + \frac{a^2+b^2-r^2}{2} = 0;$$

отсюда $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2+b^2-r^2}{2}}$, или

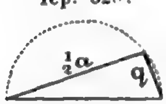
$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2a^2 - 2b^2 + 2r^2}{4}};\quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

Чтобъ построить x, построимъ сперва $\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$; для этого положимъ $\frac{r^2-b^2}{2} = m^2$; тогда $\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{m^2 - (\frac{1}{2}a)^2}$ будетъ представлять катетъ прямоуг. треуг., котораго гипотенуза есть m, а другой катетъ $\frac{1}{2}a$. Итакъ прежде надо построить m. Мы положили $m^2 = \frac{r^2-b^2}{2}$, или $2m^2 = r^2 - b^2$; положимъ $2m^2 = n^2$; тогда $n^2 = r^2 - b^2$; стало быть n есть катетъ прямоуг. треуг., котораго гипотенуза есть r, а другой катетъ b. Для построенія n, описываемъ (чер. 319) на линіи $AB=r$ полуокружность и откладываемъ хорду $AC=b$; тогда $CB=n$. Затѣмъ можно построить и m; такъ какъ мы положили $2m^2=n^2$ или $m^2+m^2=n^2$, то слѣд. m есть катетъ равнобедреннаго прямоуг. треугольника, котораго гипотенуза есть n; чтобъ построить такой треуг., описываемъ (чер. 319) полуокружность на CB, равной n, и изъ центра проводимъ къ CB перпендикуляръ; тогда $CD=DB=m$. Теперь можемъ построить $\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2}-\frac{a^2}{4}}=$ $=\sqrt{m^2-\frac{a^2}{4}}$, для чего строимъ (чер. 320) прямоуг. треуг., котораго гипотенуза $=m$, а одинъ катетъ $=\frac{1}{2}a$; другой катетъ этого треуг., который означимъ черезъ q, и будетъ равенъ $\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$.

Чер. 319.

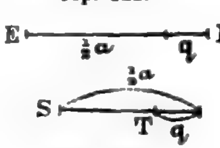


Чер. 320.



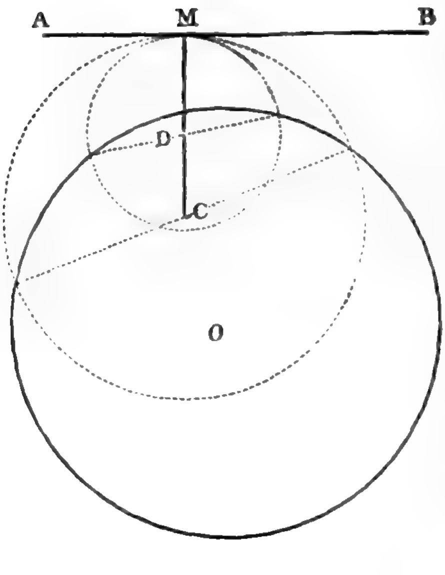
Такимъ образомъ $x=\frac{1}{2}a\pm q$, или $x_1=\frac{1}{2}a+q$; $x_2=\frac{1}{2}a-q$. Поэтому для построенія x_1 надо сложить $\frac{1}{2}a$ съ q; а для построенія x_2 надо вычесть q изъ $\frac{1}{2}a$, и слѣд. искомый радіусъ CM (чер. 318) будетъ равенъ прямой EF (чер. 321) или прямой ST.

Чер. 321.



Для рѣшенія задачи остается изъ данной точки M прямой AB (чер. 322) возставить къ AB перпендикуляръ, отложить на немъ часть $MC=EF$ (чер. 321) и $MD=ST$, и наконецъ изъ точекъ C и D радіусами CM и DM описать круги.

Чер. 322.



Оба эти круга удовлетворяютъ требованіямъ задачи. Дѣйствительно, кругъ, описанный изъ C (чер. 318) радіусомъ CM, перпендикулярнымъ къ AB и равнымъ

$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$,

коснется AB въ точкѣ M (ибо $AB\perp CM$) и пересѣчетъ данный кругъ O по хордѣ HK, которая будетъ равна $2CM$. Для доказательства этого втораго положенія, соединимъ центры O и C круговъ между собою и съ точкою H, одной изъ точекъ пересѣченія окружностей этихъ круговъ; тогда получимъ треуг. OCH. Проведя $OR \perp AB$ и $CL \perp OR$, получимъ

$$OL = OR - LR = OR - CM = a - \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}\right)$$

$= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$ и $CL = MR = b$; но изъ треуг. OCL имѣемъ $OC^2 = OL^2 + CL^2$, слѣд.

$$OC^2 = \frac{a^2}{4} - a\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} + \frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4} + b^2 =$$

$$= -a\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} + \frac{r^2-b^2}{2} + b^2 \ldots. (1)$$

Опредѣлимъ теперь прямую CH; она есть радіусъ построеннаго круга; слѣд $CH = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$; а потому

$$CH^2 = \frac{a^2}{4} + a\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} + \frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4} =$$

$$= a\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} + \frac{r^2-b^2}{2} \ \ldots.. (2).$$

Сложивъ выраженія (1) и (2), получимъ

$$OC^2 + CH^2 = \frac{r^2-b^2}{2} + \frac{r^2-b^2}{2} + b^2 = r^2 - b^2 + b^2 = r^2.$$

Но прямая $OH = r$; слѣд. $OC^2 + CH^2 = OH^2$; поэтому треуг. OCH прямоугольный при C. Итакъ линія центровъ OC перпендикулярна къ радіусу CH построеннаго круга; а какъ другая точка K пересѣченія окружностей обоихъ круговъ должна лежать на продолженіи перпендикуляра HC къ линіи центровъ CO и находиться отъ основанія C этого перпендикуляра на разстояніи, равномъ CH, то слѣд. $KC = CH$, и хорда HK пересѣченія обоихъ круговъ будетъ діаметромъ построеннаго круга.

Точно такимъ же образомъ можно доказать справедливость рѣшенія и при радіусѣ, равномъ второму корню, т. е. $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$.

Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы $\sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$ былъ величиной дѣйствительной, т. е. чтобы $\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4} > 0$; а для этого необходимо, чтобы $r^2 - b^2$ было положительнымъ. Такимъ образомъ для дѣйствительныхъ и неравныхъ корней имѣемъ два условія:

$$r^2 > b^2 \text{ и } \frac{r^2-b^2}{2} > \frac{a^2}{4}.$$

Первое условіе требуетъ, чтобы r было больше b, т. е. чтобы радіусъ даннаго круга былъ больше разстоянія MR (чер. 318) между точкой прикосновенія M и основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра C даннаго круга на прямую AB.

Второе условіе даетъ $2r^2 - 2b^2 > a^2$, или $r^2 > b^2 + \frac{a^2}{2}$, а $r > \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$; т. е, радіусъ даннаго круга долженъ быть больше гипотенузы прямоуг. треуг., одинъ катетъ котораго есть b (MR на чер. 318), а другой катетъ=катету равнобедреннаго прямоуг. треуг., построеннаго на гипотенузѣ a, т. е. на линіи OR.

Такъ какъ длина радіуса можетъ выражаться только количествомъ положительныхъ, то задача тогда только можетъ имѣть два рѣшенія, когда

$$\frac{a}{2} > \sqrt{\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}}, \text{ или } \frac{a^2}{4} > \frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \text{ или } \frac{a^2}{2} > \frac{r^2-b^2}{2};$$

$a^2 > r^2 - b^2$, слѣд. $r^2 < a^2 + b^2$; $r < \sqrt{a^2+b^2}$, т. е. когда радіусъ даннаго круга меньше гипотенузы прямоуг. треуг., котораго катеты суть a и b, т. е. линіи OR и MR (чер. 318); иначе говоря, когда этотъ радіусъ меньше прямой MO.

Задача будетъ имѣть одно рѣшеніе, когда подкоренная величина въ выраженіи x обращается въ нуль. Но если $\frac{r^2-b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 0$, то $2r^2 - 2b^2 = a^2$, или $r = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$; т. е. въ этомъ случаѣ радіусъ даннаго круга равенъ гипотенузѣ прямоуг. треуг., у котораго одинъ катетъ есть линія b или MR (чер. 318), а другой катетъ равенъ катету равнобедр. прямоуг. треуг., построеннаго на гипотенузѣ a, т. е. на линіи OR.

229. Построеніе алгебраическихъ формулъ. Посредствомъ извѣстныхъ намъ до сихъ поръ геометрическихъ теоремъ мы можемъ строить слѣдующія алгебраическія формулы:

1) $x = a - b + c - d + e - f + \ldots$. Для построенія этой формулы, нужно начертить прямую линію, равную суммѣ прямыхъ, выражаемыхъ числами a, c, $e\ldots$; потомъ прямую линію, равную суммѣ линій, выражаемыхъ числами b, d, $f\ldots$; наконецъ начертить прямую, равную разности этихъ двухъ суммъ.

2) $x = \frac{ab}{c}$. Изъ этой формулы находимъ $cx = ab$, или $x : a = b : c$; т. е. x есть четвертая пропорціональная къ линіямъ a, b, c,

и мы ее построить умѣемъ. Подобную формулу, именно $x=\frac{a(p-c)}{a-c}$, намъ пришлось строить въ первой задачѣ предъидущаго §.

Когда $a=b$, то формула $x=\frac{ab}{c}$ принимаетъ видъ $x=\frac{a^2}{c}$, откуда $x:a=a:c$; т. е. x есть третья пропорціональная къ линіямъ a и c; построить ее можно или начертивъ четвертую пропорціональную къ a, a и c, или еще слѣдующимъ образомъ: на c, какъ на діаметрѣ, описать полуокружность; отъ одного изъ концовъ діаметра отложить хорду$=a$; изъ конца хорды опустить на діаметръ перпендикуляръ; отрѣзокъ діаметра, прилежащій къ хордѣ, будетъ$=x$, ибо по § 217-му имѣемъ $\frac{c}{a}=\frac{a}{x}$, слѣд. $x=\frac{a^2}{c}$.

3) Формула $x=\sqrt{a^2+b^2}$ представляетъ гипотенузу прямоуг. треуг., котораго катеты суть прямыя, выражаемыя числами a и b; поэтому, отложивъ отъ вершины O прямаго угла AOB на сторонахъ его части $OA=a$, $OB=b$ и соединивъ A съ B, получимъ прямую $AB=x=\sqrt{a^2+b^2}$. Когда $a=b$, то $x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$ $=a\sqrt{2}$; слѣд. $x=a\sqrt{2}$ представляетъ гипотенузу равнобедр. прямоуг. треуг., котораго катетъ$=a$.

4) Формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ представляетъ катетъ треуг., котораго гипотенуза$=a$, а другой катетъ$=b$. Для построенія ея можно пользоваться двумя способами: 1) отложивъ на сторонѣ прямаго угла AOB отъ вершины его часть $OA=$данному катету b, изъ точки A описать радіусомъ a дугу, которая пересѣчетъ другую сторону угла; если одна изъ точекъ пересѣченія будетъ C, то OC и будетъ искомымъ катетомъ.

Или же 2) можно на $AB=a$ описать полуокружность, отложить отъ A хорду $AC=b$ и соединить C съ B.

Если положимъ $b=x$, то формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ приметъ видъ $x=$ $=\sqrt{a^2-x^2}$, откуда $x^2=a^2-x^2$; $2x^2=a^2$; $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$; формула эта выражаетъ слѣд. катетъ равнобедр. прямоуг. треуг., котораго гипотенуза равна a.

5) Формула $x=\sqrt{ab}$ даетъ $x^2=ab$ или $a:x=x:b$; т. е. $x=\sqrt{ab}$ представляетъ среднюю пропорціональную между двумя прямыми, выражаемыми числами a и b, и построеніе ея намъ извѣстно.

230. Возьмемъ нѣсколько формулъ, болѣе сложныхъ, которыя можно построить, основываясь на формулахъ предъидущаго §.

1. Чтобъ построить формулу $x=\frac{bb_1b_2b_3\ldots b_n}{cc_1c_2c_3\ldots c_n}\cdot a$, строимъ спер-

на $x_1 = \frac{b}{c} \cdot a$, какъ четвертую пропорціональную; потомъ строимъ такимъ же образомъ $x_2 = \frac{b_1}{c_1} \cdot x_1$, далѣе $x_3 = \frac{b_2}{c_2} \cdot x_2 \ldots\ldots$ и такъ далѣе до конца.

Отсюда слѣдуетъ, что можно построить формулу $x = \frac{ac}{b} + \frac{a^2c}{b^2} + \frac{a^3c}{b^3} + \ldots\ldots$ Для этого строимъ $x_1 = \frac{ac}{b}$; $x_2 = \frac{aa}{bb} \cdot c$; $x_3 = \frac{aaa}{bbb} \cdot c \ldots$, наконецъ $x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$

Вообще можно всегда построить алгебраическую дробь, у которой числитель и знаменатель суть произведенія раціональныхъ множителей, притомъ въ числителѣ однимъ множителемъ больше, чѣмъ въ знаменателѣ; иначе говоря — можно построить раціональную алгебраическую дробь перваго измѣренія, а также и алгебраическую сумму такихъ дробей.

2. Возьмемъ формулу

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 - f^2 + k^2 - l^2 \ldots\ldots}$$

Представивъ эту формулу въ видѣ

$x = \sqrt{(a^2 + c^2 + e^2 + k^2 + \ldots) - (b^2 + d^2 + f^2 + l^2 + \ldots)}$,

построимъ сперва $m_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$; потомъ $m_2 = \sqrt{m_1^2 + e^2} = \sqrt{a^2 + c^2 + e^2}$, $m_3 = \sqrt{m_2^2 + k^2} = \sqrt{a^2 + c^2 + e^2 + k^2 \ldots}$, наконецъ $m = \sqrt{a^2 + c^2 + e^2 + k^2 + \ldots\ldots}$ Далѣе строимъ $n_1 = \sqrt{b^2 + d^2}$, $n_2 = \sqrt{n_1^2 + f^2} = \sqrt{b^2 + d^2 + f^2 \ldots}$, $n = \sqrt{b^2 + d^2 + f^2 + l^2 + \ldots}$ Останется построить $\sqrt{m^2 - n^2}$, что мы уже умѣемъ сдѣлать.

3. Формулу $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$ можно построить, подведя a подъ радикалъ; тогда $x = \sqrt{\frac{a^2b}{c}}$; построивъ $x_1 = \frac{a^2}{c}$, можемъ построить $x = \sqrt{x_1 b}$.

4. Для построенія формулы

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} \pm a\sqrt{a^2 - b^2}}$$

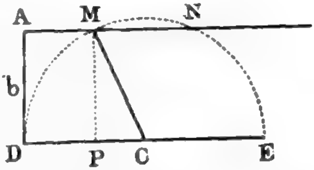
строимъ сперва $m = \sqrt{a^2 - b^2}$, потомъ $n = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$; тогда формулу приведемъ къ виду $x = \sqrt{n^2 \pm am}$. Затѣмъ, построивъ $p = \sqrt{am}$, получимъ $x = \sqrt{n^2 \pm p^2}$ —формулу, которую уже легко построить.

Подобнымъ образомъ и многія другія формулы можно привести къ такимъ видамъ, при которыхъ онѣ легко могутъ быть построены.

5. Покажемъ еще построеніе корней квадратнаго урав. Возьмемъ

урав. $x^2-ax+b^2=0$, гдѣ a можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Изъ этого урав. имѣемъ $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$. Для построенія этой формулы, на прямой (чер. 323) $DE=a$ описываемъ полукругъ; потомъ возставляемъ изъ D перпендикуляръ къ DE, откладываемъ на немъ $DA=b$; проводимъ $AMN \parallel DE$; изъ M опустимъ на DE перпендикуляръ MP. Соединивъ M съ центромъ C, получимъ

Чер. 323.



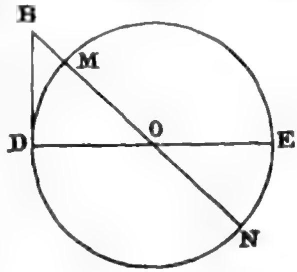
$$CP=\sqrt{MC^2-MP^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

Поэтому $PE=CE+CP=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$; $DP=DC-CP=$ $=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$. Итакъ PE и DP будутъ величины x.

Возьмемъ квадр. урав. $x^2-ax-b^2=0$; отсюда

$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$. Для построенія x описываемъ (чер. 324) окружность на $DE=a$, какъ на діаметрѣ; возставляемъ къ DE перпендикуляръ $DB=b$ и проводимъ черезъ центръ O сѣкущую $BMON$; тогда $BO=$ $=\sqrt{DO^2+BD^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$; $NB=$ $=NO+OB=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$;

Чер. 324.



$$MB=OB-OM=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}-\frac{a}{2}$$
$$=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\right).$$

Такимъ образомъ NB и MB представятъ абсолютныя величины x.

231. Задачи на вычисленіе. 1. Въ треуг. ABC сторона $AB=8$, $AC=11$, $BC=15$ фут.; изъ точки D стороны AB проведена $DE \parallel BC$; опредѣлить AE и DE, если $AD=5$ фут.?

2. Въ треуг. ABC сторона $AB=21{,}7$; $AC=17{,}36$; прямая DE отсѣкаетъ отъ этихъ сторонъ части $AD=15{,}5$ и $AE=12,4$. Въ какомъ положеніи находится DE относительно BC?

3. Въ треуг. ABC сторона $AB=21{,}7$. $AC=15,5$; $BC=29{,}76$; уг. A раздѣленъ пополамъ прямою AD, пересѣкающею BC въ D; опредѣлить BD и DC?

4. Прямая AD, дѣлящая пополамъ уг. A треуг. ABC, дѣлитъ противоположную сторону BC на отрѣзки $BD=6^3/_7$ и $DC=3^3/_7$. Опредѣлить сторону AB, если $AC=9^3/_5$?

5. Периметръ треуг.$=49^7/_{12}$; а прямая, дѣлящая пополамъ одинъ изъ угловъ треуг., дѣлитъ противоположную сторону на отрѣзки, равные 10 и $7^1/_2$. Опредѣлить стороны треуг.?

6. Стороны треуг. ABC суть 14 ф. 6 дюйм., 19 ф. 6 д. и 26 ф. 6 д.; меньшая сторона треуг. $abc \infty ABC$ равна 4 ф. 10 д.; опредѣлить другія стороны abc?

7. Сторона треуг. равна $31^1/_2$ ф.; прямая, параллельная ей, дѣлитъ другія стороны въ отношеніи 3:4. Опредѣлить величину параллельной?

8. Стороны треуг. суть $43^{11}/_{12}$ д., $90^5/_{12}$, $103^1/_3$ д.; прямая, параллельная первой сторонѣ, проведена такъ, что отрѣзокъ ея между двумя другими сторонами равенъ $2^5/_6$ дюйм.; въ какихъ разстояніяхъ отъ вершины противолежащаго угла пересѣкаетъ она другія двѣ стороны треуг.?

9. Параллельныя стороны трапеціи суть 13,2 и 17,6; одна изъ непараллельныхъ сторонъ$=7,7$; на сколько надо продолжить ее для того, чтобы она встрѣтилась съ продолженіемъ другой непараллельной стороны?

10. Периметры двухъ подобныхъ равнобедр. треуг. равны 255,4 и 102,16; основаніе перваго на 30,648 больше основанія другаго; опредѣлить стороны обоихъ треуг.?

11. Стороны треуг. равны $7^4/_5$, $8^2/_3$ и $9^3/_4$; периметръ подобнаго ему треуг.$=18^3/_{20}$: опредѣлить стороны?

12. Стороны треуг. ABC и сторона подобнаго ему треуг. $A_1B_1C_1$ равны 1) $a=2$ ф 6 д., $b=3$ ф. 8 д., $c=4$ ф. 6 д., $a_1=1$ ф. 3 д.; 2) $a=10,08$; $b=8,82$; $c=7,14$; $c_1=12,41$. Опредѣлить остальныя стороны треуг. $A_1B_1C_1$?

13. Въ треуг. даны: сторона a; высота h, опущенная на a, и разстояніе p, въ которомъ находится отъ стороны a параллель къ ней. Опредѣлить эту параллель, если 1) $a=19,2$; $h=17,6$; $p=7,7$?; 2) $a=8$ дюйм. 8, 4 лин.; $h=7$ д. 6,5 лин.; $p=1$ д. 3,5 лин.?

14. Въ треуг. дана сторона a и высота h, опущенная на нее, и проведена прямая, параллельная a; отрѣзокъ этой прямой между сторонами треуг.$=m$. Опредѣлить разстояніе этой параллели отъ a, если 1) $a=12^2/_3$, $h=14^1/_4$, $m=8^1/_2$? 2) $a=8,4$; $h=3,6$; $m=2,1$?

15. Въ треуг. ABC дано основаніе a, параллель къ a, равная m, и разстояніе p этой параллели отъ a. Опредѣлить высоту, если 1) $a=18$; $m=8,6$; $p=14,1$? 2) $a=17^{11}/_{12}$; $m=8^3/_4$; $p=12,375$?

16. Вертикально поставленный шестъ, котораго длина a, бросаетъ тѣнь длиной b; опредѣлить высоту предмета, котораго тѣнь въ тоже время имѣетъ длину b_1? Рѣшить эту задачу, когда 1) $a=5$ ф.; $b=3^3/_4$ ф.; $b_1=98,5$ ф.? 2) $a=8^1/_2$; $b=5^2/_3$; $b_1=74,75$? 3) $a=8,25$; $b=3^3/_4$; $b_1=19,1666....$? 4) $a=8$; $b=5$; $b_1=132^1/_2$?

17. Въ треуг. вписанъ квадратъ такъ, что одна сторона его совпадаетъ съ основаніемъ, а двѣ противоположныя вершины лежатъ на

сторонахъ треуг.; опредѣлить сторону квадрата, если основаніе треуг.=24 ф., а высота=20 ф.?

18. Опредѣлить наименьшій размѣръ въ вертикальномъ направленіи и разстояніе отъ пола вертикально-поставленнаго зеркала, въ которомъ стоящій передъ нимъ человѣкъ, имѣющій 2 арш. 4 верш. росту, видитъ себя во весь ростъ, если разстояніе глазъ его отъ пола=2 арш. 2 верш.?

Примѣчаніе. Въ слѣдующихъ задачахъ до 30-й включительно a означаетъ гипотенузу, b и c катеты прямоуг. треуг.; h—высоту, опущенную на гипотенузу; p и q—отрѣзки гипотенузы, образованные высотой и прилежащіе къ угламъ B и C.

19. Найти a, p, q, h, если 1) $b=24$, $c=45$? 2) $b=3,6$; $c=4,8$? 3) $b=2,977$; $c=19,236$?

20. Найти c, h, p, q, если $a=7,09$; $b=6,45$?

21. Найти q, a, p, c, если $b=126,3$; $h=84,5$?

22. Найти h, a, q, b, если $c=12,14$; $p=8,13$?

23. Найти h, b, c, a, если $p=46,08$; $q=35,28$?

24. Найти c, a, q, b, если $p=1176$; $h=4032$?

25. Въ прямоуг. треуг. взята точка M, разстоянія которой отъ b и c суть m и n; опредѣлить разстояніе M отъ a?

26. Найти a, q, c, если $b=24$; $p=14$?

27. Найти b и c, если $a=15$; $b+c=20$? Больше чего не можетъ быть $b+c$?

28. Найти b, c, если $a=40$, $b-c=10$?

29. Найти a, b, c, если $a+b+c=100$; $h=20$?

30. Найти a, b, c, если $a+b+c=13,2$; $a^2+b^2+c^2=60,5$?

31. По данной сторонѣ a равносторонняго треуг. опредѣлить высоту h и обратно по h найти a?

32. Катетъ треуг.=17,13 дюйм. и образуетъ съ гипотенузой уг. 60°; опредѣлить гипотенузу?

33. Сторона треуг.=27,24 и образуетъ съ основаніемъ уг. 30°; опредѣлить высоту треуг.?

34. Основаніе равнобедр. треуг.=0,234; а высота=0,123; опредѣлить сторону?

35. Основаніе равнобедр. треуг.=80, а сторона=41; опредѣлить высоту?

36. Сторона равнобедр. треуг.=44,37; высота=30,6; опредѣлить основаніе?

37. Основаніе b равнобедр. треуг.=48,17; а высота h_1, опущенная на сторону a, равна 32,44; опредѣлить сторону a и высоту h треуг.?

38. Какого вида будетъ треуг., если стороны его равны $5^2/_3$; 5 и $2^2/_3$? 5; $2^1/_2$ и 4? 3; 2; 2,75?

39. Какого вида будетъ треуг., если стороны его равны 0,75; 0,026; 0,748? 1,25; 1,04; 1,82? 42,9; 72,8; 84,5? 2,04; 2,12; 2,51?

40. Въ треуг. ABC сторона $a=1,5$; $b=0,8$. Найти предѣлы для стороны c, если 1) уг. C острый? 2) если уг. C тупой? 3) если уг. A острый? 4) если уг. A тупой?

41. Рѣшить предъид. зад., полагая $a=24,3$; $b=20,8$?

42. Рѣшить зад. 40-ю для $a=0,461$; $b=0,257$?

43. Въ треуг. ABC изъ вершины A опущена высота h на a, при чемъ на a получились отрѣзки: p, прилежащій къ уг. B, и q, прилежащій къ C. Полагая p и q данными, найти предѣлы для h, когда уг. A острый, и когда A тупой?

44. По сторонамъ a, b, c треуг. ABC опредѣлить отрѣзки, образуемые на каждой изъ нихъ опущенными на нихъ высотами? Сдѣлать вычисленіе 1) когда $a=0,465$; $b=0,645$; $c=0,546$? 2) когда $a=56,3$; $b=41,5$; $c=28,2$?

45. Въ треуг. ABC сторона $a=13^1/_2$, $b=18^1/_4$, $c=28$; вычислить прямыя, соединяющія вершины угловъ съ срединами противоположныхъ сторонъ?

46. Въ треуг. ABC дана точка P на сторонѣ a; вычислить AP, если 1) $a=213$; $b=178$; $c=151$; $BP=150$? 2) $a=64,5$; $b=53,7$; $c=46,5$ и $BP=29,2$?

47. Основаніе треуг.$=43^1/_3$; а одна изъ прочихъ сторонъ, составляющая съ основаніемъ уг. 60^0, равна $31^1/_4$; опредѣлить отрѣзки основанія, на которые раздѣлитъ его высота?

48. Двѣ стороны треуг. равны $1^1/_2$ и $^4/_3$, а уг. между ними$=60^0$; опредѣлить третью сторону?

49. Двѣ стороны треуг.$=2^3/_5$ и 2, 1; а уголъ между ними$=120^0$; опредѣлить третью сторону?

50. Въ треуг. ABC изъ точки P, находящейся на сторонѣ AB, проведены параллели PD и PE къ сторонамъ треуг. BC и AC. На какія части точка P дѣлитъ сторону AB, если $DE \parallel AB$?

51. Опредѣлить стороны a и b параллелограмма по периметру s и высотамъ h и h_1?

52. По діагоналямъ e и f параллелограмма и сторонѣ a опредѣлить другую сторону b?

53. По сторонамъ a и b параллелограмма и діагонали e опредѣлить діагональ f?

54. По сторонамъ a, b, c, d четыреугольника и діагонали e вычислить діагональ f, если 1) $a=42,5$; $b=39,3$; $c=32,5$; $d=45,3$; $e=38,6$? 2) $a=196,23$; $b=127,45$; $c=32,5$; $d=128,17$; $e=116,28$?

55. По сторонамъ a, b, c, d трапеціи, причемъ $b \parallel d$ и $b>d$, опредѣлить діагонали e, f и высоту h?

56. По параллельнымъ сторонамъ b и d трапеціи и діагоналямъ e и f опредѣлить стороны a и c?

57. По непараллельнымъ сторонамъ a и c трапеціи и діагоналямъ e, f опредѣлить стороны b и d?

58. Діагонали ромба 210 и 112; опредѣлить периметръ его?

59. Діагональ прямоугольника$=68$, а периметръ$=184$; опредѣлить стороны?

60. Сходственныя стороны двухъ подобныхъ многоугольниковъ суть 31,5 и 6,3; а разность периметровъ ихъ$=28$. Опредѣлить периметры?

61. Двѣ сходственныя стороны двухъ подобныхъ четыреугольниковъ даютъ въ суммѣ 5,6; а периметры ихъ равны 12,322 и 4,758. Опредѣлить ихъ стороны?

62. Стороны пятиугольника суть 10 ф., 16 ф. 8 дюйм., 9 ф. 2 д., 12 ф. 6 д., 18 ф. 4 д.; периметръ 5-ка, ему подобнаго, равенъ $13^1/_3$ ф. Опредѣлить стороны?

63. Периметры двухъ подобныхъ многоуг. равны 27,71 и 3,26; а разность сходственныхъ діагоналей$=^3/_4$. Опредѣлить діагонали?

64. Двѣ хорды разсѣкаютъ другъ друга такъ, что части одной 1,5 и 2,8; а одинъ отрѣзокъ другой хорды равенъ $3^1/_2$. Найти другой отрѣзокъ?

65. Отрѣзки одной изъ двухъ пересѣкающихся хордъ суть 25 и 6; отношеніе отрѣзковъ другой$=^3/_2$. Опредѣлить вторую хорду?

66. Опредѣлить величину хорды, отстоящей отъ центра на 6 саж. 2 ф., если радіусъ круга$=$17 с. 6 ф.?

67. Хорда въ 36 дюйм. отстоитъ отъ центра на $7^1/_2$ дюйм.; опредѣлить радіусъ?

68. Одна изъ двухъ пересѣкающихся хордъ$=16^1/_2$ дюйм., а отрѣзки другой суть 6 и 3,75 дюйм.; опредѣлить отрѣзки первой хорды?

69. Въ кругѣ радіуса 3,7 дюйм. проведена хорда въ 5,92 дюйм.; опредѣлить ея разстояніе отъ центра?

70. Хорда въ 18 дюйм. дѣлитъ перпендикулярный къ ней радіусъ такъ, что часть его, прилежащая къ центру, на 9 дюйм. больше части, прилежащей къ окружности; опредѣлить радіусъ?

71. Въ кругѣ проведена хорда$=$0,8 ф.; изъ одного конца ея проведенъ діаметръ, а изъ другаго опущенъ на этотъ діаметръ перпендикуляръ; діаметръ раздѣлялся перпендикуляромъ на двѣ части, изъ которыхъ часть, не прилежащая къ хордѣ, равна 1,2 ф. Опредѣлить діаметръ и хорду, прилежащую къ данному отрѣзку діаметра?

72. Опредѣлить діаметръ круга, если хорда, проведенная изъ его конечной точки, равна 36 дюйм.; а перпендикуляръ, опущенный изъ конца хорды на діаметръ, дѣлитъ его на отрѣзки, которыхъ разность равна 6 дюйм.?

73. Изъ конца діаметра проведены двѣ хорды—въ 24 и 45 дюйм.; изъ концовъ хордъ опущены на діаметръ перпендикуляры; опредѣлить діаметръ и отрѣзки его, прилежащіе къ хордамъ, если разность между этими отрѣзками $=$15 дюйм.?

74. Точка внутри круга отстоитъ отъ центра на $4^4/_5$ фут.; а хорда, проведенная черезъ нее, дѣлится въ этой точкѣ на двѣ части, равныя $5^{11}/_{13}$ и $3^{11}/_{15}$ ф. Опредѣлить радіусъ круга?

75. Изъ двухъ сѣкущихъ одна $=$ 7,2 дюйм., а внѣшній отрѣзокъ ея $=$ 1,6 дюйм.; опредѣлить другую сѣкущую, если ея внѣшній отрѣзокъ $=$ 2,4 дюйм.?

76. Одна изъ двухъ сѣкущихъ $=$ 5,225 верш., а часть ея внутри круга $=$ 4,425 верш. Опредѣлить другую сѣкущую, если внѣшняя часть ея на 1,6 верш. больше внутренней?

77. Радіусъ круга $=$ 3 ф. 5 дюйм.; изъ точки, отстоящей на 4 ф. 11 дюйм. отъ центра, проведена сѣкущая, которая дѣлится окружностью пополамъ. Опредѣлить длину сѣкущей?

78. Изъ точки внѣ круга проведены касательная и сѣкущая; касательная $=$ 1,8 дюйм., а внѣшній отрѣзокъ сѣкущей $=$ 1,2 дюйм.; опредѣлить длину всей сѣкущей?

79. Изъ точки внѣ круга проведены касательная и сѣкущая; сѣкущая $=$ 5,4; а внѣшній отрѣзокъ ея $=$ 0,6. Опредѣлить длину касательной?

80. Изъ точки внѣ круга проведены сѣкущая и касательная; сумма ихъ $=$ 22,95; внѣшняя часть сѣкущей на 3,5 меньше касательной. Опредѣлить сѣкущую и касательную?

81. Изъ точки внѣ круга проведена черезъ центръ его сѣкущая, внѣшній отрѣзокъ которой $=$ 5, и касательная $=$ 8,5; опредѣлить радіусъ?

82. Если наблюдатель находится на высотѣ одной версты надъ землею, то радіусъ видимаго имъ горизонта $=$ 110 верстамъ; опредѣлить радіусъ земли?

232. Доказать теоремы: 1. Прямыя, выходящія изъ одной точки, разсѣкаются двумя параллелями на части пропорціональныя.

2. Если на прямой AB отложить отъ A части AC и AD по одному направленію и изъ полученныхъ точекъ C и D провести по одну сторону AB двѣ параллельныя между собой линіи CE и DF, находящіяся въ такомъ же отношеніи другъ къ другу, какъ AC и AD, то конечныя точки E и F этихъ параллелей лежатъ на одной прямой съ A. Тоже будетъ и въ томъ случаѣ, если отрѣзки AC и AD отложить въ разныя стороны отъ A, а параллели изъ C и D провести по разнымъ сторонамъ AB.

3. Прямая, дѣлящая пополамъ внѣшній уг. при вершинѣ A треуг. ABC, пересѣкаетъ противоположную сторону BC въ точкѣ D, разстоянія которой BD и CD отъ остальныхъ вершинъ B и C относятся какъ стороны, прилежащія къ этимъ разстояніямъ.

4. Составить и доказать теорему, обратную предъидущей?

5. Въ прямоуг. треуг. 1) квадраты катетовъ пропорціональны прилежащимъ отрѣзкамъ гипотенузы, образованнымъ высотою; 2) квадратъ катета относится къ квадрату гипотенузы какъ прилежащій отрѣзокъ гипотенузы къ цѣлой гипотенузѣ.

6. Если въ треуг. одна изъ высотъ есть средняя пропорціональная между образуемыми ей отрѣзками соотвѣтствующей стороны, то уголъ, изъ вершины котораго она выходитъ, $= 90^0$.

7. Если въ треуг. какая либо сторона есть средняя пропорціональная между одной изъ прочихъ сторонъ и прилежащимъ отрѣзкомъ этой послѣдней, образовавшимся отъ проведенія соотвѣтствующей ей высоты, то уголъ, изъ вершины котораго выходитъ высота, $= 90^0$.

8. Если въ равнобедр. треуг. продолжить основаніе въ обѣ стороны, на продолженіяхъ отъ конечныхъ точекъ отложить боковыя стороны, и полученныя такимъ образомъ точки соединить съ вершиной, то сторона образовавшагося новаго равнобедр. треуг. будетъ средняя пропорціональная между его основаніемъ и стороной даннаго треуг.

9. Два треуг. подобны, если имѣютъ по равному углу и если высоты, опущенныя на стороны, заключающія эти углы, пропорціональны.

10. Два треуг. подобны, если имѣютъ по равному углу при основаніи, и если основанія ихъ пропорціональны высотамъ.

11. Если въ остроуг. треуг. ABC провести двѣ высоты: $BD \perp AC$ и $CE \perp AB$, то, означивъ точку пересѣченія высотъ черезъ O, будемъ имѣть: $EO.OC = BO.OD$; $AB.EA = AC.AD$; $AD.CD = BD.OD$; $AE.EB = CE.EO$.

12. Прямая, соединяющая основанія двухъ высотъ остроуг. треуг., отсѣкаетъ треуг., подобный данному.

13. Если въ треуг. опустить высоты на двѣ стороны и изъ основанія каждой высоты опустить перпендикуляръ на сторону, соотвѣтствующую другой высотѣ, то прямая, соединяющая основанія этихъ перпендикуляровъ, будетъ параллельна третьей сторонѣ треуг—ка.

14. Если изъ конечныхъ точекъ какой либо стороны треуг. провести прямыя, составляющія равные углы съ двумя другими сторонами, то верхніе отрѣзки этихъ прямыхъ будутъ обратно пропорціональны нижнимъ; а стороны, къ которымъ проведены эти прямыя, будутъ обратно пропорціональны своимъ отрѣзкамъ, прилежащимъ къ общей вершинѣ.

15. Если въ двухъ треугольникахъ, имѣющихъ общее основаніе и равныя высоты, провести прямую, параллельную основанію, то отрѣзки этой параллели, заключенные въ треугольникахъ, будутъ равны между собою.

16. Если въ треуг. ABC изъ вершины A провести двѣ прямыя, пересѣкающія противоположную сторону подъ углами, равными углу A, то получатся два треуг., подобные данному. Когда эти двѣ прямыя могутъ совпасть?

17. Если въ треуг. ABC и DEF уг. $A =$ уг. D, а уг. $B +$ уг. $E = 180^0$, то стороны, заключающія углы C и F, находятся въ одинакомъ отношеніи въ обоихъ треуг.

18. Въ прямоуг. треуг. сумма гипотенузы и высоты, опущенной на нее, больше суммы катетовъ.

19. Если на сторонѣ BC треуг. ABC построить квадратъ $BCED$, такъ чтобы онъ былъ внѣ треугольника, потомъ соединить точки D и E съ вершиной A, изъ точекъ пересѣченія F и G этихъ линій съ стороной BC возставить перпендикуляръ къ BC до пересѣченія съ двумя другими сторонами въ точкахъ K и L, и соединить эти послѣднія, то фигура $FGKL$ будетъ квадратъ.

20. Если изъ точки, взятой на одной изъ сторонъ треуг., провести параллели къ двумъ другимъ сторонамъ, то произведеніе этихъ параллелей будетъ равно произведенію тѣхъ отрѣзковъ двухъ другихъ сторонъ, которые прилежатъ къ первой сторонѣ.

21. Если въ треуг. ABC провести прямую $DE \parallel BC$ и ея конечныя точки D и E соединить съ вершинами B и C прямыми линіями, то эти прямыя пересѣкутся въ такой точкѣ O, что, соединивъ ее съ A прямой AO и продолживъ до пересѣченія съ BC въ точкѣ F, мы прямую BC раздѣлимъ пополамъ.

22. Средины параллельныхъ сторонъ трапеціи, точка пересѣченія непараллельныхъ сторонъ и точка пересѣченія діагоналей лежатъ на одной прямой линіи.

23. Прямыя, соединяющія средины сторонъ треуг. съ вершинами противоположныхъ угловъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, притомъ

такъ, что часть каждой прямой, прилежащая къ углу, вдвое больше другой ея части.

24. Соединивъ средины сторонъ треуг., получимъ треуг., подобный данному; стороны его будутъ половины сторонъ даннаго; притомъ линіи, дѣлящія пополамъ углы въ обоихъ треугольникахъ, совпадаютъ.

25. Если два подобные параллелограмма наложить другъ на друга такъ, чтобы у нихъ совпали равные углы и двѣ сходственныя стороны, заключающія эти углы, или такъ, чтобы эти углы сдѣлались вертикальными, то вершины противолежащихъ угловъ расположатся на одной прямой съ совпавшими вершинами.

26. Если изъ какой либо точки P діагонали параллелограмма опустить перпендикуляры на стороны, выходящія изъ общей съ діагональю вершины, то эти перпендикуляры будутъ обратно пропорціональны сторонамъ параллелограмма.

27. Составить и доказать теоремы, обратныя предъидущей?

28. Если изъ точки E на сторонѣ BC параллелограмма $ABCD$ провести $EF \parallel$ сторонѣ AB параллелограмма и точку E соединить съ A, то линіи EF и AE пересѣкутъ діагональ BD въ точкахъ H и G такъ, что $DH : BH = BH : HG$.

29. Если черезъ точку, взятую на діагонали параллелограмма, провести прямую, пересѣкающую всѣ стороны параллелограмма, то отрѣзки этой прямой между діагональю и двумя ближайшими сторонами относятся какъ отрѣзки между діагональю и сторонами, параллельными двумъ первымъ.

30. Если черезъ точку, взятую на діагонали параллелограмма, провести параллели къ обѣимъ неравнымъ сторонамъ его до встрѣчи съ противоположными сторонами, то образуется новый параллелограммъ, подобный данному, и одна діагональ этого параллелогр. сливается съ той діагональю даннаго, на которой взята точка, а другая параллельна другой діагонали даннаго параллелограмма.

31. Линія, параллельная основанію трапеціи, дѣлитъ непараллельныя стороны ея на части пропорціональныя.

32. Если трапецію пересѣчь линіей, параллельной основанію, то части этой линіи между діагоналями и непараллельными сторонами будутъ равны между собою.

33. Если въ равнобедренной трапеціи діагональ равна бо̀льшему основанію, то каждая изъ непараллельныхъ сторонъ есть средняя пропорціональная между бо̀льшимъ основаніемъ и разностью между основаніями.

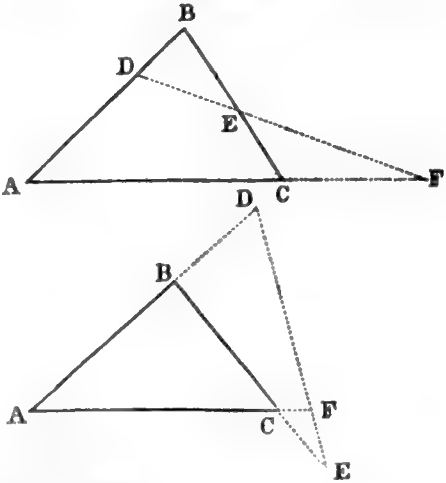
34. Разность квадратовъ двухъ сторонъ треуг. = удвоенному произведенію третьей стороны на разстояніе отъ средины этой стороны до основанія перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ вершины противоположнаго угла.

35. Произведеніе двухъ сторонъ треугольника = квадрату прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между ними, сложенному съ произведеніемъ изъ отрѣзковъ третьей стороны, образованныхъ линіей, дѣлящей пополамъ уголъ.

36. Если a, b, c суть стороны треуг., p его полупериметръ, l — линія, дѣлящая пополамъ уг. A, то $l = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

37. Если въ треуг. ABC (черт. 325) проведемъ произвольную прямую DF, отсѣкающую отъ каждой стороны его два отрѣзка: отъ AB — отрѣзки AD и DB, отъ BC—отрѣзки BE и EC и отъ AC—отрѣзки AF и CF, то произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общей вершины треугольника, равно произведенію остальныхъ трехъ отрѣзковъ; т. е. $AD.BE.CF = DB.EC.AF$.

Чер. 325.



38. Прямыя, соединяющія сходственныя вершины двухъ подобныхъ многоуг. P и P_1, которыхъ сходственныя стороны параллельны, пересѣкаются въ общей точкѣ O, наз. *центромъ подобія.*

39. Если средину C дуги, соотвѣтствующей хордѣ AB, которая = радіусу, соединить съ конечными точками B и D діаметра BD, выходящаго изъ общей съ хордой точки B, то радіусъ будетъ средней пропорціональной между прямыми BC и CD.

40. Двѣ, взаимно-перпендикулярныя хорды, выходящія изъ одной точки окружности, разсѣкаются каждымъ діаметромъ на части пропорціональныя. (Одна изъ хордъ должна быть продолжена до пересѣченія съ діаметромъ).

41. Если изъ точки пересѣченія A двухъ касательныхъ къ кругу AB и AC провести къ нему сѣкущую $ADEF$, то квадратъ отрѣзка AE этой сѣкущей, заключеннаго между точкой пересѣченія и хордой, соединяющей точки касанія, равенъ квадрату касательной безъ произведенія отрѣзковъ сѣкущей, заключенныхъ внутри круга.

42. Если черезъ точку, взятую на общей хордѣ двухъ пересѣкающихся окружностей, провести въ каждой окружности по хордѣ, то произведенія отрѣзковъ этихъ хордъ будутъ равны.

43. Если прямая раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то разность между цѣлой прямой и бо̀льшимъ отрѣзкомъ больше разности между отрѣзками.

44. Если линія AB раздѣлена въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что $AB:BC = BC:AC$, и если продолжить ее за точку B на разстояніе $= BC$, то увеличенная такимъ образомъ линія будетъ въ точкѣ B раздѣлена также въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

45. Если меньшую часть линіи, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, отложить на бо̀льшей части, то эта послѣдняя раздѣлится также въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

46. Если прямыя AB и AC пересѣкаются въ точкѣ A и если на нихъ находятся такія точки D и E, что отрѣзки AD и AE обратно

пропорціональны прямымъ AB и AC, то точки B, C, D, E лежатъ на окружности.

47. Если центръ O_1 одного изъ двухъ пересѣкающихся круговъ лежитъ на окружности другаго и изъ O_1 во второмъ кругѣ проведена хорда O_1A, то радіусъ перваго круга есть средняя пропорціональная между всей этой хордой и отрѣзкомъ ея O_1B, заключеннымъ межъу O_1 и общей хордой CD.

48. Если черезъ точку касанія двухъ круговъ провести прямую, пересѣкающую окружности обоихъ круговъ, то части ея внутри круговъ будутъ обратно пропорціональны радіусамъ.

49. Общая внѣшняя касательная къ двумъ, касающимся извнѣ, кругамъ есть средняя пропорціональная между ихъ діаметрами.

50. Сумма квадратовъ отрѣзковъ деухъ хордъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, равна квадрату діаметра.

51. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ прямыя, проведенныя изъ точки M къ прямой AB, дѣлятся въ отношеніи $m:n$?

52. Опредѣлить геометр. мѣсто точекъ, въ которыхъ прямыя, заключенныя между двумя параллелями AB и CD, дѣлятся въ отношеніи $m : n$. ?

53. Если между сторонами угла провести произвольную прямую, раздѣлить ее въ отношеніи $m : n$ и соединить точку дѣленія съ вершиной угла прямой линіей, то эта линія будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, въ которыхъ прямыя, параллельныя первой произвольной прямой, раздѣлятся въ отношеніи $m : n$.

54. Опредѣлить геометр. мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ отношеніи $m : n$ прямыя, проведенныя изъ точки P къ окружности O?

55. Опредѣлить геометр. мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ AB и AC находятся въ отношеніи $m : n$?

56. Геометр. мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ B и C равна постоянной величинѣ k^2, есть окружность, имѣющая центромъ средину D прямой BC, соединяющей данныя точки, а радіусомъ $\sqrt{\frac{k^2}{2} - BD^2}$.

57. Геом. мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равна постоянной величинѣ k^2, есть перпендикуляръ къ прямой BC, соединяющей точки B и C, возставленный изъ точки E, разстояніе которой отъ средины D прямой BC равно $\frac{k^2}{2BC}$.

58. Дана окружность O и на ней точка A; опредѣлить геом. мѣсто точекъ такого свойства, чтобы сѣкущія, проведенныя изъ нихъ въ точку A, и внѣшніе отрѣзки ихъ имѣли средней пропорціональной данную прямую m?

233. Задачи на построеніе. 1. Раздѣлить прямую AB на двѣ части въ отношеніи $m : n$?

2. Раздѣлить прямую AB на части, пропорціональныя прямымъ m, n, p, q?

3. Раздѣлить прямую AB на двѣ части такъ, чтобы другая данная прямая m была между ними средней пропорціональной?

4. Раздѣлить прямую AB на такія двѣ части, чтобы другая данная прямая m была средней пропорціональной между всей AB и одной ея частью?

5. Раздѣлить прямую AB на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ этихъ частей равнялась квадрату данной прямой m?

6. Раздѣлить прямую AB на такія двѣ части, чтобы разность квадратовъ ихъ равнялась квадрату данной прямой m?

7. На продолженіи прямой AB найти такую точку, чтобы прямая m была средней пропорціональной между разстояніями этой точки отъ A и B?

8. Продолжить прямую AB такъ, чтобы прямая m была средней пропорціональной между AB и ея продолженіемъ?

9. Продолжить прямую AB такъ, чтобы данная прямая m была средней пропорціональной между продолженной AB и ея первоначальной длиной?

10. Раздѣлить прямую AB на такія двѣ части, чтобы одна изъ нихъ была средней пропорціональной между другой частью и данной прямой m?

11. Построить двѣ прямыя, зная ихъ сумму s и среднюю пропорціональную между ними m (иначе говоря, зная ихъ произведеніе m^2)?

12. Построить двѣ прямыя, зная ихъ разность d и среднюю пропорц. между ними m?

13. Построить двѣ прямыя, которыхъ квадраты относятся какъ $m:n$?

14. Построить двѣ прямыя, которыя относились бы какъ квадраты данныхъ прямыхъ a и b?

15. Раздѣлить данную прямую AB на такія двѣ части, чтобы квадраты ихъ относились какъ $m:n$?

16. Раздѣлить прямую AB на двѣ такія части, чтобы онѣ относились какъ квадраты данныхъ линій?

17. Черезъ точку M, находящуюся внутри или внѣ угла BAC, провести прямую такъ, чтобы она пересѣкала стороны угла и чтобы 1) отрѣзки ея, заключенныя между точкой M и сторонами угла, относились какъ $m:n$? 2) часть прямой между сторонами угла относилась бы къ одному изъ своихъ отрѣзковъ какъ $m:n$?

18. Черезъ точку M провести къ сторонамъ уг. BAC сѣкущую такъ, чтобы 1) отрѣзки сторонъ угла относились какъ $m:n$?
2) часть сѣкущей между сторонами угла относилась къ одному изъ отрѣзковъ сторонъ угла какъ $m:n$?

19. Даны двѣ параллели AB и CD, разсѣченныя прямой EG, и точка M; провести черезъ M прямую такъ, чтобы она пересѣкла всѣ три линіи и чтобы отрѣзки ея между параллелями находились въ отношеніи $m:n$?

20. На прямой AB построить параллелограммъ съ угломъ m при точкѣ A такъ, чтобы прямая, соединяющая средины бо́льшихъ сторонъ его, раздѣлила параллелограммъ на два, *подобныхъ* ему, параллелограмма?

21. Черезъ точку M внутри круга провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ отношеніи $m:n$?

22. Въ кругѣ проведены два радіуса OA и OB; построить хорду, которая 1) дѣлилась бы этими радіусами на три равныя части? 2) дѣлилась бы этими радіусами такъ, чтобы внутренняя ея часть относилась къ каждой изъ внѣшнихъ какъ $m:n$?

23. Отложить въ кругѣ хорду$=a$ такъ, чтобы разстоянія ея отъ точекъ M и M_1 на окружности круга находились въ отношеніи $m:n$?

24. Построить въ кругѣ O хорду такъ, чтобы она пересѣкала діаметръ AB подъ угломъ a и въ точкѣ пересѣченія дѣлилась въ отношеніи $m:n$?

25. Черезъ данную точку A провести прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ BC и DE, не продолжая этихъ прямыхъ до пересѣченія?

26. Вписать квадратъ въ данный треуг. ABC (т. е. построить квадратъ такъ, чтобы двѣ его вершины лежали на одной сторонѣ треуг., а двѣ другія на двухъ остальныхъ сторонахъ треуг.)?

27. Вписать въ треуг. ABC прямоугольникъ, подобный данному $GHKL$ (см. зад. 26)?

28. Данъ уг. BAC и точка P между его сторонами; построить треуг., подобный данному треуг. DEF, притомъ такъ, чтобы одна вершина его находилась въ P, а двѣ другія на сторонахъ угла?

29. Данъ треуг. ABC и точка D на его сторонѣ BC; построить треуг. такъ, чтобы онъ былъ подобенъ данному треуг. MNQ, и чтобы одна вершина его находилась въ D, а двѣ другія на остальныхъ двухъ сторонахъ треуг. ABC?

30. Построить треуг. по основанію b, противолежащему углу B и отношенію $m:n$ двухъ прочихъ сторонъ?

31. Къ двумъ кругамъ провести общую касательную?

32. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ двѣ данныхъ точки A и B и касалась данной прямой CD?

33. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ данныя точки A и B и касалась данной окружности C?

34. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ данную точку A и касалась двухъ данныхъ прямыхъ MN и PQ?

35. Описать окружность такъ, чтобы она касалась двухъ данныхъ прямыхъ AB и AC и данной окружности J?

36. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ точку A и касалась двухъ данныхъ окружностей?

37. Описать окружность такъ, чтобы она проходила черезъ точку A и касалась окружности J и прямой BC?

38. Описать окружность такъ, чтобы она касалась прямой PQ и окружностей A и B, которыхъ радіусы R и r?

39. Описать окружность, которая касалась бы къ тремъ окружностямъ A, B, C, которыхъ радіусы r_1, r_2, r_3?

40. Описать окружность, которая бы проходила черезъ точки A и B и пересѣкала данную окружность C такъ, чтобы общая хорда была равна прямой a?

41. Провести окружность такъ, чтобы она проходила черезъ точки A и B и пересѣкала данную окружность C по ея діаметру?

42. На данной дугѣ AB найти такую точку, чтобы данная прямая p была средней пропорціональной между разстояніями этой точки отъ концовъ дуги?

43. Въ данный кругъ O вписать равнобедренный треуг. такъ, чтобы сумма основанія и высоты его была $=$ данной прямой a?

44. На данной прямой MN найти такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась прямой s?

45. На прямой MN найти такую точку, чтобъ разность разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась прямой d?

46. Построить такой треуг., чтобы стороны его были параллельны тремъ даннымъ прямымъ AB, CD, EF, и чтобы вершины треуг. находились на данной окружности O?

47. Построить такой треуг., чтобы одна сторона его проходила черезъ данную точку M, другія стороны были параллельны даннымъ прямымъ AB и CD, а вершины его находились бы на данной окружности O?

48. На билліардѣ, имѣющемъ видъ круга, помѣщенъ въ точкѣ A шаръ; какой путь онъ долженъ пройти, чтобы, отразившись два раза отъ борта, возвратиться на прежнее свое мѣсто?

49. Построить такой треуг., чтобы одна сторона его проходила черезъ точку A, другая черезъ B, третья была параллельна данной прямой CD, и чтобы вершины треуг. лежали на данной окружности O?

50. Построить такой треуг., чтобы одна сторона его проходила черезъ точку A, другая черезъ B, третья черезъ C, и чтобы вершины его лежали на данной окружности O?

51. Черезъ точку A, лежащую внѣ окружности, провести сѣкущую такъ, чтобы она дѣлилась окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и притомъ часть ея внутри круга была бо̀льшей частью?

52. Построить среднюю пропорціональную между двумя прямыми на основаніи теор. 8-й § 232?

234. Слѣдующія задачи рѣшить, составивъ уравненія и построивъ рѣшенія этихъ уравненій:

1. Въ прямоуг. $ABCD$ провести параллели ко всѣмъ сторонамъ въ одинакихъ отъ нихъ разстояніяхъ, такъ чтобы периметръ полученнаго новаго прямоуг. $=2p$?

2. На прямой AB дана точка C; опредѣлить на AB точку X такъ, чтобы $AC:AX=AX:AB$?

3. На прямой AB дана точка C; опредѣлить на AB точку X между A и C такъ, чтобы $AX^2=BX.CX$?

4. Къ сторонѣ AB параллелограмма $ABCD$ провести параллельную EF такъ, чтобы она діагоналями параллелограмма раздѣлилась на три части, изъ коихъ каждая внѣшняя относится къ внутренней какъ $m:n$?

Въ треуг., котораго стороны суть $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, провести $XY \parallel BC$ такъ, чтобы 5) $XY=YC$? 6) $AX=CY$?

7) $BX+CY=m$? 8) $BX-CY=m$? 9) $AX:XY=XY:AB$?

10) $XY^2 = AX . AC$?

На прямой AB даны двѣ точки C и D; найти на AB между C и D такую точку X, чтобы 11) $AX : BX = CX : DX$?

12) $AX : BX = DX : CX$? 13) $AX^2 - CX^2 = BX^2 - DX^2$?

14) $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$?

15) Черезъ вершину A треуг. ABC проведена прямая $\parallel BC$. Найти на ней такую точку X, чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ X на BC, былъ средней пропорціональной между перпендикулярами, опущенными изъ X на двѣ прочія стороны треугольника?

16. На той же прямой (см предъид. задачу) найти такую точку X, чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ нея на AB, былъ средней пропорціональной между перпендикулярами, опущенными на прочія двѣ стороны?

17. Черезъ точку A, данную внѣ окружности O, провести сѣкущую такъ, чтобы она окружностью раздѣлилась пополамъ?

18. Въ ромбѣ $ABCD$ на сторонахъ его отложить отъ двухъ противоположныхъ вершинъ равныя части такъ, чтобы полученныя при этомъ четыре точки были вершинами квадрата?

19. Построить равнобедр треуг. по даннымъ перпендикулярамъ h и h_1, опущеннымъ на основаніе и сторону изъ вершинъ противолежащихъ угловъ?

20. Построить равнобер. треуг. по периметру $2p$ и высотѣ h?

21. Построить прямоуг. треуг. по катету c и 1) суммѣ $a+b=s$ или 2) разности $a-b=d$ гипотенузы и другаго катета?

22. Въ конечной точкѣ B діаметра AB проведена къ кругу касательная; опредѣлить на ней такую точку X, чтобы сумма касательной XB и внѣшняго отрѣзка сѣкущей, проведенной изъ X черезъ центръ круга, равнялась данной прямой a?

23. На той же касательной (см. зад. 22) найти такую точку X, чтобы разность между касательной XB и внѣшнимъ отрѣзкомъ сѣкущей, проведенной черезъ центръ круга, была равна a?

24. На прямой AB найти такую точку X, чтобы сумма квадратовъ разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ M и N равнялась квадрату прямой s?

25. Черезъ точку, данную на линіи центровъ двухъ круговъ O и O_1, провести сѣкущую къ обоимъ кругамъ такъ, чтобы образуемыя ею хорды въ обоихъ кругахъ были равны?

26. На діаметрѣ AB въ кругѣ O даны точки M и M_1 въ одинакомъ разстояніи отъ центра; найти на окружности O такую точку X, чтобы радіусъ былъ средней пропорціональной между разстояніями этой точки отъ M и M_1?

27. Въ треуг. ABC провести прямую $XY \parallel BC$ такъ, чтобы $XY : BC = BX : AX$?

28. Данъ квадратъ $ABCD$; построить такой равносторон. треуг., чтобы одна вершина его находилась въ вершинѣ A квадрата, а двѣ другія вершины лежали на сторонахъ квадрата? Опредѣлить значеніе втораго корня?

29. Въ кругѣ O дана хорда AB; продолжить ее такъ, чтобы касательная, проведенная изъ конечной точки продолженія, равнялась b?

30. Построить прямоуг. треуг. по гипотенузѣ a и 1) суммѣ катетовъ $b+c=s$ или 2) разности ихъ $b-c=d$?

31. Данъ квадратъ $ABCD$, котораго сторона$=a$; начертить такой квадратъ, чтобы его сторона $=$ прямой b, а вершины его лежали на сторонахъ даннаго квадрата?

32. Данъ кругъ O и въ немъ діаметръ AB; изъ конечной точки его проведена къ кругу касательная BC. Описать окружность такъ, чтобы центръ ея лежалъ на окружности O, притомъ чтобы она проходила черезъ точку A и касалась линіи BC?

33. На прямой $AB=a$ опредѣлить точки X и Y такъ, чтобы BY была въ n разъ больше AX и чтобы $XY:AX=BY:AB$?

34. Построить такую равнобедренную трапецію, чтобы основаніе ея$=b$, высота$=h$, а прочія три стороны были равны между собою?

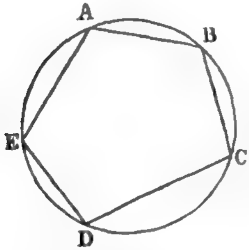
ГЛАВА VIII.

Многоугольники, вписанные въ кругъ и описанные около него.

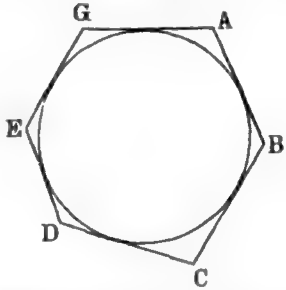
235. Возьмемъ на окружности (чер. 327) нѣсколько точекъ A, B, C..... и соединимъ ихъ прямыми линіями; тогда получимъ многоуг. $ABCDE$, который наз. *вписаннымъ* въ кругъ.

Если на окружности (чер. 328) взять нѣсколько точекъ и провести черезъ нихъ касательныя, то отъ пересѣченія этихъ касательныхъ образуется многоуг. $ABCDEG$, наз. *описаннымъ* около круга.

Чер. 327.



Чер. 328.



Итакъ *многоугольникъ наз. вписаннымъ въ кругъ, если его вершины лежатъ на окружности* и слѣд. стороны суть хорды этого круга, *и описаннымъ около круга, если всѣ стороны его касаются этого круга.* Поэтому *описать кругъ около многоуг. значитъ описать такую окружность, чтобы она прошла черезъ всѣ вершины даннаго многоуг.*; *а вписать кругъ въ многоуг. значитъ на-*

чертить такую окружность, которая касалась бы всѣхъ сторонъ многоугольника.

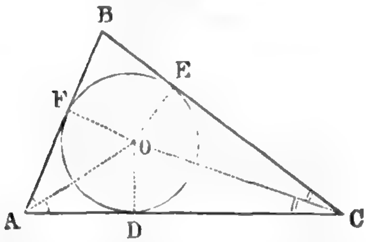
Такъ какъ окружность вполнѣ опредѣляется положеніемъ трехъ ея точекъ (§ 82), то очевидно, что обѣ предъидущія задачи не всегда возможны. Разсмотримъ нѣкоторые случаи, въ которыхъ онѣ возможны.

236. ***Около всякаго треуг. можно описать кругъ, и притомъ только одинъ***, потому что вершины треуг. не лежатъ на одной прямой линіи; а черезъ такія три точки (§ 82) можно всегда описать окружность, и притомъ только одну. Для этого надо двѣ стороны треуг. раздѣлить пополамъ и изъ срединъ ихъ возставить къ нимъ перпендикуляры; точка пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ центромъ; а прямая линія, соединяющая центръ съ одной изъ вершинъ треуг., будетъ радіусомъ круга, который пройдетъ черезъ всѣ вершины треуг.

Легко видѣть, что для остроуг. треуг. центръ описаннаго круга лежитъ внутри треуг.; для тупоуг.—внѣ его; для прямоуг. треуг. центръ находится на срединѣ гипотенузы.

237. ***Во всякій треуг. можно вписать кругъ, и притомъ только одинъ.*** Чтобъ вписать кругъ въ треуг. ABC (чер. 329), раздѣлимъ пополамъ два угла треуг., напр. A и C; линіи AO и CO, дѣлящія пополамъ эти углы, непремѣнно пересѣкутся, потому что сумма угл. A и C, какъ сумма двухъ угловъ треуг., меньше двухъ прямыхъ; а сумма ихъ половинъ, т. е. $OAD+OCD$, и подавно меньше двухъ прямыхъ; углы же OAD и OCD суть внутренніе односторонніе для линій AO и CO, пересѣченныхъ третьей линіей AC. Точка O и будетъ центромъ. Дѣйствительно, опустивъ изъ O перпендикуляры на стороны треуг., получимъ треуг. $AOD=AOF$ и $COD=COE$, ибо каждая пара треуг. имѣетъ общую гипотенузу и по равному острому углу; слѣд. $OD=OF=OE$. Поэтому окружность, описанная изъ O радіусомъ OD (или OF, OE), коснется сторонъ треуг. въ точкахъ D, F, E. Окружность эта можетъ быть только одна, ибо прямыя AO и CO пересѣкаются только въ одной точкѣ O, и изъ этой точки на каждую сторону треуг. можно опустить только одинъ перпендикуляръ.

Чер. 329.

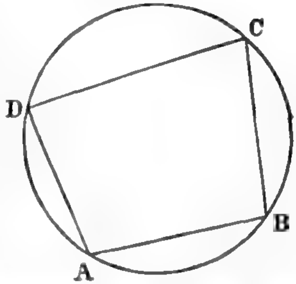


Если соединить точку O съ B, то получимъ треуг. $OBF=OBE$, ибо они имѣютъ общую гипотенузу OB и по равному катету OF и OE; изъ равенства этихъ треуг. слѣдуетъ равенство угловъ OBF и OBE; поэтому прямая OB дѣлитъ уг. B пополамъ. Отсюда заключаемъ, что *линіи, дѣлящія углы треуг. пополамъ, пересѣкаются всѣ въ одной точкѣ.*

Впрочемъ эту теорему можно доказать и другимъ образомъ (см. § 143 зад. 65).

238. *Во всякомъ, вписанномъ въ кругъ, четыреугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ*$=2d$. Дѣйствительно, уг. A (чер. 330) измѣряется половиной дуги BCD, а уг. C — половиной дуги BAD; дуги же эти составляютъ въ суммѣ цѣлую окружность, поэтому сумма ихъ половинъ$=180^0$, и слѣд. уг. $A+$уг. $C=$ $=2d$, а потому и $B+D=2d$, такъ какъ сумма всѣхъ угловъ въ четыреугольникѣ$=4d$.

Чер. 330.



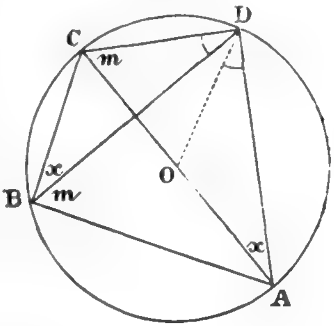
Отсюда слѣдуетъ, *что кругъ можно описать около такого четыреугольника, въ которомъ сумма противолежащихъ угловъ*$=2d$. Положимъ напр., что въ четыреуг. $ABCD$ (чер.330) уг. $A+$уг. $C=2d$, а слѣд. и $B+D=2d$. Проведемъ окружность черезъ точки A, B, C; тогда эта окружность пройдетъ и черезъ точку D, потому что если бы мы допустили, что точка D будетъ внутри окружности или внѣ ея, то сумма уг. D и B была бы больше или меньше $2d$.

Такимъ образомъ кругъ можно описать около прямоугольника, около равнобедренной трапеціи и около неправильнаго четыреугольника, углы котораго удовлетворяютъ условію предъидущей теоремы.

239. Выведемъ еще свойство вписаннаго четыреугольника.

Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ его. Для доказательства, въ углѣ BDA четыреугольника $ABCD$ (чер.331) отложимъ часть $ODA=$уг. BDC; тогда треуг. $BDC\infty ODA$, ибо уг. $x=x$ какъ опирающіеся на дугу CD, и углы при D равны по отложенію; слѣд. $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AO}$. Треуг. $BDA\infty CDO$, ибо уг. $m=m$ какъ опирающіеся на дугу DA; уг. $CDO=BDA$ какъ состоящіе изъ общаго угла BDO и двухъ равныхъ угловъ CDB и ODA; слѣд. $\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CO}$. Изъ выведенныхъ двухъ пропорцій получимъ:

Чер. 331.



$$BD \cdot AO = BC \cdot AD$$
$$\text{и } BD \cdot CO = BA \cdot CD$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ

$$BD\,(AO+CO)=BC \cdot AD+BA \cdot CD, \text{ или}$$
$$BD \cdot AC=BC \cdot AD+BA \cdot CD.$$

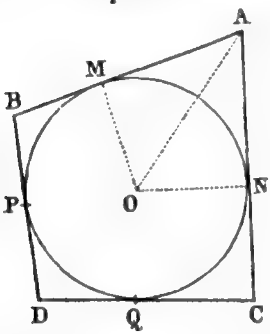
Эта теорема наз. *Птоломеевой.*

240. *Во всякомъ описанномъ четыреугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ равны между собою.* Соединивъ центръ O (чер. 332) съ точкой A и съ точками касанія M и N, получимъ треуг. $AOM=AON$, ибо у нихъ гипотенуза AO общая и $OM=ON$; слѣд. $AM=AN$. Точно также докажемъ, что $BM=BP$; $DQ=DP$; $CQ=CN$. Сложивъ всѣ эти равенства, получимъ

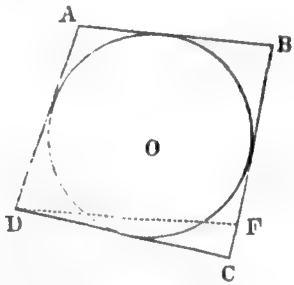
$$AM+BM+DQ+CQ=AN+BP+DP+CN,$$
$$\text{или } AB+DC=AC+BD.$$

Обратно: *кругъ можно вписать во всякій такой четыреугольникъ, въ которомъ суммы противоположныхъ сторонъ равны между собою.* Положимъ, что въ четыреуг. $ABCD$ (чер. 333) $AB+DC=AD+BC$. Опишемъ окружность, касательную къ тремъ

Чер. 332.



Чер. 333.



сторонамъ четыреугольника DA, AB и BC (для этого надо только раздѣлить пополамъ углы DAB и ABC); окружность эта непремѣнно коснется и стороны CD. Для доказательства, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Положимъ, что окружность не коснется прямой CD; тогда изъ D можно будетъ провести къ окружности касательную, напр. DF; поэтому четыреуг $ABFD$ будетъ описаннымъ около круга O, и по предыдущей теоремѣ будемъ имѣть $AB+DF=AD+BF$.

Сложивъ это равенство съ неравенствомъ $CD<DF+FC$, получимъ

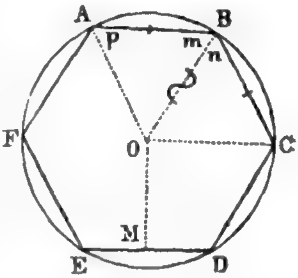
$$AB+DF+CD<AD+BF+DF+FC,$$

или $AB+CD<AD+BC$, что противорѣчитъ условію. Такимъ образомъ окружность O непремѣнно коснется стороны CD и слѣд. будетъ вписана въ 4-къ $ABCD$.

Изъ параллелограммовъ кругъ можно вписать въ ромбъ и въ квадратъ.

241. *Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать и въ него вписать окружность.* Пусть $ABCDEF$ (чер. 334) есть правильный многоугольникъ; раздѣливъ пополамъ два угла его, напр. A и B, линіями AO и BO, мы получимъ въ пересѣченіи этихъ линій точку O, которая будетъ находиться въ равномъ разстояніи отъ всѣхъ вершинъ многоугольника. Дѣйствительно, соединивъ O съ C, получимъ треуг. $AOB=BOC$, потому что у нихъ сторона BO общая, $AB=BC$ какъ стороны правильнаго многоуг.: уг. $m=n$ какъ половины уг. B; слѣдовательно и $AO=CO$. Но $AO=BO$, потому что треуг. ABO равнобедренный, такъ какъ уг. $m=p$ какъ половины равныхъ угловъ; слѣд. всѣ три линіи AO, BO, CO равны между собою. Подобнымъ образомъ докажемъ, что $AO=DO$....; слѣд. если изъ O радіусомъ OA описать окружность, то она пройдетъ черезъ всѣ вершины многоугольника.

Чер. 334.



Стороны AB, BC, CD...., будучи равными хордами описаннаго круга, должны равно отстоять отъ центра O; слѣд. перпендикуляры, опущенные на нихъ изъ центра, будутъ равны между собою. и если изъ O радіусомъ, равнымъ одному изъ этихъ перпендикуляровъ, напр. OM, описать окружность, то она коснется всѣхъ сторонъ многоуг. $ABCDEF$ въ ихъ срединахъ и слѣд. будетъ вписана въ этотъ многоуг.

Радіусъ вписаннаго круга наз. *апоѳемою* многоугольника.

Общій центръ описаннаго и вписаннаго круга наз. центромъ правильнаго многоугольника; онъ равно отстоитъ отъ всѣхъ вершинъ и отъ всѣхъ сторонъ многоуг., и въ немъ сходятся всѣ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ многоуг., и всѣ линіи, дѣлящія пополамъ углы многоугольника. Такимъ образомъ для отысканія центра прав. мног—ка надо или возставить перпендикуляры изъ срединъ двухъ непараллельныхъ сторонъ многоуг., или раздѣлить пополамъ два угла его.

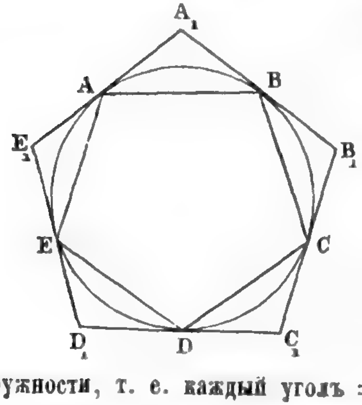
242. Угломъ при центрѣ правильнаго мног—ка наз. уголъ, образуемый радіусами описаннаго круга, проведенными въ двѣ смежныя вершины мног—ка, напр. уг. AOB (чер. 334); этотъ уг. $=\frac{4d}{n}$, гдѣ n число сторонъ мног—ка; такъ для шестиугольника онъ $=\frac{4d}{6}={}^2/_3\,d=60°$; для 10—ка$=36°$ и т. под. Такъ какъ выраженіе $\frac{4d}{n}$ будетъ болѣе d при $n=3$ и равно d при $n=4$, то слѣд. во *всѣхъ* *правильныхъ многоугольникахъ, кромѣ только треуг. и квадрата, центральные углы будутъ острые.*

Такъ какъ сумма внутреннихъ угловъ мног—ка равна $2d\ (n-2)$, гдѣ n — число сторонъ, то каждый внутренній уголъ правильнаго мног—ка равенъ $\frac{2d\ (n-2)}{n}$. Уголъ при центрѣ прав. мн—ка служитъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ внутреннему углу его; дѣйствительно, первый равенъ $\frac{4d}{n}$; а второй $=\frac{2d(n-2)}{n}$; сложивъ же эти выраженія, получимъ $\frac{4d}{n}+\frac{2d(n-2)}{n}=\frac{4d+2dn-4d}{n}=2d$.

Мы видѣли, что всѣ прав. мног., кромѣ треуг. и квадрата, имѣютъ центральные углы острые; поэтому внутренніе углы во всѣхъ прав. мног., кромѣ треуг. и квадрата, будутъ тупые, и величина внутренняго угла возрастаетъ съ увеличеніемъ числа сторонъ; такъ каждый уг. прав. 6—ка$=120^0$; уг. 10—ка$=144^0$; уг. 100—ка$=176^0$, 4 и т. под.

243. Чтобы вписать въ кругъ правильный n—угольникъ, надо раздѣлить окружность на n равныхъ частей. Дѣйствительно, положимъ, что окружность (чер. 335) въ точкахъ A, B, C... раздѣлена на n равныхъ частей; тогда, соединивъ послѣдовательныя точки дѣленія A, B, C... прямыми AB, BC, CD..., мы получимъ многоуг. съ равными сторонами, ибо эти стороны будутъ хорды, стягивающія равныя дуги. Углы этого многоугольника будутъ также равны между собою, ибо окружность раздѣлена на n равныхъ частей, и каждый уголъ измѣряется половиной дуги, содержащей $n-2$ такихъ частей (напр. для 5—ка половиной трехъ пятыхъ долей окружности, т. е. каждый уголъ $=108^0$.).

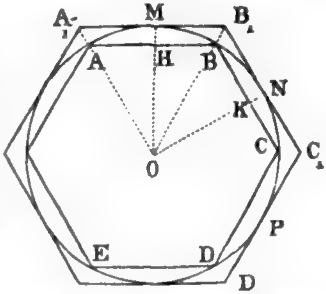
Чер. 335.



244. Если мы черезъ тѣже точки дѣленія A, B, C.... проведемъ касательныя, то отъ пересѣченія ихъ получится описанный многоуг. $A_1B_1C_1D_1E_1$. Этотъ многоуг. будетъ также правильнымъ. Дѣйствительно, треуг. $AA_1B=BB_1C=CC_1D=$...., ибо сторона $AB=BC=CD=$... и углы, лежащіе на этихъ сторонахъ, равны какъ измѣряющіеся половинами равныхъ дугъ AB, BC, CD....; слѣд. углы A_1,B_1,C_1.... описаннаго многоуг. будутъ равны между собою. Сверхъ того всѣ треуг. AA_1B, BB_1C, CC_1D.... равнобедренные; слѣд. $AA_1=A_1B$, $BB_1=B_1C$....; изъ равенства же треуг. слѣдуетъ, что $A_1B=BB_1$, $B_1C=CC_1$...., т. е. $A_1B={}^1/_2A_1B_1$, $B_1C={}^1/_2B_1C_1$....; но эти половины равны, слѣд. и $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=$.... Итакъ многоуг. $A_1B_1C_1D_1E_1$ имѣетъ равныя стороны и равные углы.

245. Если въ окружность вписанъ прав. n — угольникъ ABC... (чер. 336), то можно описать прав. многоуг. того же числа сторонъ, раздѣливъ дуги AB, BC.... пополамъ (для чего надо опустить на хорды AB, BC.... перпендикуляры изъ центра) въ точкахъ M, N, P.... и проведя черезъ эти точки касательныя. Дѣйствительно, такъ какъ точки M, N, P..., очевидно, дѣлятъ окружность на n равныхъ частей, то многоуг. $A_1B_1C_1D_1$..... будетъ правильный.

Чер. 336.



Замѣтимъ, что вершины соотвѣтственныхъ угловъ многоуг. вписаннаго и описаннаго, напр. B и B_1, находятся на одной прямой линіи съ центромъ O. Дѣйствительно, треуг. $BOH=BOK$, слѣд. линія OB дѣлитъ уг. B вписаннаго многоуг. пополамъ; а изъ равенства треуг. OMB_1 и ONB_1 слѣдуетъ, что линія OB_1 дѣлитъ уг. B_1 описаннаго многоуг. пополамъ; углы же B и B_1 равны между собою, такъ какъ оба многоуг. правильные; стало быть линіи OB и OB_1 совпадаетъ, т. е. OBB_1 есть прямая линія.

246. Изъ сказаннаго заключаемъ:

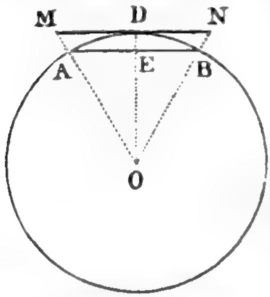
1. Если можно вписать въ кругъ правильный многоугольникъ, то можно и описать около круга правил. многоуг. того же числа сторонъ; для этого нужно (чер. 335) провести касательныя къ вершинамъ вписаннаго многоугольника или (чер. 336) къ концамъ радіусовъ, проведенныхъ перпендикулярно къ сторонамъ многоугольника.

2. Если около круга можно описать прав. многоуг., то можно и вписать прав. многоуг. того же числа сторонъ; для этого нужно (чер. 335) соединить прямыми линіями точки прикосновенія сторонъ описаннаго многоуг. къ окружности, или же нужно (чер. 336) соединить вершины описаннаго многоуг. съ центромъ и затѣмъ точки пересѣченія полученныхъ такимъ образомъ линій съ окружностью соединить между собою.

247. Зная величину стороны какого нибудь вписаннаго многоуг. и радіусъ круга, можно вычислить сторону описаннаго многоуг. того же числа сторонъ. Пусть AB (чер. 337) будетъ сторона вписаннаго прав. n — угольника; проведемъ радіусъ $OD \perp AB$, въ точкѣ D проведемъ касательную, проведемъ радіусы OB и OA и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ касательной; тогда, по предъидущему, MN будетъ сторона прав. описаннаго n — угольника.

Треугольники MNO и ABO имѣютъ уг. O общій, а прочіе углы равные, слѣд. треуг. $MNO \infty ABO$; а потому по § 188-му имѣемъ

Чер. 337.



$$\frac{MN}{AB} = \frac{OD}{OE}.$$

Означимъ сторону MN описаннаго n—угольника черезъ z, сторону AB впис. n—угольника черезъ a, радіусъ круга черезъ r; тогда $OE = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, и предъидущая пропорція приметъ видъ

$$\frac{z}{a} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \text{ откуда}$$

$$z = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{ar}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}} \ldots\ldots(1)$$

Наоборотъ — по данной сторонѣ прав. описаннаго n — угольника и радіусу круга можно опредѣлить сторону прав. вписаннаго n—угольника. Для этого возведемъ въ квадратъ уравненіе (1); получимъ

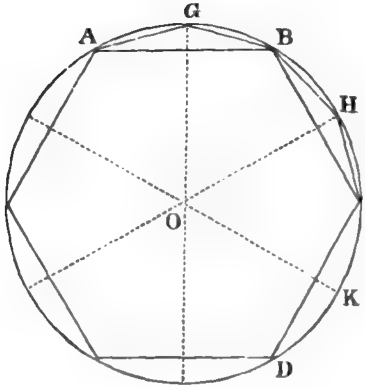
$$z^2 = \frac{4a^2r^2}{4r^2 - a^2}, \text{ или } 4z^2r^2 - z^2a^2 = 4a^2r^2;$$

$$4z^2r^2 = a^2(z^2 + 4r^2); \; a = \frac{2zr}{\sqrt{4r^2 + z^2}}.$$

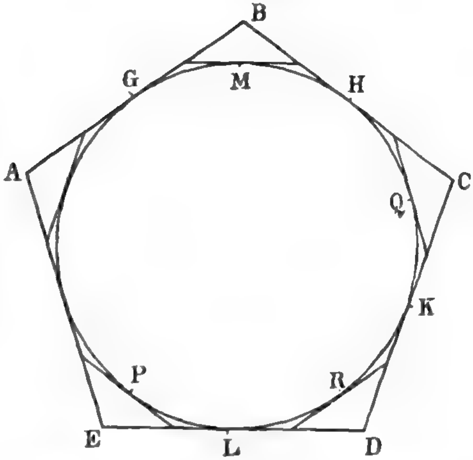
248. Если въ кругъ вписанъ прав. n—угольникъ $ABCD$..... (чер. 338), то легко вписать и прав. $2n$—угольникъ, или *удвоить число сторонъ правил. впис. многоуг.* Для этого изъ центра O проводимъ радіусы, перпендикулярные къ сторонамъ многоуг.; тогда въ точкахъ A, G, B, H, C, K, D.... окружность раздѣлится на $2n$ равныхъ частей; стало быть, соединивъ эти точки прямыми AG, GB, BH, HC...., получимъ прав. впис. $2n$—угольникъ (§ 243).

Чтобы удвоить число сторонъ описаннаго правил. многоуг. $ABCDE$ (чер. 339), *раздѣлимъ* пополамъ дуги GH, HK, KL...., заключенныя между точками прикосновенія сторонъ даннаго многоуг. къ окружности, и черезъ точки дѣленія M, Q, R, P.... проведемъ касательныя. Такъ какъ окружность въ точкахъ M, H, Q, K, R, L, P.... дѣлится, очевидно, на $2n$ равныхъ частей, то образовавшійся отъ пересѣченія касательныхъ $2n$—угольникъ будетъ правильный.

Чер. 338.

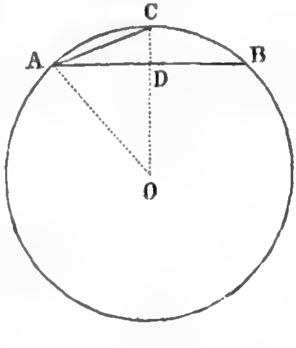


Чер. 339.



249. Зная величину стороны прав. впис. многоуг. и радіуса круга, можно вычислить величину стороны прав. впис. многоуг. съ двойнымъ числомъ сторонъ. Пусть AB (чер. 340) будетъ сторона прав. n—угольника; проведемъ радіусъ $OC \perp AB$; тогда AC будетъ сторона прав. впис. $2n$—угольника. Соединивъ точку A съ O, получимъ треуг. AOC, въ которомъ уг. при O будетъ острый, каково бы ни было число сторонъ многоуг. n. Дѣйствительно, n не можетъ быть меньше 3; а при $n=3$ уголъ $AOD=60°$; если же $n>3$, то уг. $AOD<60°$. Поэтому, взявъ выраженіе для квадрата стороны AC, лежащей противъ остраго угла O (§ 206), получимъ

Чер. 340.



$$AC^2=AO^2+CO^2-2CO.DO; \text{ а } DO=\sqrt{AO^2-AD^2}.$$

Полагая $AC=x$, $AO=CO=r$, $AB=a$, получимъ

$$DO=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}={}^1/_2\sqrt{4r^2-a^2}, \text{ и слѣд.}$$

$$x^2=r^2+r^2-2r.{}^1/_2\sqrt{4r^2-a^2}; \text{ а потому}$$

$$x=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

Если наоборотъ, зная сторону прав. впис. $2n$—угольника, хотимъ вычислить сторону правильнаго вписаннаго n—угольника, то, возведя предъидущее выраженіе въ квадратъ, получимъ

$$x^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}, \text{ откуда } x^2-2r^2=-r\sqrt{4r^2-a^2}.$$

Возвышая опять въ квадратъ обѣ части равенства, найдемъ

$$x^4-4x^2r^2+4r^4=r^2(4r^2-a^2),\text{ или}$$

$$x^4-4x^2r^2+4r^4=4r^4-r^2a^2,\text{ откуда}$$

$$a^2=\frac{4x^2r^2-x^4}{r^2}=\frac{x^2(4r^2-x^2)}{r^2};\text{ слѣд.}$$

$$a=\frac{x}{r}\sqrt{4r^2-x^2}.$$

250. Чтобы вписать въ кругъ правильн. n—угольникъ, надо, какъ мы видѣли (§ 243), раздѣлить окружность на n равныхъ частей; а для этого нужно при центрѣ построить уголъ $=\frac{4d}{n}$; хорда, соотвѣтствующая этому углу, отложится по окружности n разъ и будетъ слѣд. стороной прав. n—угольника. Такой уголъ можно начертить посредствомъ транспортира, хотя и не точно; такъ напр. для правильн. 7—ка этотъ уголъ будетъ $=\frac{360^\circ}{7}=51^\circ25'42''{}^6/_7$; но на транспортирахъ не означены не только секунды, а даже и минуты; слѣд., строя уголъ по транспортиру, мы начертимъ его или больше или меньше, чѣмъ онъ долженъ быть. Геометрически, т е. помощью циркуля и линейки, можно, какъ мы знаемъ, построить углы въ 90°, а слѣд. и въ 45°, $22^\circ30'$, $11^\circ15'$....; въ 60° (ибо это уголъ равносторонняго треугольника), а слѣд. въ $120^\circ, 30^\circ, 15^\circ, 7^\circ30'$....; можно также построить, какъ мы вскорѣ покажемъ, уголъ въ 36°, а слѣд. въ 72°, 18°, 9°...., и уголъ въ 24°, а потому въ $12^\circ, 6^\circ$.... Такимъ образомъ посредствомъ циркуля и линейки можно вписать въ кругъ (а потому и описать около круга) слѣдующіе правильные многоугольники:

1) четыреугольникъ или квадратъ, а слѣд. и 8—къ, 16—къ, 32—къ..., вообще многоугольникъ, имѣющій 2^n сторонъ;

2) шестиугольникъ, а также 3—къ, 12—къ, 24—къ...., вообще многоуг. съ 3.2^n сторонами;

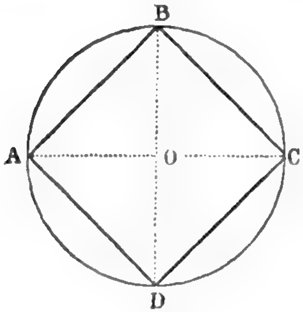
3) десятиугольникъ, а слѣд. 5—къ, 20—къ...., вообще многоугольникъ, имѣющій 5.2^n сторонъ;

4) пятнадцатиугольникъ, а потому 30—къ, 60—къ...., вообще многоуг. съ 15.2^n сторонами.

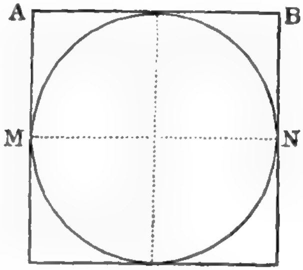
251. Чтобъ вписать въ кругъ квадратъ, надо провести два перпендикулярныхъ діаметра (чер. 341) AC и BD; тогда окружность и раздѣлится на 4 равныя части.

Означая длину стороны квадрата черезъ x, а длину радіуса круга, выраженную въ той же единицѣ, черезъ r, изъ прямоуг. треуг. AOB получимъ $x^2=2r^2$, откуда $x=r\sqrt{2}$.

Длину стороны описаннаго квадрата найдемъ изъ формулы § 247:
$$z=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$; такъ какъ здѣсь $a=r\sqrt{2}$, то
$$z=\frac{2r^2\sqrt{2}}{\sqrt{4r^2-2r^2}}=\frac{2r^2\sqrt{2}}{r\sqrt{2}}=2r;$$
т. е. сторона описаннаго квадрата = діаметру. Это видно и изъ чер. 342, гдѣ линія $AB=MN$.



Чер. 341.



Чер. 342.

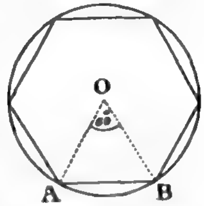
Сторону правильн. впис. 8—ка вычислимъ по формулѣ § 249-го: $x=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}$, гдѣ a есть сторона квадрата. Подставивъ $r\sqrt{2}$ вмѣсто a и означивъ сторону 8—ка черезъ x_8, получимъ
$$x_8=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-2r^2}}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{2r^2}}=$$
$$=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{2}}=r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$
Затѣмъ, подставивъ въ туже формулу § 249-го вмѣсто a величину x_8, найдемъ сторону прав. 16—ка
$$x_{16}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-2r^2+r^2\sqrt{2}}}=$$
$$=\sqrt{2r^2-r\sqrt{2r^2+r^2\sqrt{2}}}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$
Далѣе можно опредѣлить x_{32}, x_{64}....

Формулы упростятся, если положимъ $r=1$; тогда
$$x_8=\sqrt{2-\sqrt{2}};\ x_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$
$$x_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ldots,$$ вообще
сторона вписан. многоуг., имѣющаго 2^n сторонъ, будетъ равна
$$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots+\sqrt{2}}}},$$ гдѣ 2 повторяется $n-1$ разъ.

Подставляя величины x_8, x_{16}, x_{32}... вмѣсто a въ выраженіе
$$z=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$ и полагая $r=1$, опредѣлимъ въ частяхъ радіуса величины сторонъ описанныхъ 8—ка, 16—ка, 32—ка....

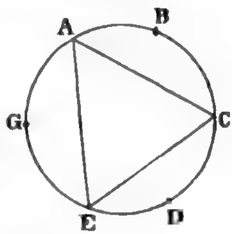
252. Чтобы вписать въ кругъ правильный шестиугольникъ, отложимъ отъ какой нибудь точки окружности (чер. 343) хорду AB, равную радiусу; эта хорда и можетъ отложиться по окружности ровно 6 разъ. Дѣйствительно, проведя радiусы AO и BO, получимъ равносторонній треуг. AOB; слѣд. уг. $AOB = 60°$ и дуга AB будетъ шестая часть окружности. Такимъ образомъ сторона правил. впис. 6—ка равна радiусу.

Чер. 343.



253. Умѣя вписывать прав. 6—къ, легко уже вписать и прав. 3—къ. Для этого надо, какъ указано въ предъидущемъ §, раздѣлить окружность на 6 равныхъ частей (чер. 344) въ точкахъ A, B, C....; потомъ соединить эти точки черезъ одну, напр. соединить A съ C и E; точки A, C и E дѣлятъ окружность на 3 равныхъ части; поэтому треуг. ACE будетъ правильный.

Чер. 344.



254. Полагая въ формулѣ § 249-го $a = r$ и принимая $r = 1$, найдемъ сторону прав. впис. 12—ка; затѣмъ можемъ опредѣлить сторону впис. 24—ка, 48—ка...

Получимъ $x_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

$$x_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$x_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$...., вообще сторона прав. впис. $3 \cdot 2^n$—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 ..... + \sqrt{3}}}}$, гдѣ 2 повторяется $n - 1$ разъ.

255. Чтобы опредѣлить сторону прав. впис. 3—ка, нужно въ формулѣ $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ положить $x = r$ и опредѣлить a. Возведя въ квадратъ обѣ части формулы, получимъ:

$$r^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ или } r\sqrt{4r^2 - a^2} = r^2;$$

$$\sqrt{4r^2 - a^2} = r; \quad 4r^2 - a^2 = r^2;$$

$$3r^2 = a^2; \quad a = r\sqrt{3}.$$

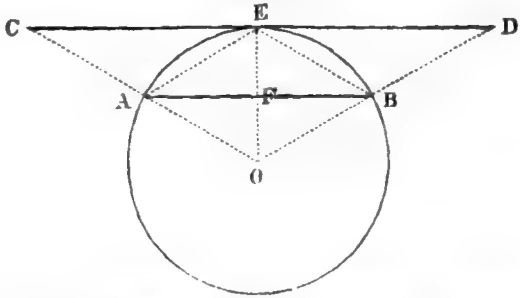
256. Вставивъ $r\sqrt{3}$ вмѣсто a въ формулу § 247-го $z = \dfrac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$, опредѣлимъ сторону прав. опис. треугольника:

$$z_3 = \frac{2r\sqrt{3} \cdot r}{\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}.$$

Такимъ образомъ сторона описаннаго прав. треуг. вдвое больше стороны вписаннаго треуг.

257. Выраженія для сторонъ впис. и опис. треуг. можно вывести и непосредственно, не прибѣгая къ формуламъ §§ 249 и 247. Пусть AB (чер. 345) будетъ сторона прав. впис. треуг.; если проведемъ

Чер. 345.



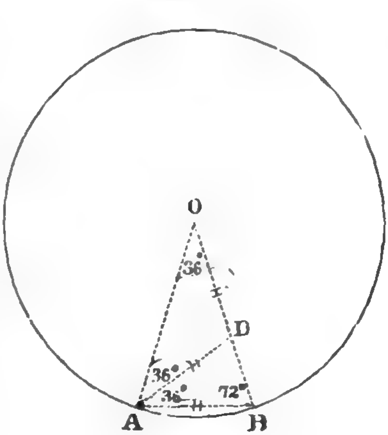
радіусъ $OE \perp AB$ и прямыя AE, BE, OB, AO, то фигура $AOBE$ будетъ ромбъ, ибо AE и BE, какъ стороны прав. впис. 6—ка, равны радіусу; слѣд. $FO = FE = {}^1/_2 r$. Изъ треуг. AOF имѣемъ $AF^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$, или $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} r^2$; $\frac{AB^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$; $AB^2 = 3r^2$; $AB = r\sqrt{3}$.

Продоливъ радіусы OA и OB до встрѣчи съ касательной, проведенной въ точкѣ E, получимъ сторону опис. треуг. CD, и изъ подобія треуг. OCD и OAB имѣемъ $\frac{CD}{AB} = \frac{OE}{OF}$; но $OE = 2OF$, слѣд. $CD = 2AB = 2r\sqrt{3}$.

258. Полагая въ формулѣ § 247-го $a = r$ и принимая r за единицу, найдемъ сторону прав. опис. 6—ка; $z_6 = \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = {}^2/_3\sqrt{3}$.

Подставивъ вмѣсто a въ туже формулу величину стороны прав. впис. 12 — ка, опредѣлимъ сторону прав. опис. 12 — ка, потомъ 24—ка и т. д.

Чер. 346.



259. Покажемъ, какъ вписать въ кругъ прав. 10—угольникъ. Пусть AB (чер. 346) будетъ сторона прав. 10—ка; тогда уг. $AOB = 36°$, слѣд. сумма остальныхъ угл. треуг. AOB равна 144°; а какъ треуг. равнобедр., то каждый изъ этихъ угл. $= 72°$. Раздѣлимъ уг. A пополамъ прямою AD; тогда по § 176 получимъ $\frac{AO}{AB} = \frac{OD}{DB}$.... (1)

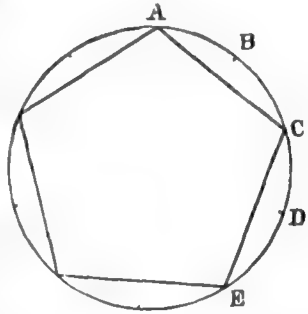
Но уг. $ADB = 180° - (36° + 72°) = 72°$; слѣд. $AD = AB$; уг. $DAO = 36° =$

уг. DOA, слѣд. $AD = DO$; итакъ $OD = AB$. Означимъ сторону 10—ка черезъ x, радіусъ черезъ r; тогда $DB = OB - OD = r - x$, и пропорція (1) приметъ видъ $\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x}$. Отсюда заключаемъ (§ 225), что сторона прав. впис. 10—ка есть бо́льшая часть радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такимъ образомъ, чтобъ вписать въ кругъ прав. 10—къ, надо раздѣлить радіусъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и бо́льшую часть его откладывать послѣдовательно по окружности, начиная отъ какой нибудь точки; часть эта отложится ровно 10 разъ.

Изъ пропорціи $\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x}$, полагая $r=1$, опредѣлимъ численную величину стороны прав. впис. 10—ка въ частяхъ радіуса. Всявъ произведеніе среднихъ и крайнихъ, получимъ $x^2 = 1 - x$, или $x^2 + x - 1 = 0$, откуда $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

260. Чтобъ вписать прав. 5—къ, надо раздѣлить окружность на 10 равныхъ частей въ точкахъ $A, B, C, D\ldots$ (чер. 347) по способу, показанному въ предъидущемъ §; потомъ соединить точки дѣленія черезъ одну, т. е. A съ C, C съ $E\ldots$

Чер. 347.



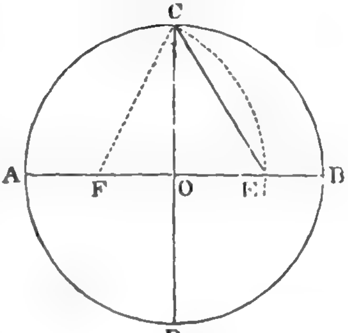
Величину стороны впис. 5—ка въ частяхъ радіуса опредѣлимъ изъ формулы § 249-го, полагая $r=1$, а $x=$ сторонѣ прав. впис. 10—ка $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; получимъ $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$; возвысивъ въ квадратъ, найдемъ $\frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4} =$ $= 2 - \sqrt{4 - a^2}$; или $6 - 2\sqrt{5} = 8 - 4\sqrt{4 - a^2}$; $4\sqrt{4 - a^2} = 2 + 2\sqrt{5}$; $2\sqrt{4 - a^2} = 1 + \sqrt{5}$. Вторичное возвышеніе въ квадратъ даетъ

$$4(4 - a^2) = 1 + 5 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}, \text{ или } 2(4 - a^2) = 3 + \sqrt{5};$$

$$8 - 2a^2 = 3 + \sqrt{5};\ 5 - \sqrt{5} = 2a^2;\ a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

261. Слѣдующее построеніе даетъ возможность получить заразъ стороны прав. впис. 10—ка и 5—ка. Проведемъ два перпендикулярныхъ діаметра AB и CD (чер. 348); средину F радіуса AO соединимъ съ C и опишемъ изъ F радіусомъ FC дугу, которая пересѣчетъ діаметръ AB въ точкѣ E; OE будетъ сторона 10—ка, а CE — сторона 5 — ка. Дѣйствительно, $CF = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{FO}^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$; или, полагая $r=1$, получимъ $CF = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

Чер. 348.



$OE = FE - FO = CF - FO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; слѣд. OE есть сторона прав. 10 — ка; а $CE =$

$$= \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OF}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4}} =$$

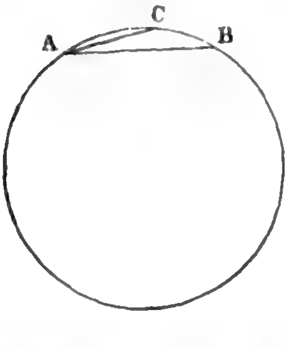
$$= \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} =$$

сторонѣ прав. 5—ка.

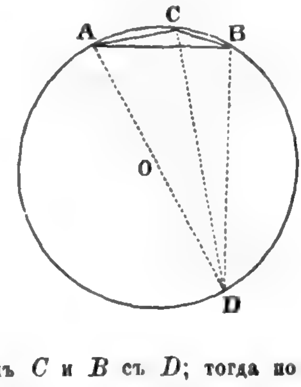
262. Чтобъ вписать въ кругъ прав. 15 — къ, отложимъ отъ какой нибудь точки A окружности (чер. 349) хорду AB=радiусу и хорду AC= бóльшей части радiуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношенiи; тогда дуга $AB=60^\circ$, а дуга $AC=36^\circ$; слѣд. дуга $BC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ = {}^1/_{15}$ окружности, и потому хорда BC отложится по окружности 15 разъ.

263. Для вычисленiя стороны BC прав. 15-угольника (чер. 350),

Чер. 349.



Чер. 350.



проведемъ дiаметръ AOD и соединимъ C и B съ D; тогда по птоломеевой теоремѣ будемъ имѣть

$$AB.CD = CB.AD + AC.BD \ldots. \quad (1)$$

Означимъ сторону прав. 15—ка черезъ x, а радiусъ положимъ равнымъ 1; тогда

$$AB=1;\ CB=x;\ AD=2;\ AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$BD=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3};$$

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 4 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} =$$

$$= 4 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}; \text{ поэтому } CD = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Подставивъ эти величины въ урав. (1), получимъ

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 2x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\sqrt{3}. \text{ Отсюда}$$

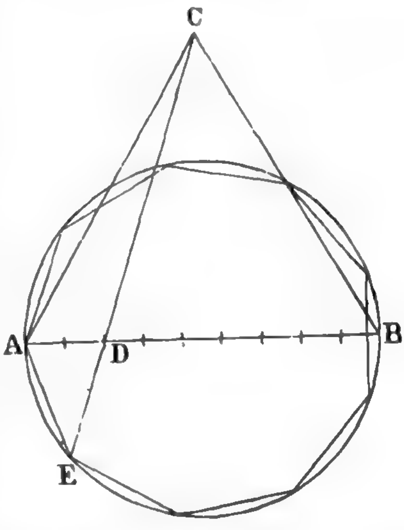
$$2x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= {}^1/_2(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}); \text{ а потому}$$

$x = {}^1/_4(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})$, при чемъ за единицу принимается радіусъ. Если же радіусъ будетъ равенъ напр. 23,6 дюйм., то для полученія величины x въ дюймахъ, надо предъидущее выраженіе умножить на 23,6.

264. Слѣдующимъ способомъ можно, хотя и не совсѣмъ точно, вписывать въ кругъ посредствомъ циркуля и линейки всякій прав. мног — къ. Положимъ напр., что хотимъ вписать прав. 9—къ. Проведя діаметръ AB (чер. 351), строимъ на немъ равносторонній треуг. ABC; затѣмъ дѣлимъ AB на 9 равныхъ частей и вершину C треуг. соединяемъ со второй точкой дѣленія D; прямую CD продолжаемъ до пересѣченія съ окружностью въ E; хорда AE будетъ приблизительно равна сторонѣ прав. 9 -- ка.

Чер. 351.



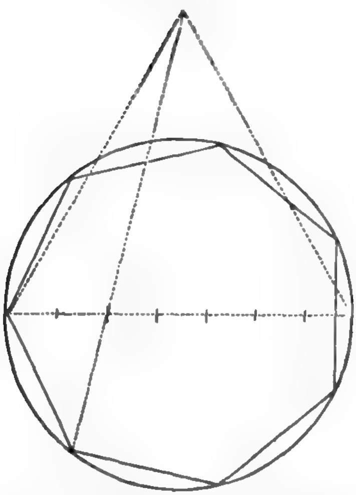
На чер. 352 и 353 представлены прав. 7—къ и 5—къ, вписанные по сейчасъ изложенному способу.

Для нѣкоторыхъ многоуг. этотъ способъ вполнѣ точенъ.

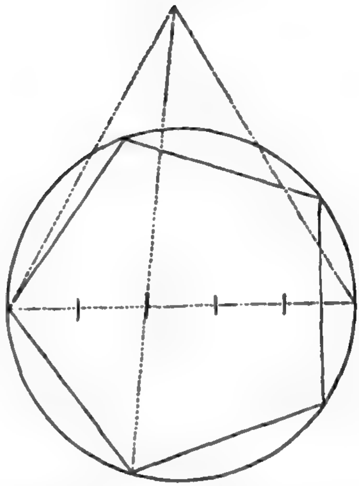
Гаусъ показалъ возможность точно вписывать въ кругъ посредствомъ циркуля и линейки всякій правильн. многоуг., число сторонъ котораго $= 2^n + 1$, если это число есть первоначальное (напр. 17—угольникъ, 257—къ и т. под.).

265. Если требуется построить правильн. n—угольникъ, такъ чтобы его сторона равнялась данной линіи a, то нужно взять произвольную окружность, вписать въ нее правильный n—угольникъ, потомъ на линіи a построить многоуг., подобный вписанному. От-

Чер. 352.



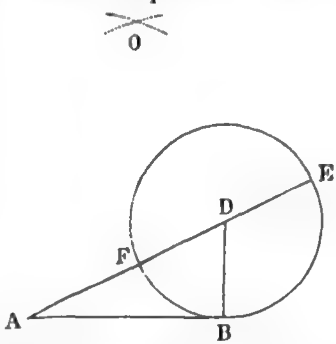
Чер. 353.



сюда слѣдуетъ, что мы можемъ строить тѣже прав. многоугольники, какіе можемъ вписывать въ кругъ.

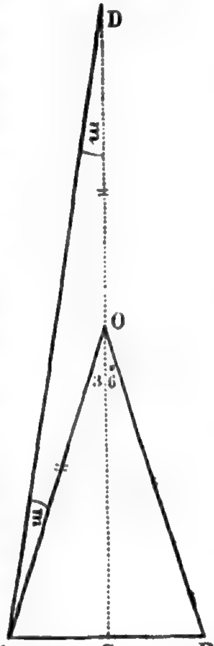
266. Можно впрочемъ строить такіе многоуг. и другимъ способомъ. Положимъ напр., что нужно на линіи $AB = a$ (чер. 354) построить прав. 10—къ. Для этого надо начертить такую окружность, чтобы (§ 259) AB составляла большую часть ея радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Сдѣлавъ такое же построеніе, какъ при дѣленіи линіи AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, получимъ искомый радіусъ AE. Дѣйствительно, $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$, или $\frac{AF + FE}{AB} = \frac{AB}{AF}$; но $FE = AB$; слѣд. $\frac{AF + AB}{AB} = \frac{AB}{AF}$; т. е. линія $AF + AB = AE$ раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. и большая часть ея есть линія AB. Описавъ изъ точекъ A и B дуги радіусами, равными AE, получимъ точку O; если изъ O радіусомъ OA описать окружность, то хорда AB отложится по ней 10 разъ.

Чер. 354.



267. Пусть еще требуется на линіи AB (чер. 355) построить прав. 20—къ. Для этого, сдѣлавъ предъидущее построеніе, найдемъ сперва центръ O такой окружности, для которой AB была бы стороной прав. вписан. 10—ка; затѣмъ, чтобы начертить такую

Чер. 355.

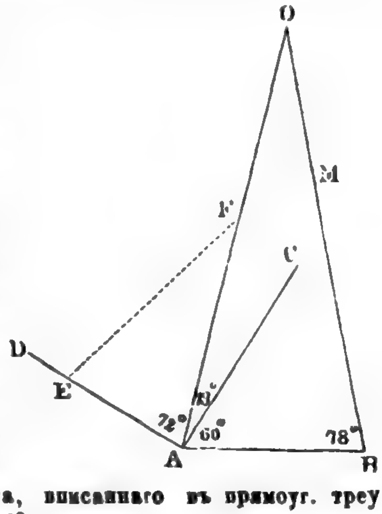


окружность, по которой AB укладывалась бы 20 разъ, надо построить на AB равнобедрен. треуг., въ которомъ уголъ при вершинѣ былъ бы равенъ 18°, т. е. былъ бы вдвое меньше уг. AOB. Для этого соединимъ средину AB съ точкой O, отложимъ $OD=OA$ и проведемъ AD; тогда треуг. AOD будетъ равнобедр., слѣд. уг. $m=m$; но уг. $AOC=m+m=2m$, слѣд. $m={}^1/_2\ AOC$; а потому, если соединимъ D съ B, то получимъ уг. $ADB=$ $={}^1/_2 AOB=18°$. Если изъ D радіусомъ DA описать окружность, то AB отложится по этой окружности ровно 20 разъ.

Точно такимъ же способомъ, построивъ вообще какой нибудь прав. n—угольникъ, можно построить $2n$—къ, $4n$—къ....

268. Пусть еще требуется на прямой AB (чер. 356) построить прав. 15—къ Для этого надо построить на AB такой равнобедренный треуг., чтобы уголъ при вершинѣ его равнялся 24°, а слѣд. углы при основаніи равнялись бы 78°. Такъ какъ уг. $78°=60°+18°$, то для построенія его чертимъ при точкѣ A прямой AB (чер. 356) уголъ $BAC=60°$ (для чего надо построить на AB равносторонній треуг.); затѣмъ при точкѣ A на прямой AC надо построить уг. 18°. Для этого проводимъ $AD \perp AC$; беремъ на AD произвольную часть AE и находимъ центръ F такой окружности, по которой AE укладывается 10 разъ (§ 266); тогда уг. $AFE=36°$, слѣд. уг. $FAE=72°$, а потому уг. $CAF=18°$, уголъ же $BAF=78°$. Построивъ такъ же уг. $ABM=78°$, продолжимъ прямыя AF и BM до пересѣченія въ O; O будетъ центромъ, а $OA=OB$—радіусомъ окружности, по которой прямая AB отложится 15 разъ.

Чер. 356.



269. Задачи на вычисленіе. 1. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ прямоуг. треуг., котораго гипот.$=13$, а катетъ$=5$?

2. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ треуг., котораго стороны 26, 26 и 20?

3. Опредѣлить рад. круга, описаннаго около треуг., котораго стороны 26, 26 и 20?

4. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около прямоугольника, котораго стороны 7 и 2,4?

5. Діагонали ромба 5,2 и 7,8; опредѣлить радіусъ впис. круга?

6. Опредѣлить центральный уг., соотвѣтствующій сторонѣ прав. впис. 24—угольника? 16—ка? 20—ка?

7. Сколько сторонъ имѣетъ прав. многоуг., если центральный уголъ, соотвѣтствующій сторонѣ его, равенъ 30°? 72°? $11^\circ 15'$?

8. Сторона правил. треуг. $= a = 8{,}66$; опредѣлить радіусъ описаннаго круга?

9. Сторона квадрата $= a = 21{,}21$; опредѣлить рад. опис. круга?

10. Сторона прав. 10—ка $= a = 7{,}6$; опредѣлить рад. опис. круга?

11. Опредѣлить стороны прав. 6—ка и 10—ка, описанныхъ около круга рад. r?

12. Опредѣлить радіусъ r круга, вписаннаго въ прав. треуг.? въ квадратъ? въ прав. 6—къ? въ прав. 10—къ? Стороны каждаго изъ этихъ мног. равны b?

13. По радіусу R описаннаго круга и по рад. r вписаннаго круга опредѣлить сторону x прав. впис. многоуг.?

14. Опредѣлить радіусъ круга, если сторона впис. въ него прав. n—угольника $= a$, а сторона описаннаго n—угольника $= b$?

15. Опредѣлить радіусъ круга, если сторона вписаннаго въ него прав. n—угольника $= a$, а сторона прав впис. $2n$—угольника $= b$?

16. Радіусъ круга, вписаннаго въ прав. многоуг., котораго стороны a, равенъ r; опредѣлить радіусъ опис. круга?

17. Радіусъ круга, описаннаго около прав. многоуг., котораго сторона a, равенъ R; опредѣлить рад. впис. круга?

18. Зная рад. R круга, описаннаго около 1) прав. треуг., 2) квадрата, 3) прав. 6—ка, 4) прав. 5—ка, опредѣлить рад. круга, вписаннаго въ эти фигуры?

19. Въ кругъ рад. 8,4 ф. вписанъ квадратъ, на сторонѣ котораго построенъ прав. 3—къ; опредѣлить рад. круга, описаннаго около этого треуг.?

20. Сторона прав. 3—ка, вписаннаго въ кругъ, отстоитъ на $7^1/_2$ ф. отъ центра этого круга; опредѣлить радіусъ круга и сторону треуг.?

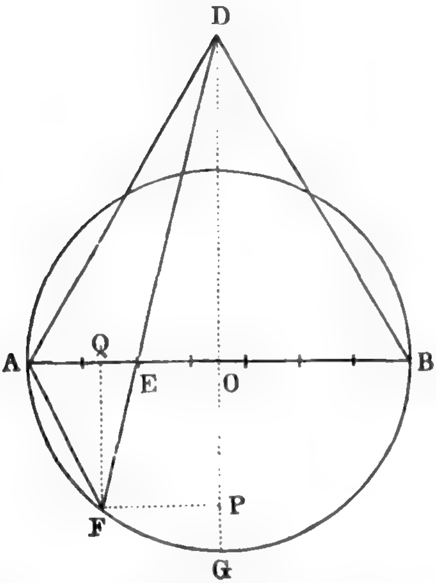
21. Сумма большей и меньшей діагоналей прав. 6—ка $= s = 3{,}5$; опредѣлить рад. описаннаго круга?

22. Рад. круга, описаннаго около прав. 6—ка, равенъ 5,4; опредѣлить діагонали его?

23. Разность между стороной описаннаго около круга прав 3—ка и стороной вписаннаго квадрата $= d = 1{,}5$; опредѣлить радіусъ круга?

24. На діаметрѣ AB (чер. 357) окружности О построенъ прав. треуг. ADB; AB раздѣленъ на n равныхъ частей и черезъ конечную точку E втораго дѣленія, считая отъ A, проведена сѣкущая DEF. Опредѣлить хорду AF, полагая радіусъ $= 1$, а разстояніе $EO = 1 - \frac{2}{n} \cdot 2 = 1 - \frac{4}{n} = d$?

Чер. 357.



25. На діаметрѣ AB окружности O построенъ прав. треуг. ADB; радіусъ OA раздѣленъ на n равныхъ частей и черезъ конечную точку E четвертаго дѣленія, считая отъ центра, проведена сѣкущая DEF. Опредѣлить хорду FG, соединяющую конечныя точки F и G сѣкущей DF и діаметра, проходящаго черезъ D?

270. Задачи на доказательство теоремъ. Доказать теоремы.

1. Въ четыреуг., вписанномъ въ кругъ, два угла, образуемые діагоналями съ двумя противоположными сторонами, равны между собою.

2. Составить и доказать теорему, обратную предъидущей?

3. Если въ кругъ вписанъ треуг., то перпендикуляръ, возставленный изъ средины одной изъ сторонъ этого треуг., встрѣчается съ линіями, дѣлящими пополамъ противоположные внѣшній и внутренній углы треугольника, на окружности.

4. Если въ кругъ вписанъ остроуг. треуг., и если высоты его продолжены до пересѣченія съ окружностью, то эти продолженія будутъ равны отрѣзкамъ высотъ, заключеннымъ между точками пересѣченія высотъ и сторонами, на которыя онѣ опущены.

5. Если въ конечной точкѣ стороны треуг. возставить къ этой сторонѣ перпендикуляръ и продолжить его до пересѣченія съ окружностью описаннаго круга, то этотъ перпендикуляръ будетъ равенъ отрѣзку высоты, опущенной на туже сторону треуг., между точкой пересѣченія высотъ и вершиной противолежащаго угла.

6. Отрѣзокъ высоты треуг. между вершиной, изъ которой она проведена, и точкой пересѣченія высотъ вдвое больше перпендикуляра, опущеннаго изъ центра описаннаго круга на сторону, соотвѣтствующую высотѣ.

7. Линія соединяющая средину отрѣзка высоты треуг. (см. зад. 6) съ срединой соотвѣтствующей стороны треуг., равна радіусу круга, описаннаго около треуг.

8. Въ каждомъ треуг. средины сторонъ, основанія высотъ и средины отрѣзковъ высотъ, прилежащихъ къ соотвѣтствующимъ вершинамъ треуг., лежатъ на окружности, центръ которой дѣлитъ пополамъ линію, соединяющую центръ описаннаго круга съ точкой пересѣченія высотъ, а радіусъ $= {}^1/_2$ рад. круга, опис. около треуг.

9. Если соединить основанія всѣхъ высотъ треуг. и описать кру-

ги около каждаго изъ чутырехъ треуг., на которые раздѣлился данный треуг., то центры трехъ внѣшнихъ круговъ будутъ лежать на окружности внутренняго.

10. Въ каждомъ треуг. квадратъ діаметра опис. круга = квадрату стороны + квадратъ отрѣзка соотвѣтствующей высоты, прилежащаго къ вершинѣ.

11. Во всякомъ треуг. разстояніе между центрами круговъ, описаннаго и вписаннаго, есть средняя пропорціональная между радіусомъ описаннаго круга и разностью между этимъ радіусомъ и діаметромъ вписаннаго круга?

12. Составить и доказать теорему, обратную предъид.?

13. Во всякомъ треуг. разстояніе между центрами круговъ, описаннаго и внѣшняго вписаннаго *, есть средняя пропорц. между радіусомъ опис. круга и суммою этого радіуса съ удвоеннымъ радіусомъ внѣшняго вписаннаго круга.

14. Каждый изъ трехъ отрѣзковъ стороны треут. и ея продолженія, заключающихся между вершинами треуг. и точками касанія внутренняго и внѣшняго вписанныхъ круговъ, равенъ полупериметру безъ одной изъ сторонъ треуг.; а сумма всѣхъ этихъ отрѣзковъ = полупериметру треуг.

15. Во всякомъ треуг. 1) центръ внутренняго вписаннаго круга, конечныя точки одной изъ сторонъ и центръ внѣшняго вписан. круга, касательнаго къ этой сторонѣ, находятся на окружности, которой центръ лежитъ на окружности описаннаго круга; 2) конечныя точки одной изъ сторонъ треуг. и центры внѣшнихъ вписанныхъ круговъ, касательныхъ къ продолженіямъ этой стороны, также находятся на одной окружности, имѣющей центръ на окружности описаннаго круга.

16. Во всякомъ треуг. сумма радіусовъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ = радіусу внутренняго впис. круга + учетверенный рад. опис. круга.

17. Если радіусъ круга, описаннаго около треуг., означимъ черезъ R, то $12R^2$ будетъ равно суммѣ квадратовъ разстояній центровъ четырехъ вписанныхъ круговъ отъ центра круга описаннаго.

18. Во всякомъ треуг. сумма радіусовъ внутренняго вписаннаго и описаннаго круговъ = суммѣ разстояній сторонъ треуг. отъ центра описаннаго круга.

19. Во всякомъ треуг. сумма квадратовъ разстояній вершинъ отъ центра внуртр. впис. круга = суммѣ квадратовъ сторонъ + утроенный квадратъ радіуса впис. круга безъ квадрата полупериметра.

20. Линіи, дѣлящія пополамъ внутр. углы всякаго 4—ка, образуютъ 4—къ, около котораго можно описать кругъ. Какой 4—къ получится, если данный 4—къ будетъ параллелограммъ?

21. Линіи, дѣлящія пополамъ углы, каждый изъ которыхъ образованъ двумя противоположными сторонами вписаннаго въ кругъ 4—ка, пересѣкаютъ другъ друга подъ прямымъ угломъ.

22. Если около круга описать равнобедренную трапецію, то діа-

---

* Внѣшнимъ вписаннымъ кругомъ наз. кругъ, касательный къ одной сторонѣ треуг. и къ продолженіямъ двухъ другихъ сторонъ.

метръ круга будетъ средняя пропорц. между параллельными сторонами ея.

23. Каждыя двѣ діагонали правильнаго 5—ка (проведенныя изъ разныхъ вершинъ), пересѣкаясь между собою, дѣлятъ другъ друга въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

24. Если на діаметрѣ круга построить равнобедр. треуг., сторона котораго = сторонѣ впис. въ этотъ кругъ прав. треуг., то высота этого треуг. будетъ = сторонѣ впис. квадрата.

25. Если вписать въ кругъ прав. треуг. и на сторонѣ его построить равнобедр. треуг., сторона котораго = сторонѣ впис. квадрата, то радіусъ, проходящій черезъ вершину этого треуг., раздѣлится этой вершиной въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

271. Задачи на построеніе. 1. *Въ* треуг. вписать три внѣшнихъ касательныхъ круга? (См. примѣчаніе къ зад. 13-й § 270).

2. Построить треуг. по данному уг. m, соотвѣтствующей ему высотѣ h и радіусу r вписаннаго круга?

3. На прямой AB построить треуг., зная радіусъ r впис. круга и точку D прикосновенія его къ сторонѣ AB?

4. Построить треуг., зная внутр. впис. кругъ и одинъ изъ внѣшнихъ впис. круговъ?

5. Построить треуг., зная два внѣшнихъ впис. круга?

6. Построить треуг., зная центры J, J_1, J_2 внѣшнихъ вписан. круговъ?

7. Построить треу. такъ, чтобы основаніе его $= b$, противолежащій уг. $= m$, а радіусъ вписан. круга $= r$?

8. Построить треуг, такъ, чтобы основаніе его $= b$, сумма остальныхъ сторонъ $= s$, а рад. впис. круга $= r$?

9. Построить треуг. такъ, чтобы основаніе его $= b$, разность прочихъ сторонъ $= d$, а рад. впис. круга $= r$?

10. Построить треуг. по периметру $2p$, одному изъ у ловъ m и рад. впис. круга r?

11. Построить треуг. такъ, чтобы линія, дѣлящая пополамъ одинъ изъ угловъ его, была равна p; высота, опущенная изъ этого же угла, равнялась h, а радіусъ опис. круга $= r$?

12. Въ данный кругъ O вписать многоуг. такъ, чтобы одна сторона его проходила черезъ данную точку A, а прочія стороны были соотвѣтственно параллельны даннымъ прямымъ m_1, m_2, m_3 .....?

13. Въ данный кругъ O вписать пять равныхъ квадратовъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ былъ концентриченъ съ кругомъ, а каждый изъ остальныхъ имѣлъ двѣ вершины на окружности?

14. Въ данный кругъ O вписать шесть равныхъ прав. 5—ковъ, такъ чтобы одинъ изъ нихъ былъ концентриченъ съ кругомъ, а остальные имѣли по одной вершинѣ на окружности?

15. Въ данный кругъ O вписать семь равныхъ прав. 6 — ковъ, такъ чтобы одинъ изъ нихъ былъ концентриченъ съ кругомъ, а остальные имѣли по двѣ вершины на окружности?

ГЛАВА IX.

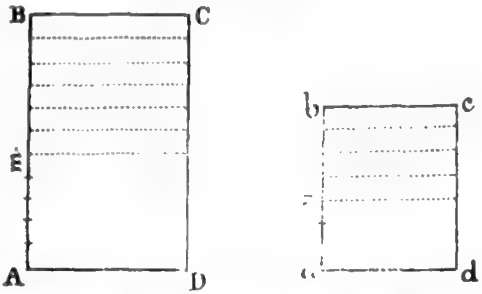
Измѣреніе площадей прямолинейныхъ фигуръ.

272. Измѣрить площадь фигуры значитъ узнать, во сколько разъ она больше или меньше площади другой фигуры, принятой за единицу; иначе говоря—значитъ найти отношеніе ея къ площади фигуры, принятой за единицу. За единицу площади принимаютъ квадр. футъ, квадр. дюймъ, вообще площадь квадрата, котораго сторона равна какой нибудь линейной единицѣ. Измѣреніе площадей основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

273. *Площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія и высоты, равны между собою*; дѣйствительно, мы уже доказали въ § 163-мъ, что такіе прямоугольники равны; стало быть и площади ихъ равны.

274. *Площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собой какъ ихъ высоты.* Пусть прямоуг. AC и ac (чер. 358) имѣютъ равныя основанія AD и ad; докажемъ, что $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}$. Теорема представляетъ два случая: 1) когда AB и ab соизмѣримы и 2) когда эти линіи несоизмѣримы.

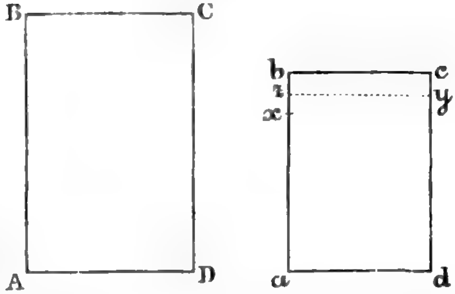
Чер. 358



1-й случай. Положимъ, что AB и ab соизмѣримы и что общая мѣра ихъ повторяется m разъ въ AB и n разъ въ ab; тогда отношеніе AB къ ab равно $\frac{m}{n}$. Проведя черезъ точки, которыя получатся при отложеніи общей мѣры на сторонахъ AB и ab, прямыя линіи, параллельныя AD въ одномъ прямоугольникѣ и параллельныя ad въ другомъ, раздѣлимъ прямоуг. AC на m, а прямоуг. ac на n равныхъ между собой прямоуг.; слѣд. и отношеніе прямоуг. AC къ ac равно $\frac{m}{n}$. Итакъ отношеніе площадей прямоугольниковъ равно отношенію ихъ высотъ.

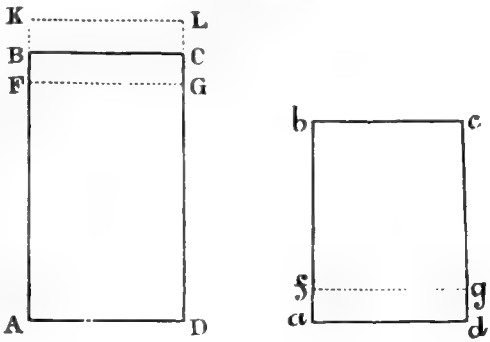
2-й случай. Чтобы доказать теорему въ случаѣ, когда AB и ab (чер. 359) несоизмѣримы, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости; именно допустимъ, что $\frac{AC}{ac}>\frac{AB}{ab}$. Чтобы уравнять эти отношенія, надо второе отношеніе увеличить; а для этого можно уменьшить послѣдующій членъ его, т. е. вмѣсто ab взять меньшую линію, напр. ax. Итакъ положимъ, что $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ax}$. Раздѣлимъ линію AB на равныя части, которыя были бы меньше bx, и будемъ одну изъ этихъ частей откладывать по ab, начиная отъ a; тогда одна изъ точекъ непремѣнно упадетъ между x и b, напр. въ z; проведя прямую $zy \parallel ad$, получимъ прямоуг. ay, котораго высота az, очевидно, соизмѣрима съ AB; слѣд. $\frac{AC}{ay}=\frac{AB}{az}$. Сравнивая эту пропорцію съ допущенной нами пропорціей, т. е. съ $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ax}$, видимъ, что у нихъ предъидущіе члены равны, а слѣд. послѣдующіе члены должны быть пропорціональны; т. е. $\frac{ay}{ac}=\frac{az}{ax}$ Провѣряя же эту пропорцію по чертежу, находимъ, что она не вѣрна, ибо первое ея отношеніе < 1, а второе > 1. Отсюда заключаемъ, что допущенное нами предположеніе $\frac{AC}{ac}>\frac{AB}{ab}$ невѣрно. Точно такъ же можно доказать, что $\frac{AC}{ac}$ не можетъ быть и меньше $\frac{AB}{ab}$; для этого надо только взять вмѣсто ab линію бо́льшую и повторить предъидущія разсужденія. Такимъ образомъ и въ случаѣ несоизмѣримости AB и ab, отношеніе площадей прямоугольниковъ равно отношенію ихъ высотъ.

Чер. 359.



Приведемъ другое доказательство теоремы въ случаѣ несоизмѣримости AB и ab. Докажемъ сперва, что отношеніе площадей AC и ac (чер. 360) равно отношенію прямыхъ AB и ab съ какой угодно точностью, напр. до $\frac{1}{n}$. Для этого раздѣлимъ ab на n равныхъ частей и одну часть af будемъ откладывать по AB, начиная отъ A; пусть эта часть въ AB уложится m разъ съ остаткомъ FB, меньшимъ af, т. е. n й доли ab; тогда отноше-

Чер. 360.

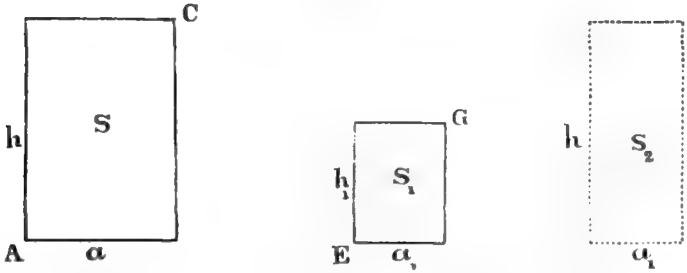


ніе AB къ ab равно $\frac{m}{n}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Если проведемъ $fg \parallel ad$ и $FG \parallel AD$, то прямоуг. ag уложится n разъ въ прямоуг. ac, а въ прямоуг. AC онъ уложится m разъ съ остаткомъ FC; ровно же m разъ онъ уложится въ прямоуг. AG, а $m+1$ разъ въ прям. AL; поэтому $\frac{AL}{ac}=\frac{m+1}{n}$; $\frac{AG}{ac}=\frac{m}{n}$; а такъ какъ $\frac{AC}{ac} < \frac{AL}{ac}$ и $> \frac{AG}{ac}$, то слѣд. $\frac{AC}{ac} > \frac{m}{n}$ и $< \frac{m+1}{n}$; т. е. положивъ $\frac{AC}{ac}=\frac{m}{n}$, мы дѣлаемъ ошибку меньше, чѣмъ на $\frac{1}{n}$. Итакъ отношеніе $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}$ съ точностью $\frac{1}{n}$. Теперь докажемъ, что отношеніе $\frac{AC}{ac}$ не можетъ не быть равнымъ отношенію $\frac{AB}{ab}$. Для этого положимъ, что эти отношенія разнятся на нѣкоторое число k, такъ что $\frac{AC}{ac}-\frac{AB}{ab}=k$. Опредѣлимъ отношенія между площадями AC и ac и между прямыми AB и ab съ точностью до $\frac{1}{n}$, причемъ выберемъ для n такое большое число, чтобы дробь $\frac{1}{n}$ была меньше k. Пусть это отношеніе $=\frac{m}{n}$, и пусть отношеніе $\frac{AC}{ac}$ отличается отъ $\frac{m}{n}$ на какую нибудь величину x, а отнош. $\frac{AB}{ab}$ отличается отъ $\frac{m}{n}$ на величину z, гдѣ z не равно x, такъ какъ мы предположили, что $\frac{AC}{ac}$ не равно $\frac{AB}{ab}$; притомъ и x и z меньше $\frac{1}{n}$. Тогда $\frac{AC}{ac}=\frac{m}{n}+x$; $\frac{AB}{ab}=\frac{m}{n}+z$; слѣд. $\frac{AC}{ac}-\frac{AB}{ab}=x-z$ или $k=x-z$. Но это равенство невозможно, потому что x и z величины меньшія $\frac{1}{n}$, а $k > \frac{1}{n}$. Слѣд. и отношенія $\frac{AC}{ac}$ и $\frac{AB}{ab}$ не могутъ быть различны; т. е. и въ случаѣ несоизмѣримости $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}$.

275. Если въ прямоугольникахъ AC и ac (чер. 360) примемъ за основанія AB и ab, то прямоуг—ки будутъ имѣть равныя высоты AD и ad; а слѣд. *площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся между собою какъ основанія.*

276. Возьмемъ теперь два прямоуг. съ разными основаніями и высотами. Положимъ, что прямоуг. AC (чер. 361) имѣетъ основаніе $=a$ какимъ нибудь линейнымъ единицамъ, напр. a дюйм., высоту $=h$ дюйм.; прям—къ EG имѣетъ основаніе $=a_1$, высоту $=h_1$ дюйм.; величину же площади перваго пр—ка означимъ черезъ s, а втораго черезъ s_1, предполагая, что s и s_1 выражены въ квадр. мѣрахъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ линейнымъ мѣрамъ, въ которыхъ

Чер. 361.



выражены основанія и высоты взятыхъ нами прямоугольниковъ, т. е. что площ. прямоуг. AC содержитъ s квадр. дюйм., а площ. прямоуг. $EG=s_1$ кв. дюйм. Построимъ третій прямоуг., который имѣлъ бы съ AC одинакую высоту, а съ EG одинакое основаніе; т. е. построимъ такой прямоуг., котораго основаніе$=a_1$, а высота$=h$ дюйм.; площадь же его, положимъ, имѣетъ s_2 кв. дюйм. Тогда, по предъид. теоремамъ, будемъ имѣть $\frac{s}{s_2}=\frac{a}{a_1}$; $\frac{s_2}{s_1}=\frac{h}{h_1}$.

Перемноживъ эти двѣ пропорціи, получимъ $\frac{s\,s_2}{s_1 s_2}=\frac{ah}{a_1 h_1}$, или $\frac{s}{s_1}=\frac{ah}{a_1 h_1}$; т. е. *площади какихъ угодно прямоугольниковъ относятся между собой какъ произведенія ихъ основаній на высоты.* При этомъ, какъ видно изъ доказательства теоремы, подъ словами основанія и высоты нужно разумѣть не самыя линіи, которыя, очевидно, перемножать между собой нельзя, а числа, выражающія величины этихъ линій въ какой нибудь одной единицѣ. Если напр. $a=60$, $h=3$, $a_1=6$, $h_1=15$ дюйм., то $\frac{s}{s_1}=\frac{60.\ 3}{6.15}=2$; т. е. площадь перваго прямоуг. вдвое больше втораго. Если $a=1^3/_4$ дюйм., $h=2$ верш., $a_1=1$ футу, $h_1=6$ дюйм., то, обративъ всѣ мѣры въ одно наименованіе, напр. въ дюймы, найдемъ $\frac{s}{s_1}=\frac{1^3/_4 \cdot {}^7/_2}{12.6}={}^{49}/_{576}$; т. е. площ. перваго прямоуг.$={}^{49}/_{576}$ втораго. *

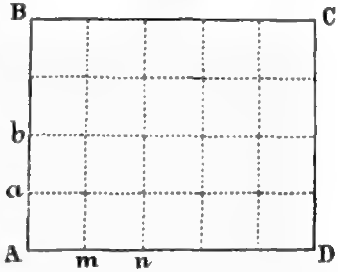
---

* Если пропорцію $\frac{s}{s_1}=\frac{ah}{a_1 h_1}$ представимъ въ видѣ $\frac{s}{s_1}=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{h}{h_1}$, то можно сказать, что отношеніе площадей прямоугол—въ равно произведенію отношенія ихъ основаній на отношеніе ихъ высотъ. При этомъ подъ a, a_1, h, h_1 можно разумѣть какъ числа, выражающія длины основаній и высотъ, такъ и самыя эти линіи, ибо отношенія $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{h}{h_1}$ во всякомъ случаѣ будутъ представлять отвлеченныя числа, которыя можно перемножать.

277. Если прямоугольникъ EG (чер. 361) будетъ квадратной единицей, то въ пропорціи $\frac{s}{s_1}=\frac{ah}{a_1h_1}$ надо положить $s_1=1$, $a_1=1$ и $h_1=1$; тогда получимъ $s=ah$.
Это выраженіе показываетъ, что число s, выражающее величину площади прямоуг. въ какой нибудь квадратной единицѣ, равно произведенію чиселъ a и h, выражающихъ длины сторонъ прямоуг. въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ. Короче эта теорема выражается такъ: *площадь прямоугольника равняется произведенію его основанія на высоту.*

Такимъ образомъ, чтобъ опредѣлить площ. прямоуг. AC (чер. 362), надо измѣрить его стороны AB и AD какой нибудь линейной единицей и полученныя числа перемножить; пусть напр. $AB=4$ дюйм., $AD=5$ дюйм.; тогда площадь $AC=4.5=20$ кв. дюйм. Дѣйствительно, проведя черезъ точки $a,b\ldots$ прямыя, параллельныя AD, а черезъ m, $n\ldots$ прямыя, параллельныя AB, мы разобьемъ прямоуг. AC на 20 квадратовъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ сторону въ 1 дюймъ.

Чер. 362.



Подобнымъ образомъ казенная десятина—мѣра, служащая для измѣренія полей, и представляющая прямоуг., котораго одна сторона=40, а другая 60 саж., или одна сторона=30, а другая 80 саж., имѣетъ площадь =2400 кв. саж.; а хозяйственная десятина, имѣющая видъ прямоуг., котораго одна сторона = 30, а другая = 80 саж., равна 3200 кв. саж.

Опредѣлимъ еще площ. прямоуг., котораго одна сторона = 5 верш., а другая = 2 арш.; приведя въ одно наименованіе, напр. въ вершки, числа, выражающія стороны, найдемъ площадь = 32.5=160 кв. верш. Если бы обратили вершки въ аршины, то нашли бы площадь $=2.\,^5/_{16}=\,^5/_8$ кв. ар.$=\,^5/_8.256=160$ кв. верш.; т. е. получили тотъ же результатъ, что и прежде.

278. Такъ какъ въ квадратѣ основаніе и высота равны между собою, то, называя сторону квадрата a, а площ. s, получимъ $s=a.a=a^2$; т. е. *площадь квадрата = квадрату его стороны.*

Такъ если сторона квадрата = 5 саж., то площ. = $5^2=25$ кв. саж. Точно также 1 кв. миля = 7^2 кв. верстъ; 1 кв. саж $=3^2=9$ кв. ар. и т. под.; вообще, если единичное отношеніе двухъ линейныхъ мѣръ есть n, то единичное отношеніе соотвѣтствующихъ квадратныхъ мѣръ будетъ n^2.

279. Изъ формулы $s=ah$ находимъ $a=\frac{s}{h}$ и $h=\frac{s}{a}$; такимъ образомъ, зная величину площ. прямоуг. и одной изъ сторонъ его, можно найти другую сторону; для этого стоитъ только число, выражающее площадь, раздѣлить на число, выражающее сторону въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ. Если напр. площадь прямоуг. $=42$ кв. дюйм., а сторона$=3$ верш., то, обративъ 3 верш. въ дюймы, и раздѣливъ 42 на полученное число дюймовъ, т. е. на $5\frac{1}{4}$, найдемъ, что другая сторона $=8$ дюйм.

Изъ формулы $s=a^2$ находимъ $a=\sqrt{s}$; т. е. если изъ числа, выражающаго площадь квадрата, извлечь квадр. корень, то получимъ въ соотвѣтствующихъ линейныхъ мѣрахъ величину стороны квадрата. Такъ сторона квадрата, котораго площ. $=169$ кв. верш., будетъ $=\sqrt{169}=13$ верш.

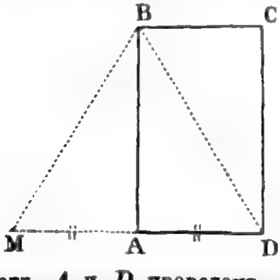
280. Если мы возьмемъ два прямоуг.—одинъ съ основаніемъ 8 дюйм. и высотой 9 дюйм., другой съ основаніемъ 12 дюйм., а высотой 6 дюйм., то площади ихъ будутъ равны, ибо каждый прямоуг. содержитъ 72 кв. дюйм., хотя самые прямоугольники, очевидно, не могутъ быть совмѣщены. Такія фигуры, которыя при наложеніи не совмѣщаются, но имѣютъ равныя площади, наз. *равновеликими* или равномѣрными.

Равновеликими могутъ быть и не одноименныя фигуры. Возьмемъ напр. (чер. 363) прямоуг. $ABCD$, продолжимъ его сторону DA, отложимъ $AM=AD$ и соединимъ M и D съ B; тогда треуг. MBD будетъ равновеликъ прямоуг. $ABCD$, ибо каждый изъ нихъ вдвое больше треуг. ABD.

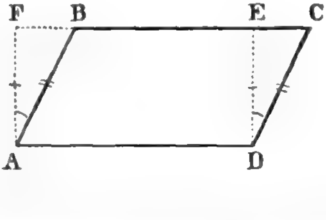
Разсмотримъ, какъ опредѣляются площади другихъ фигуръ.

281. *Параллелограммъ и прямоугольникъ съ равными основаніями и высотами равновелики.* Возьмемъ параллелогр. AC (чер. 364) и изъ

Чер. 363.



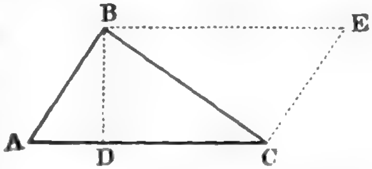
Чер. 364.



точекъ A и D проведемъ AF и DE перпендикулярно къ AD; тогда прямоуг. AE и параллелогр. AC будутъ имѣть одно основаніе AD и одну высоту DE. Прямоуг. и параллелограммъ имѣютъ общую часть—трапецію $ABED$; если къ этой трапеціи придать треуг. EDC, то получится параллелограммъ; а если придать треуг. FAB, то получится прямоугольникъ. Но треуг. $EDC = FAB$, ибо они имѣютъ по равной гипотенузѣ ($AB = DC$) и равному катету ($AF = DE$). Итакъ параллелогр. AC равновеликъ прямоуг. AE. Поэтому *площадь параллелограмма = произведенію его основанія на высоту.*

282. Возьмемъ треуг. ABC (чер. 365), котораго основаніе AC, а высота BD; проведемъ изъ B прямую $BE \parallel AC$, а изъ C прямую $CE \parallel AB$; тогда получимъ параллелограммъ AE; такъ какъ треуг. $ABC = BCE$, то слѣд. треуг. $ABC = \frac{1}{2}$ пар—ма AE; а потому площадь $ABC = \frac{AC.BD}{2}$;

Чер. 365.



итакъ *площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту.*

283. Изъ двухъ предъидущихъ §§ слѣдуетъ:

1. Площади параллелограммовъ (а также и треугольниковъ) относятся какъ произведенія высотъ на основанія.

2. Площади параллелограммовъ (и треугольниковъ) съ равными основаніями относятся какъ высоты; а съ равными высотами—относятся какъ основанія.

3. Площади квадратовъ относятся какъ квадраты ихъ сторонъ.

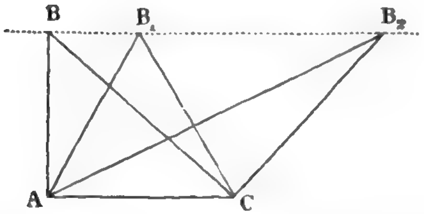
4. Параллелограммы (и треугольники) съ равными основаніями и высотами равновелики.

5. Площадь прямоуг. треуг. $= \frac{1}{2}$ произведенія его катетовъ.

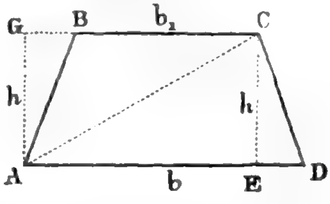
Изъ слѣд 4-го слѣдуетъ, что треугольники (чер. 366) ABC, AB_1C, AB_2C...., имѣющіе общее основаніе AC, а вершины B, B_1, B_2.... на линіи, параллельной основанію, равновелики, ибо высоты ихъ равны, какъ разстоянія между параллельными линіями.

284. Возьмемъ трапецію $ABCD$ (чер. 367); проведя діагональ

Чер. 366.



Чер. 367.



AC, разобьемъ трапецію на два треуг.; если въ этихъ треуг. примемъ за основанія AD и BC, то высоты ихъ CE и AGбудутъ равны между собою. Означивъ числа, выражающія длины линій AD, BC и CE черезъ b, b_1 и h, найдемъ, что площ. $ACD = \frac{b\,h}{2}$;

площ. $ABC = \frac{b_1 h}{2}$; а слѣд. площ. $ABCD = ACD + ABC = = \frac{bh}{2} + \frac{b_1 h}{2} = \frac{h(b+b_1)}{2}$. Такъ какъ полсумма параллельныхъ сторонъ трапеціи равна средней линіи (§ 165), то означивъ длину этой линіи черезъ l, найдемъ, что площ. $ABCD = hl$.

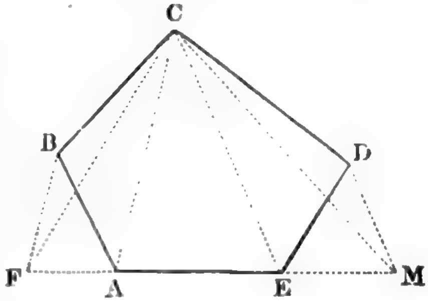
Итакъ *площадь трапеціи равна высотѣ, умноженной на полсумму параллельныхъ сторонъ*, или *равна высотѣ, умноженной на среднюю линію.*

285. Чтобы опредѣлить площ. какого нибудь многоугольника, надо разбить его діагоналями на треугольники, опредѣлить площадь каждаго изъ треуг. и всѣ эти площади сложить. Можно также взять точку внутри многоуг. и провести изъ нея линіи въ вершины многоуг.; тогда многоуг. также разобьется на треугольники.

Но гораздо удобнѣе сперва *превратить многоугольникъ въ треугольникъ*, т. е. построить треуг., равновеликій данному многоуг. Покажемъ, какъ это дѣлается.

Возьмемъ напр. пятиугольникъ $ABCDE$ (чер. 368). Проведемъ діагональ CA и изъ точки B проведемъ $BF \parallel CA$ до встрѣчи съ продолженіемъ стороны EA; точку F соединимъ съ C; тогда получимъ четыреуг. $FCDE$, равновеликій пятиугольнику $ABCDE$. Дѣйствительно, оба эти многоуг. имѣютъ общую часть—$AEDC$; придавъ къ $AEDC$ треуг. ACF, получимъ 4—къ $FCDE$; придавъ же къ $AEDC$ треуг. ACB, получимъ 5—къ $ABCDE$. Но треуг. ACF равновеликъ ACB, потому что они имѣютъ одно основаніе AC, а вершины ихъ B и F лежатъ на линіи $BF \parallel$ основанію. Теперь 4—къ $FCDE$ превратимъ въ треуг.; для этого соединимъ C съ E, изъ D проведемъ $DM \parallel CE$ и соединимъ C съ M; треуг. $FCM = FCE + CEM$; а 4—къ $FCDE = FCE + CED$; но CEM равновеликъ CED, слѣд. треуг. FCM равновеликъ 4—ку $FCDE$, а потому и 5—ку $ABCDE$.

Чер. 368.



Опредѣливъ площадь треуг. FCM, мы узнаемъ и величину площади даннаго многоуг. $ABCDE$.

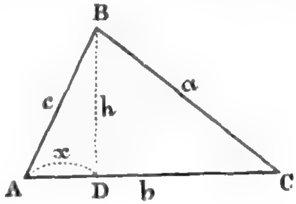
Если бы данъ былъ напр. 10—къ, то посредствомъ предъидущаго построенія мы обратили бы его сначала въ 9—къ, потомъ въ 8—къ...., наконецъ въ 3—къ.

Если имѣемъ правильный n—угольникъ, то проведя изъ его центра прямыя линіи въ вершины многоуг., мы разобьемъ его на n равныхъ треуг.; если означимъ сторону многоуг. черезъ a, а апоѳему черезъ r, то площ. каждаго треуг. $= \frac{a.r}{2}$, а слѣд. площадь мнотоуг. $=\frac{na.r}{2}$; но na есть периметръ многоуг.; поэтому *площ. прав. многоуг.=половинѣ произведенія его периметра на апоѳему.*

Для примѣра вычислимъ площ. прав. 6—ка, вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ $=R$. Такъ какъ сторона такого 6—ка = радіусу, то периметръ его $=6R$; апоѳема, какъ катетъ треуг., котораго гипотенуза есть радіусъ, а другой катетъ есть половина стороны, будетъ равна $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}={}^1/_2R\sqrt{3}$; слѣд. площ. 6—ка$=\frac{6R.{}^1/_2R\sqrt{3}}{2}=$ $={}^3/_2R^2\sqrt{3}$. Если напр. $R=8$ дюйм., то площ. 6—ка $={}^3/_2.8^2\sqrt{3}=$ $=96.\ 1,73\ldots\ldots=166,08\ldots\ldots$ квадр. дюйм.

286. Мы видѣли, какъ опредѣляется площадь треуг. посредствомъ его основанія и высоты; теперь выведемъ выраженіе площ. треуг. въ зависимости отъ его сторонъ, т. е. покажемъ, какъ опредѣлить величину площ. треуг., зная длины сторонъ его. Возьмемъ какой нибудь треуг. ABC (чер. 369); полагая, что углы A и C острые, проведемъ высоту BD; положимъ, что площ. треуг. $ABC=s$, высота $BD=h$, $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$, $AD=x$, гдѣ h, b, a, c, x суть числа, выражающія длины соотвѣтствующихъ линій въ одной и той же единицѣ, а s—число соотвѣтствующихъ квадратныхъ единицъ. Тогда $s=\frac{bh}{2}$; но изъ треуг. ABD

Чер. 369.



имѣемъ $h^2=c^2-x^2$, а на основаніи § 206-го имѣемъ

$$a^2=b^2+c^2-2bx,\ \text{откуда}\ x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b};\ \text{а слѣд.}$$

$$h^2=c^2-x^2=c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}.$$ Замѣнивъ въ этомъ выраженіи разность квадратовъ произведеніемъ суммы на разность, получимъ

$$h^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\ (2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2}.\ \text{Но}$$

$$2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c+a).\ (b+c-a);$$
$$2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b^2+c^2-2bc)=a^2-(b-c)^2=$$
$$=(a+b-c)(a-b+c);\ \text{слѣд.}$$
$$h^2=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2}.$$

Этому выраженію можно дать другой видъ; для этого означимъ периметръ треуг. черезъ $2p$, т. е. положимъ $b+c+a=2p$; тогда $b+c=2p-a$; $b+c-a=2p-2a=2(p-a)$.

Подобнымъ образомъ

$$a+c-b=2(p-b);\ a+b-c=2(p-c),\text{ и}$$

$$h^2=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2};\quad h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

а слѣд.

$$s=\frac{bh}{2}=\frac{b}{2}\cdot\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Если напр. $a=25$; $b=24$; $c=7$ дюйм., то $2p=56$; $p=28$; $p-a=3$; $p-b=4$ $p-c=21$, и $s=\sqrt{28.3.4.21}=\sqrt{7056}=84$ кв. дюйм.

Если треуг. будетъ равносторонній, то назвавъ его сторону черезъ a, будемъ имѣть $s=\sqrt{{}^3/_2a.{}^1/_2a.{}^1/_2a.{}^1/_2a}={}^1/_4a^2\sqrt{3}$.

287. Опредѣлимъ цѣлыя значенія сторонъ треуг. a, b, c, при которыхъ площадь треуг. выражается раціональнымъ, и притомъ цѣлымъ, числомъ.

Положимъ, что $p-a=nt_1$, $p-b=nt_2$, $p-c=nt_3$, гдѣ n, t_1, t_2, t_3 суть или цѣлыя числа или такія дробныя числа, при которыхъ произведенія nt_1, nt_2, nt_3 суть числа цѣлыя. Сложивъ предъидущія равенства, получимъ $p=n(t_1+t_2+t_3)$; а потому

$$s=\sqrt{(t_1+t_2+t_3)t_1t_2t_3n^4}.$$

Чтобы s было числомъ раціональнымъ, надо, чтобы подкоренная величина была полнымъ квадратомъ; а для этого нужно, чтобы произведеніе $(t_1+t_2+t_3).t_1t_2$=произведенію полнаго квадрата на множителя t_3; поэтому положимъ $(t_1+t_2+t_3)t_1t_2=t^2t_3$, гдѣ t есть число цѣлое. Тогда подкоренная величина будетъ $=n^4t^2t^2_3$ и слѣд. $s=n^2tt_3$=количеству раціональному. Изъ урав. $(t_1+t_2+t_3)t_1t_2=t^2t_3$ находимъ $t_3=\dfrac{(t_1+t_2)t_1t_2}{t^2-t_1t_2}$;

а изъ уравненій $p-a=nt_1$, $p-b=nt_2$, $p-c=nt_3$ или, что то же, $\dfrac{b+c-a}{2}=nt_1$, $\dfrac{a+c-b}{2}=nt_2$, $\dfrac{a+b-c}{2}=nt_3$ находимъ

$a=n(t_2+t_3)$; $b=n(t_1+t_3)$; $c=n(t_1+t_2)$. Подставивъ сюда вмѣсто t_3 его величину $\dfrac{(t_1+t_2)t_1t_2}{t^2-t_1t_2}$, получимъ $a=\dfrac{(t^2+t_1^2)t_2n}{t^2-t_1t_2}$; $b=\dfrac{(t^2+t^2_2)t_1n}{t^2-t_1t_2}$; $c=(t_1+t_2)n$.

Если подставить эти величины вмѣсто a, b, c въ выраженіе площади s, то подкоренное количество будетъ полнымъ квадратомъ. Но s, а равно и a, b, c должны быть числами цѣлыми; поэтому, разсматривая t, t_1 и t_2 какъ числа цѣлыя, положимъ $n=t^2-t_1t_2$; тогда $a=(t^2+t_1^2)t_2$; $b=(t^2+t^2_2)t_1$; $c=(t_1+t_2)(t^2-t_1t_2)$. Подставивъ эти величины въ выраженіе s, найдемъ $s=tt_1t_2(t_1+t_2)(t^2-t_1t_2)$= количеству цѣлому.

Если въ выраженіяхъ a, b, c будемъ давать t, t_1, t_2 произвольныя цѣлыя значенія, то получимъ рядъ величинъ для a, b, c, при которыхъ площ. треуг. выражается цѣлымъ числомъ.

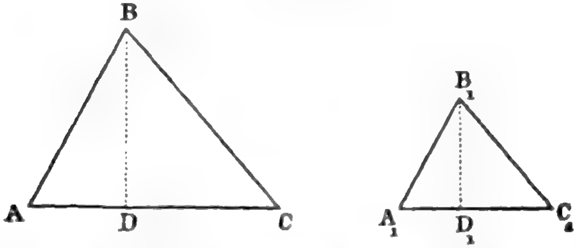
Если напр. $t=4$, $t_1=3$, $t_2=4$, то $a=25$, $b=24$, $c=7$, а $s=84$. Если $t=10$, $t_1=4$, $t_2=5$, то $a=29$, $b=25$, $c=36$, $s=360$ и т. под.

288. Разсмотримъ, какъ опредѣляется отношеніе площадей по-

добныхъ фигуръ. Возьмемъ два подобныхъ треуг. ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 370); означая площади ихъ черезъ s и s_1, получимъ

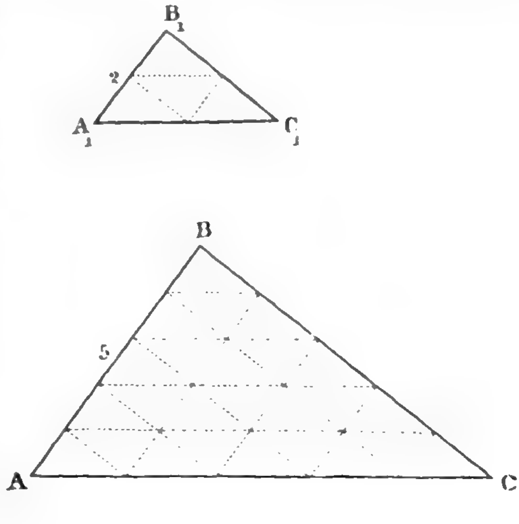
$$\frac{s}{s_1}=\frac{AC.BD}{A_1C_1.B_1D_1}.$$

Чер. 370.



Но въ подобныхъ треуг. основанія относятся какъ высоты (§ 188); слѣд. въ предъидущую пропорцію вмѣсто $\frac{BD}{B_1D_1}$ можно вставить $\frac{AC}{A_1C_1}$, и слѣд. $\frac{s}{s_1}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}$. Но $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, слѣд. $\frac{s}{s_1}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}$; т. е. *площади подобныхъ треуг. относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.* Такъ какъ $\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2$, то можно сказать еще, что отношеніе площадей подобныхъ треуг. равно квадрату отношенія сходственныхъ сторонъ. Если напр. сторона одного треуг. $=14$ дюйм., а сходственная сторона другаго $=\frac{1}{4}$ арш., то, обративъ $\frac{1}{4}$ арш. въ дюймы, найдемъ, что отношеніе сторонъ $=\frac{14}{7}=2$, а слѣд. площ. перваго треуг. въ 2^2 или въ 4 раза больше площ. втораго.

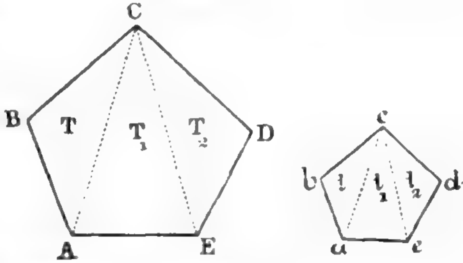
Чер. 371.



Если стороны двухъ подобныхъ треуг. будутъ соизмѣримы, то справедливость сейчасъ доказанной теоремы можно подтвердить наглядно. Дѣйствительно, пусть (чер. 371) $ABC \infty A_1B_1C_1$ и общая мѣра сторонъ AB и A_1B_1 укладывается въ первой линіи 5 разъ, а во второй 2 раза; тогда, по подобію треуг., отношеніе сторонъ AC и A_1C_1, а также BC и B_1C_1, будетъ тоже$={}^5/_2$; стало быть, если сторону A_1C_1 мы раздѣлимъ на двѣ равныя части, то каждая такая часть уложится 5 разъ въ сторонѣ AC; точно также и половина B_1C_1 уложится 5 разъ въ BC, и по чертежу видно, что треуг. $A_1B_1C_1$ можно раздѣлить на 4 равныхъ между собой треугольника, а ABC на 25 такихъ же треугольниковъ; поэтому отношеніе площадей треуг. ABC и $A_1B_1C_1$ будетъ равно ${}^{25}/_4 = ({}^5/_2)^2$.

289. Возьмемъ два подобныхъ многоуг. $ABCDE$ и $abcde$ (чер. 372); проведя изъ вершинъ C и c діагонали, по предъидущей теоремѣ будемъ имѣть

Чер. 372.



$$\frac{T}{t}=\frac{BC^2}{bc^2};\ \frac{T_1}{t_1}=\frac{AE^2}{ae^2};\ \frac{T_2}{t_2}=\frac{DE^2}{de^2}.$$

Во всѣхъ этихъ пропорціяхъ вторыя отношенія равны, ибо многоугольники подобны, слѣд.

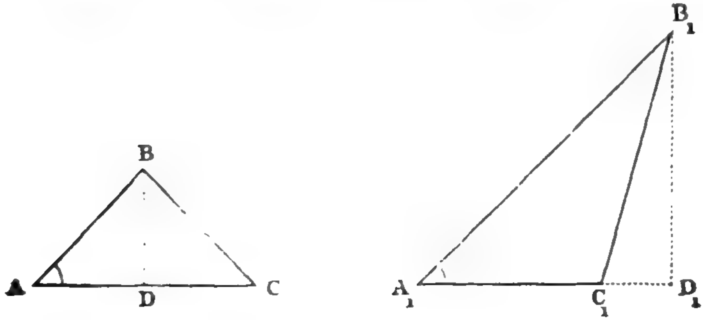
$$\frac{T}{t}=\frac{T_1}{t_1}=\frac{T_2}{t_2}.$$

Но въ равныхъ отношеніяхъ сумма предъидущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ какъ одинъ изъ предъидущихъ къ своему послѣдующему; слѣд. $\frac{T+T_1+T_2}{t+t_1+t_2}=\frac{T}{t}=\frac{BC^2}{bc^2}$, или

$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{BC^2}{bc^2}$; т. е. *площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

Въ правильныхъ подобныхъ многоуг. стороны пропорціональны

Чер. 373.

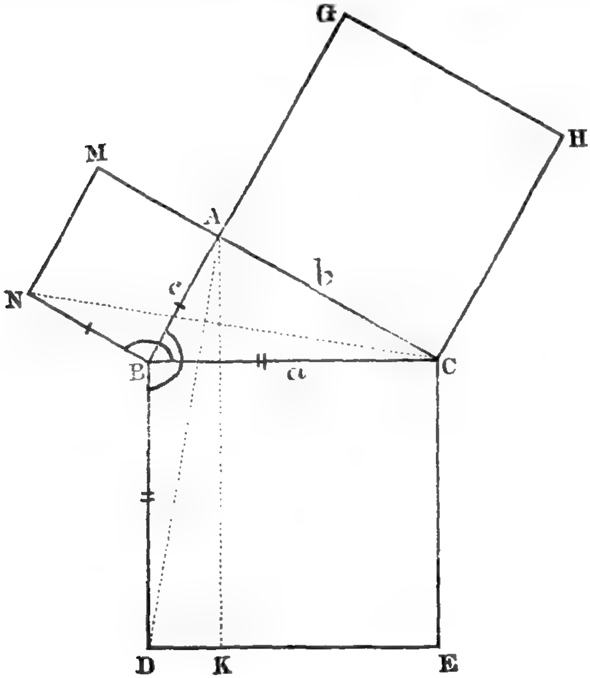


радіусамъ или апоѳемамъ; поэтому *площади правильныхъ одноименныхъ многоуг. относятся какъ квадраты радіусовъ или апоѳемъ.*

290. Возьмемъ треуг. ABC и $A_1B_1C_1$, (чер. 373), въ которыхъ уг. $A=A_1$, и опредѣлимъ отношеніе ихъ площадей s и s_1. Проведя высоты, получимъ $\frac{s}{s_1}=\frac{AC.BD}{A_1C_1.B_1D_1}$. Но треугольникъ $ABD \infty A_1B_1D_1$, слѣд. $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BD}{B_1D_1}$; поэтому въ предъидущую пропорцію вмѣсто $\frac{BD}{B_1D_1}$ можно поставить $\frac{AB}{A_1B_1}$; получимъ $\frac{s}{s_1}=\frac{AC.AB}{A_1C_1.A_1B_1}$. Итакъ *площади треугольниковъ, имѣющихъ по одному равному углу, относятся между собой какъ произведенія сторонъ, содержащихъ равные углы.*

291. Въ § 203-мъ мы видѣли, что если a, b, c будутъ длины гипотенузы BC и катетовъ AC и AB прямоуг. треуг. ABC (чер. 374), то $a^2=b^2+c^2$. Но a^2 есть площадь квадрата, построеннаго

Чер. 374.



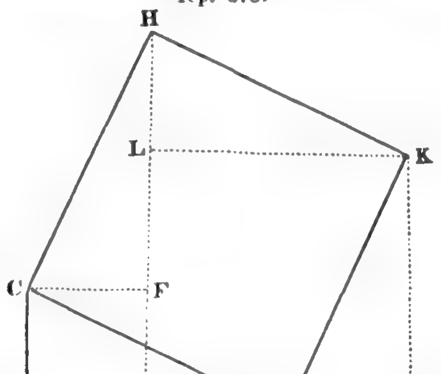
на BC; b^2 и c^2—площади квадр., построенныхъ на AC и AB. Итакъ *площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, равна* *суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.* Дѣйствительно, квадратъ BE можно раздѣлить на два прямоуг., изъ которыхъ одинъ будетъ равновеликъ квадрату BM, а другой квадрату CG. Для этого опустимъ изъ A перпендикуляръ на BC и продолжимъ его до пересѣченія съ DE; тогда $BK = BM$ и $KC = CG$. Для доказательства соединимъ N съ C и A съ D; тогда треуг. BDA будетъ равновеликъ $\frac{1}{2}$ прямоуг. BK, ибо имѣетъ съ нимъ одно основаніе BD; высота же прямоуг. DK равна высотѣ треуг., т. е. перпендикуляру, опущенному изъ A на продолженіе DB; треуг. $NBC = \frac{1}{2}$ квадрата BM, ибо имѣетъ съ нимъ общее основаніе NB, высота же квадрата NM равна высотѣ треуг., т. е. перпендикуляру, опущенному изъ C на продолженіе NB. Въ треуг. ABD и NBC сторона $AB = NB$ какъ стороны квадрата BM; $BD = BC$ какъ стороны квадрата BE, и уг. $ABD =$ уг. NBC, какъ состоящіе изъ общей части ABC и двухъ прямыхъ угл. CBD и NBA. Поэтому треуг. $ABD = NBC$, а слѣд. прямоуг. BK равновеликъ квадр. BM.

Соединивъ точку A съ E и точку B съ H, докажемъ подобнымъ образомъ, что прямоуг. $CK =$ квадр. CG. Слѣд. квадр. BE равновеликъ суммѣ квадр. BM и CG. Доказанная нами теорема наз. *пиѳагоровой* *.

Приведемъ еще два доказательства пиѳагоровой теоремы.

1. Пусть ABC (чер. 375) будетъ прямоуг. треуг., CK—квадратъ, построенный на гипотенузѣ. Изъ точекъ H и K проведемъ HG и $KM \perp AB$; изъ точекъ C и K проведемъ CF и $KL \parallel AB$. Треуг. CAB, CFH, HLK, KMB равны между собою, ибо имѣютъ по равной гипотенузѣ и по равному острому углу (напр. уг. $CBA =$ уг. BKM какъ углы съ перпендикулярными сторонами); слѣд. $AB = LK = MK$ и $AC = CF$: а потому $ACFG$ и $LKMG$ суть квадраты, построенные на катетахъ AC и AB данная треуг. Если къ фигурѣ $CFLKB$ придать тр—ки CFH и LHK, то получимъ квадратъ CK; а если къ той же фигурѣ $CFLKB$ придать тр—ки CBA и BKM, то получимъ фигуру $ACFLKM$, которая представляетъ сумму квадратовъ, построенныхъ

Чер. 375.

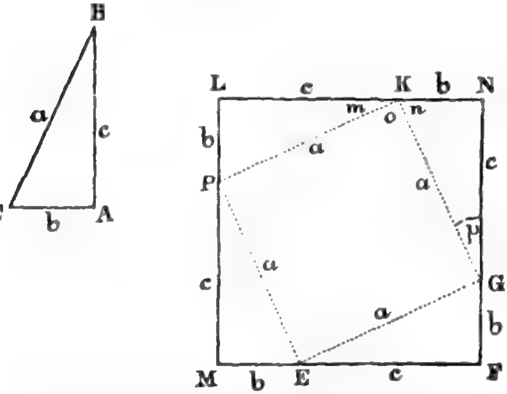


* За открытіе этой теоремы Пиѳагоръ принесъ въ жертву музамъ 100 быковъ; поэтому она наз. inventum hecatombae dignum.

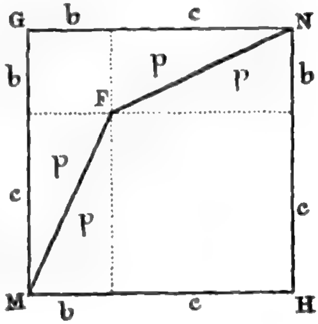
на катетахъ. А какъ придаваемые въ томъ и другомъ случаѣ тр—ки равны между собою, то слѣд. квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ. Это доказательство замѣчательно тѣмъ, что здѣсь квадратъ, построенный на гипотенузѣ, раздѣляется на части, могущія покрыть квадраты, построенные на катетахъ.

2. Пусть ABC (чер. 376) будетъ прямоуг. треуг., стороны котораго обозначимъ a, b, c. Построимъ квадратъ MN, котораго сторона равна суммѣ катетовъ $b+c$. Отложивъ части $ME=b$, $EF=c$, $FG=b$, $GN=c$, $NK=b$, $KL=c$, $LP=b$, $PM=c$, и соединивъ

Чер. 376.

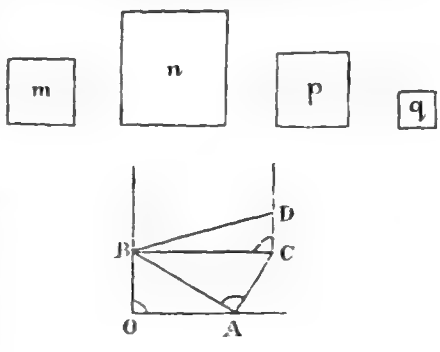


Чер. 377.



K, G, E и P, получимъ фигуру $EPKG$: въ этой фигурѣ сторона $KP=PE=EG=GK=a$, ибо треуг. $KLP=PME=EFG=$ $=GNK=ABC$; уг.$o+$уг.$m+$уг.$n=180^\circ$, а уг. $n+m=90^\circ$ (ибо уг. $n+p=90^\circ$, а $p=m$); слѣд., уг. $o=90^\circ$; точно также докажемъ, что и прочіе углы фигуры $EPKG$ прямые; поэтому фигура $EPKG$ есть квадратъ, построенный на гипотенузѣ a треуг. ABC. Раздѣлимъ теперь квадратъ MN на части такъ, какъ показано на чер. 377; если отъ квадрата MN (чер. 377) отнимемъ четыре треуг. p, p, p, p, то получимъ $GF+FH$, т. е. сумму квадратовъ, построенныхъ на катетахъ треуг. ABC (чер. 376); а если отъ квадрата MN (чер. 376) отнять такіе же четыре треуг., то получимъ KE — квадратъ, построенный на гипотенузѣ треуг. ABC.

Чер. 378.



292. На основаніи пиѳагоровой теоремы можно построить квадратъ, равновеликій суммѣ нѣсколькихъ квадратовъ или разности двухъ квадратовъ.

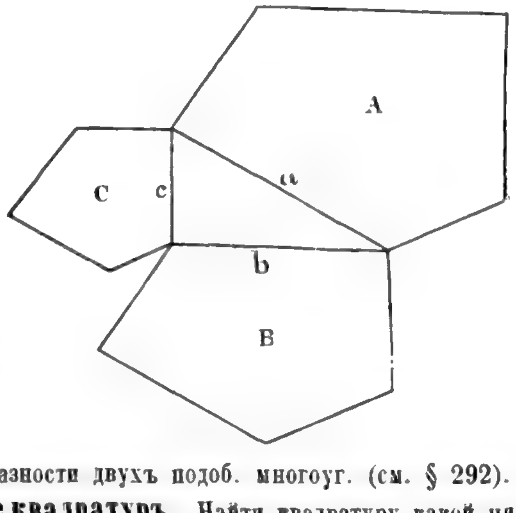
Пусть напр. требуется сложить квадраты m, n, p, q (чер. 378). Тогда отложимъ на сторонахъ прямаго уг. отъ вершины его части OA и OB, равныя сторонамъ квад. m и n, и проведемъ BA, которая и будетъ стороной квадрата $=m+n$; изъ A возставимъ перпендикуляръ къ AB и отложимъ $AC=$ сторонѣ квад. p; тогда BC будетъ стороной квадрата $=m+n+p$. Проведя $CD\perp BC$ и равную сторонѣ q и соединивъ B съ D, получимъ сторону квадрата $=m+n+p+q$.

Если нужно вычесть квад. m изъ n, т. е. построить квадратъ, равновеликій разности n и m, то строимъ прямоугольный треугольникъ, котораго гипотенуза есть сторона квад. n, а одинъ катетъ $=$ сторонѣ квад. m; тогда дрегой катетъ и будетъ стороной квадрата, равновеликаго разности $n-m$.

293. Пиѳагорова теорема распространяется также и вообще на подобные многоугольники; т. е. *многоугольникъ, построенный на гипотенузѣ, равенъ суммѣ подобныхъ ему многоугольниковъ, построенныхъ на катетахъ.*

Означивъ (чер. 379) площади многоугольниковъ черезъ A, B, C, а стороны треугольника черезъ a, b, c, по § 289 получимъ $\frac{B}{A}=\frac{b^2}{a^2}$; $\frac{C}{A}=\frac{c^2}{a^2}$; сложивъ эти дроби, найдемъ $\frac{B+C}{A}=$ $=\frac{b^2+c^2}{a^2}$. Но b^2+ $+c^2=a^2$, слѣд. и $B+C=A$.

Чер. 379.



Эта теорема даетъ возможность строить многоугольникъ, равновеликій суммѣ нѣсколькихъ подобныхъ многоуг., или разности двухъ подоб. многоуг. (см. § 292).

294. Нахожденіе квадратуръ. Найти квадратуру какой нибудь фигуры значитъ построить квадратъ, равновеликій этой фигурѣ. Такъ какъ всякій многоугольникъ можно, какъ мы видѣли, превратить въ треуг., то достаточно показать только, какъ находится квадратура треуг.

Если треуг. имѣетъ основаніе a, а высоту h, то площадь его $=\frac{1}{2}ah$; обозначивъ же черезъ x сторону квадрата, равновеликаго этому треуг., получимъ $\frac{1}{2}ah=x^2$, откуда $\frac{1}{2}a : x = x : h$; слѣд. сторона квадрата, равновеликаго треуг., будетъ средняя пропорціональная между высотой и половиной основанія треуг. (или между основаніемъ и половиной высоты); поэтому такой квадратъ всегда можно построить (§ 225).

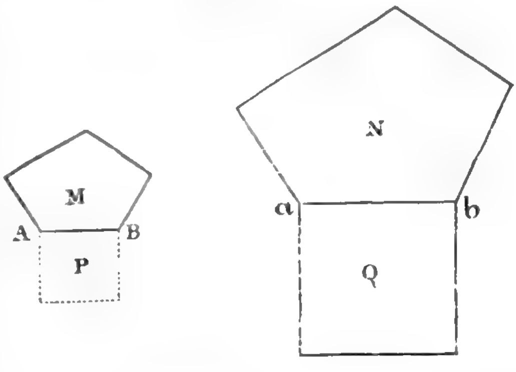
Легко видѣть, что для нахожденія квадратуры параллелограмма надо построить среднюю пропорціональную между основаніемъ и высотой его.

295. Увеличеніе и уменьшеніе фигуръ. Увеличить или уменьшить какую нибудь фигуру значитъ построить фигуру, подобную данной, притомъ такъ, чтобы площадь ея была въ извѣстное число разъ больше или меньше площади данной фигуры. Покажемъ сначала, какъ увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ квадратъ.

Положимъ напр., что мы имѣемъ квадратъ, котораго сторона$=a$, и хотимъ построить квадратъ, котораго площадь$=na^2$, причемъ n можетъ быть какимъ угодно числомъ, цѣлымъ или дробнымъ. Означивъ сторону искомаго квадрата черезъ x, получимъ $x^2=na^2$, откуда $a:x=x:na$; т. е. для опредѣленія стороны искомаго квадрата надо построить среднюю пропорціональную (§ 225) между прямыми линіями a и na. Напр. если хотимъ построить квадратъ, котораго площадь равнялась бы $^3/_7$ даннаго, то нужно найти сред. проп. между стороной даннаго квадрата и линіей, равной $^3/_7$ ея.

Положимъ теперь, что имѣемъ многоугольникъ (чер. 380), котораго площадь$=$ $=M$, и требуется построить подобный ему мног., котораго площадь равнялась бы nM, гдѣ n можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ числомъ. Для этого на одной изъ сторонъ даннаго многоуг., напр. на AB, строимъ квадратъ P; затѣмъ строимъ квадратъ $Q=nP$, какъ показано выше; на сторонѣ ab этого квадрата строимъ многоуг. N, подобный данному M; этотъ многоуг. N и будетъ равенъ nM. Дѣйствительно (§ 289) $\frac{Q}{P}=\frac{ab^2}{AB^2}$ и $\frac{N}{M}=\frac{ab^2}{AB^2}$; но $Q=nP$, слѣд. и $N=nM$.

Чер. 380.

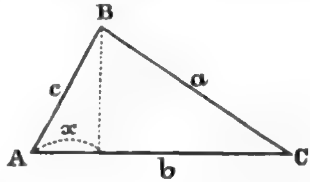


Увеличить или уменьшить многоугольникъ въ 4, 9, 16, 25....n^2 разъ, можно, построивши многоуг., подобный данному, притомъ такъ, чтобы сторона его была въ 2, 3, 4....n разъ больше или меньше соотвѣтствующей стороны даннаго многоуг.

Увеличить многоуг. въ n разъ, гдѣ n есть цѣлое число, можно также, построивши на основаніи § 293 многоуг., равновеликій суммѣ n многоугольниковъ, равныхъ данному.

296. Мы видѣли (§ 208), что если a, b, c будутъ стороны треуг. (чер. 381), то $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bx$, причемъ надо взять $+2bx$, если уголъ A тупой, и $-2bx$, если уг. A острый. Но a^2 выражаетъ площадь квадрата, построеннаго на a; bx выражаетъ площадь прямоугольника, котораго стороны суть линіи b и x; поэтому квадратъ, построенный на сторонѣ, лежащей противъ остраго угла треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на прочихъ сторонахъ, безъ удвоенной площади прямоугольника, котораго одна сторона есть основаніе треуг., а другая сторона есть разстояніе отъ вершины остраго угла до высоты. Подобнымъ образомъ можно выразить квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей тупому углу треуг.; сумму квадратовъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ треуг., (§ 215) и т. под.

Чер. 381.



Такъ какъ каждую пропорцію можно представить въ видѣ равенства двухъ произведеній, то всѣ теоремы о пропорціональности прямыхъ линій имѣютъ соотвѣтствующія теоремы, относящіяся къ площадямъ; напр. теоремѣ: перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра, соотвѣтствуетъ слѣдующая теорема: если изъ какой нибудь точки окружности опустить перпендикуляръ на діаметръ, то квадратъ, построенный на этомъ перпендикулярѣ, будетъ равновеликъ прямоугольнику, котораго стороны суть отрѣзки діаметра.

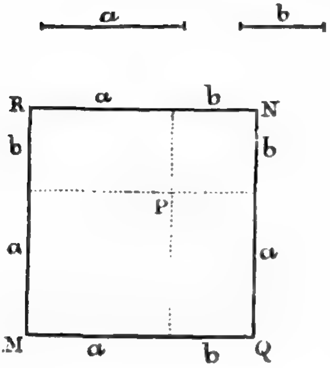
297. Извѣстнымъ изъ алгебры формуламъ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ и $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$ можно также придать геометрическое значеніе. Такъ первая формула показываетъ, что квадратъ, построенный на суммѣ или разности двухъ линій a и b, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на линіяхъ a и b, плюсъ или минусъ удвоенная площадь прямоугольника, котораго одна сторона есть a, другая b. Изъ второй формулы заключаемъ, что разность квадратовъ, построенныхъ на прямыхъ линіяхъ a и b, равновелика площади прямоугольника, котораго одна сторона $= a+b$, а другая $= a-b$.

Эти заключенія легко повѣрить чертежомъ.

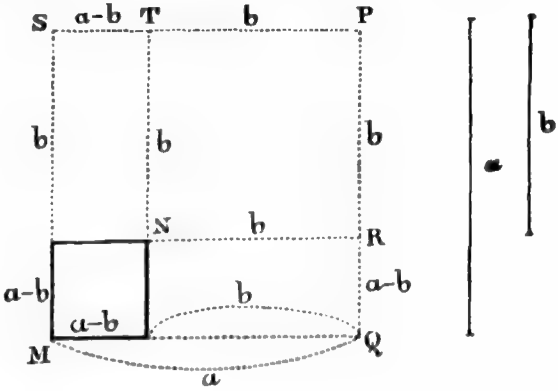
Дѣйствительно, квадратъ MN (чер. 382) $= (a+b)^2 = MP + PN + PQ + RP = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадратъ MN **(чер. 383), построенный на** $a-b$**, равный**

Чер. 382



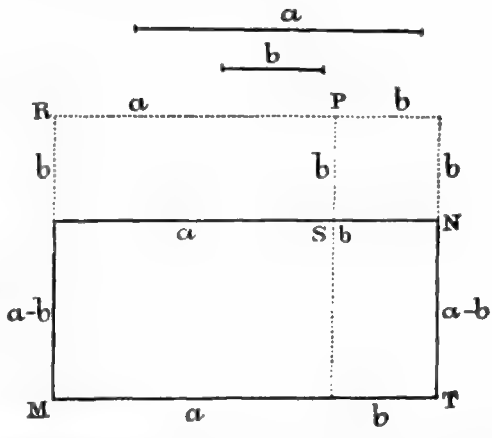
Чер. 383.



$(a-b)^2=MP-QT-RS+RT=a^2-2ab+b^2$.

Прямоуг. MN (чер. 384)$=(a+b)(a-b)=$ $=MP-RS+TS=$ $MP-(RS-TS)$. Прямоугольникъ RS имѣетъ основаніе a, а высоту b; а прямоуг. TS основаніемъ служитъ $a-b$, а высотой b; поэтому разность $RS-TS$ равновелика квадрату, имѣющему стороной b, ибо $a-(a-b)=b$; слѣд. $RS-TS=NP$. Итакъ $MN=MP-NP=$ $=a^2-b^2$.

Чер. 384.



298. Задачи на вычисленіе. 1. Сколько надо досокъ въ 12 фут. длины и 1 ф. 6 дюйм. ширины, чтобы сдѣлать полъ для прямоугольной комнаты, которой длина 8 саж., а ширина 18 фут.?

2. Опредѣлить площадь прямоугольника, котораго основаніе=7 саж. 6 дюйм., а высота=5 саж. 2 арш.?

3. Прямоугольникъ, котораго основаніе=16 саж., а высота=8 саж. 1 арш., равновеликъ другому прямоуг., котораго высота=10 саж.; опредѣлить основаніе втораго прямоуг.?

4 Опредѣлить сторону квадрата, равновеликаго суммѣ трехъ квадратовъ, которыхъ стороны суть 73 саж., 97 саж. 1 арш. и 292 саж.?

5. Вычислить сторону квадрата, равновеликаго прямоугольнику, имѣющему основаніе 38,5875, а высоту=5,6?

6. Прямоугольникъ имѣетъ стороны 36 и 16; на сколько надо уменьшить одну изъ сторонъ и увеличить другую, чтобъ получить квадратъ, равновеликій прямоугольнику?

7. Поле, имѣющее видъ квадрата, продано за 297,025 руб. по 117 руб. 60 коп. за десятину; опредѣлить сторону этого квадрата?

8. Опредѣлить сторону квадрата, котораго площадь содержитъ столько квадр. единицъ, сколько его периметръ содержитъ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицъ?

9. Параллелограммъ, котораго основаніе $=2$ саж. 2 фут., равновеликъ квадрату, котораго сторона$=1$ саж. 1 ф.; опредѣлить высоту параллелограмма?

10. Два параллелограмма имѣютъ равныя основанія; площади ихъ относятся какъ $6:5$; высота меньшаго $=3^3/_4$ ф.; опредѣлить высоту бо̀льшаго?

11. Площади двухъ параллелограммовъ относятся какъ $15:11$; высоты ихъ равны, а разность основаній$=3^3/_5$; найти основанія?

12. Площадь ромба$=3$ кв. ф. $120^{24}/_{25}$ кв. дюйм.; сторона его на $^4/_5$ ф. больше высоты; опредѣлить сторону и высоту?

13. Опредѣлить площадь прямоуг. треуг. по катетамъ $b=24$, $c=45$? $b=3{,}6$, $c=4{,}8$? $b=2{,}977$; $c=19{,}236$?

14. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по гипотенузѣ $a=7{,}09$ и катету $b=6{,}45$?

15. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по катету $b=9{,}1$ и высотѣ h, опущенной на гипотенузу, равной 3,5? по $b=126{,}3$; $h=84{,}5$?

16. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по катету $c=10{,}4$ и прилежащему къ нему отрѣзку p гипотенузы, равному 4? по $c=12{,}14$ и $p=8{,}13$?

17. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг., зная, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, дѣлитъ ее на части $p=26$ и $q=4{,}16$?

18. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг., если высота h, опущенная на гипотенузу, равна 4032, а отрѣзокъ p гипотенузы равенъ 1176?

19. Площ. прямоуг. треуг.$=s=0{,}06$; катетъ $b=0{,}4$; опредѣлить катетъ c, гипотенузу a; высоту h, опущенную на гипотенузу, и отрѣзки p и q гипотенузы?

20. Опредѣлить катеты b и c треуг., котораго гипотенуза $a=3605$, а площ. $s=3119046$?

21. Опредѣлить площ. равносторонняго треуг. по сторонѣ a? по высотѣ h?

22. По данной площ. s правильнаго треуг. опредѣлить его сторону? высоту?

23. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг., если его основаніе $b=80$, сторона $a=41$? если $b=87{,}16$; $a=104{,}15$?

24. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг., если его сторона $a=44{,}37$; а высота h, опущенная на основаніе, равна 30,6?

25. Площадь s равнобедр. треуг.$=1848$; основаніе $b=66$; опредѣлить сторону a и высоту h?

26. Площ. равнобедр. треуг. $s=762^2/_9$, а высота его $h=21^7/_9$; опредѣлить основаніе b и сторону a?

27. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг., если основаніе его $b=$ 48,17; а высота h_1, опущенная на сторону, равна 32,44?

28. Опредѣлить площ. равноб. треуг., если высота h, опущенная на основаніе, равна 1,06; а высота h_1, опущенная на сторону, равна 2,03?

29. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг. по периметру $2p=796,48$ и высотѣ $h=108,37$?

30. Треуг., котораго основаніе $b=145^3/_8$, а высота $h=11,666....$, равновеликъ квадрату; опредѣлить сторону этого квадрата?

31. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=18,35$; $h=12,18$?

32. Квадратъ, котораго сторона a, надо обратить въ треуг., котораго высота и основаніе были бы равны между собою; опредѣлить эти линіи?

33. Треуг. имѣетъ основаніе b, а высоту h; высота увеличена на линію m; на сколько надо уменьшить основаніе, чтобы площадь треуг. сохранила свою прежнюю величину?

34. Высота h треуг., котораго основаніе b, уменьшена на линію m; на сколько надо увеличить основаніе, чтобы величина площади треуг. не измѣнилась?

35. Рѣшить зад. 33-ю, полагая $b=146, 72$; $h=96, 18$; $m=10, 12$?

36. Рѣшить зад. 34-ю, полагая $b=146, 72$; $h=96, 18$; $m=10, 12$?

37. Рѣшить зад. 33, полагая $b=426^1/_4$; $h=239, 27$; $m=24, 16$?

38. Рѣшить зад. 34, полагая $b=426, 25$; $h=239, 27$; $m=24, 16$?

39. Какое измѣненіе произойдетъ въ площ. треуг., если его основаніе b и высота h увеличатся соотвѣтственно на m и n? уменьшатся на m и n? b увеличится на m, а h уменьшится на n? b уменьшится на m, а h увеличится на n?

40. Сумма двухъ сторонъ треуг. $=$ 124 ф.; высоты, опущенныя на эти стороны, соотвѣтственно равны 105 и 50; опредѣлить площ. треугольника?

41. Основаніе треуг.$=b$, высота$=h$; прочія стороны суть a и c; опредѣлить радіусъ вписаннаго круга?

42. Сторона квадрата$=a$; опредѣлить сторону квадрата, котораго площадь въ n разъ больше даннаго? Сдѣлать вычисленіе, когда $a=6,05$; $n=2$? $a=0,45$; $n=3$? $a=18$; $n=^1/_3$?

43. Сумма діагонали и стороны квадрата $= s = 10$; опредѣлить площ. его?

44. Разность діагонали и стороны квадрата $= d = 10$; опредѣлить площ. его?

45. Стороны прямоугольника суть a и b; къ каждой сторонѣ прямоугольника проведены параллели 1) внутри прямоуг. или 2) внѣ его на разстояніи m отъ каждой стороны. На сколько площ. прямоугольника, образуемаго этими параллелями, будетъ 1) меньше или 2) больше площади даннаго прямоуг.?

46. Къ двумъ параллельнымъ сторонамъ прямоугольника, изъ которыхъ каждая равна a, проведены параллели внутри его въ разстояніи m; а къ двумъ другимъ сторонамъ, каждая изъ которыхъ равна b, проведены параллели внѣ прямоуг. въ томъ же разстояніи. При

какихъ условіяхъ образованный такимъ образомъ прямоуг. будетъ равновеликъ данному?

47. Опредѣлить площадь квадрата по діагонали $=8$ ф. 4 дюйм.?

48. Высота треуг. на 2 арш. больше основанія; если основаніе и высота увеличатся на 6 арш., то площ. увеличится на 48 кв. арш.; найти основаніе?

49. Площ треуг. $=44^1/_{50}$ кв. арш.; высота на 8 арш. больше основанія; найти основаніе?

50. Параллельныя стороны трапеціи суть 9 саж. 6 ф. 4 дюйм. и 13 саж. 1 ф., а высота $=6$ саж. 3 ф. Опредѣлить площадь и среднюю линію?

51. Площ. трапеціи $=27$ кв. ф. 54 кв. дюйм.; параллельныя стороны ея суть 5 ф. 4 дюйм. и 6 ф. 10 дюйм.; опредѣлить разстояніе между ними?

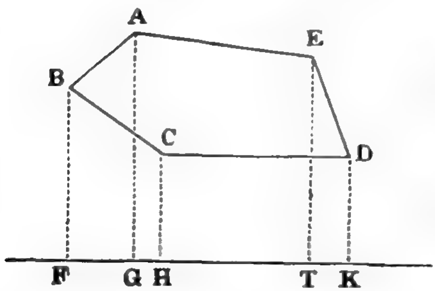
52. На сторонѣ a параллелограмма отъ ея конечной точки отложена прямая m. Найти на противоположной сторонѣ такую точку, чтобы линія, соединяющая ее съ концомъ прямой m, образовала трапецію, имѣющую основаніемъ m и равную $^1/_3$ площади даннаго параллелограмма? $^3/_4$ ея? $^5/_6$? $\frac{1}{n}$?

53. Трапеція имѣетъ параллельныя стороны b и d; на d отложено отъ вершины разстояніе m; требуется опредѣлить на b такую точку, чтобы прямая, соединяющая ее съ концомъ линіи m, дѣлила трапецію на двѣ равновеликія части?

54. Стороны прямоугольника суть $a=108$ и $b=48$; между стороной a и ей параллельной проведены двѣ прямыя, параллельныя между собой и равныя каждая $c=52$; точка пересѣченія одной изъ этихъ параллелей съ стороной a находится отъ конечной точки этой стороны въ разстояніи $m=8$. Опредѣлить площади трапецій, лежащихъ по обѣ стороны параллелей c, если разстояніе между этими параллелями$=d=2^1/_2$?

55. Рѣшить предъид. зад., полагая $a=224$, $b=118$, $c=164$, $m=24$, $d=2^1/_2$?

Чер. 385.



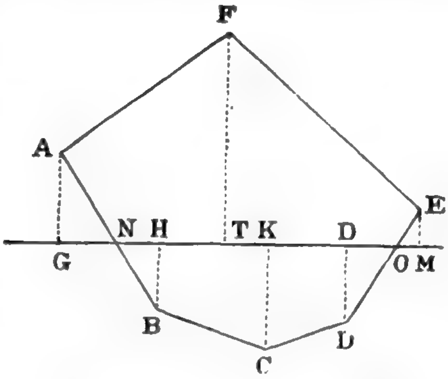
56. Вычислить площ. многоуг. $ABCDE$ (чер. 385), если перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ его, равны: $AG=36$; $BF=24$: $CH=18$; $ET=26$; $DK=23$; а разстоянія между основаніями этихъ перпендикуляровъ равны: $FG=17$; $GH=19$; $HT=18$; $TK=16$?

57. Рѣшить предъид. зад., полагая $AG=60{,}5$; $BF=12{,}3$; $CH=23{,}8$; $DK=32{,}7$; $ET=70{,}6$; $FG=10{,}2$; $GH=12{,}4$; $HT=20{,}5$; $TK=9{,}8$?

58 Вычислить площ. многоуг. $ABCDEF$ (чер. 386), если перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ его на прямую GM, равны:

$AG=20$; $BH=30$; $FT=45$; $CK=36$; $DL=24$; $EM=15$; а разстоянія между основаніями этихъ перпендикуляровъ равны: $GH=28$; $HT=15$; $TK=12$; $KL=32$; $LM=21$?

Чер. 386.



59. Рѣшить предъид. зад., если $AG=17,5$; $BH=24,3$; $FT=30$; $CK=22,6$; $DL=20,5$; $EM=26,9$; $GH=20,2$; $HT=10,4$; $TK=16$; $KL=26,8$; $LM=22,5$?

60. Опредѣлить площадь треуг. по сторонамъ 10; 17 и 21? 25; 29 и 36? 14; 13 и 15? 4; 13 и 15? 21; 13 и 20? 11; 13 и 20? 56; 25 и 39? 16; 25 и 39? 63; 25 и 52? 33; 25 и 52?

61. Опредѣлить площ. треуг. по сторонамъ 196,23; 127,45 и 116,28? 0,45; 0,36 и 0,52? 36,09; 19,46 и 23,59? 616; 488 и 356?

62. Опредѣлить площ. треуг., котораго стороны равны $a=6$, $b=8$, а уголъ между ними $=60°$?

63. Опредѣлить площ. треуг., котораго стороны равны $a=3,4$; $b=2,2$; а уг. между ними $=30°$?

64. Опредѣлить площ. треуг., котораго стороны равны $a=2,5$; $b=1,6$; а уг. между ними $=45°$?

65. Опредѣлить площ. треуг., двѣ стороны котораго равны $a=3,2$; $b=2,5$; а уг. между ними $=120°$?

66. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по катету $b=24$ и прилежащему къ другому катету отрѣзку p гипотенузы, равному 14?

67. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по гипотенузѣ $a=15$ и суммѣ катетовъ $b+c=m=20$?

68. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по гипотенузѣ $a=40$ и разности катетовъ $b-c=d=10$?

69. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по высотѣ $h=9$ и суммѣ катетовъ $b+c=m=40$?

70. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по высотѣ $h=24$ и разности катетовъ $b-c=d=10$?

71. Опредѣлить площ. прямоуг. треуг. по высотѣ $h=20$ и периметру $=m=100$?

72. Опредѣлить катеты треуг. по гипотенузѣ $a=22,5$ и площади $s=68,04$?

73. Опредѣлить гипотенузу a и катеты b и c треуг., если $b+c=$ $=m=245$, а площ. $s=4500$?

74. Опредѣлить гипотенузу a и катеты b и c треуг., если $b-c=$ $=d=253$, а площ. $s=25410$?

75. Опредѣлить гипот. a и катеты b, c треуг., если $a+b+c=$ $=2p=336$, а площадь $s=3360$?

76. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг. по сторонѣ $a=17$ и суммѣ основанія и высоты $b+h=m=31$?

77. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг. по сторонѣ $a=14,8$ и разности основанія и высоты $b-h=d=23,2$?

78. Рѣшить предъид. зад. при $a=14,5$; $d=-9, 5$?

79. Опредѣлить площ. равнобедр. треуг. по высотѣ $h=160$ и суммѣ основанія и стороны $b+a=m=2392$?

80. Площ. равнобедр. треуг. $s=66000$; а сумма высоты и основанія $b+h=m=820$; опредѣлить сторону a, основаніе и высоту треуг.?

81. Площ. треуг. $=s=148$; одна изъ сторонъ его$=a=6$; соотвѣтствующая сторона подобнаго ему треуг. $a_1=9$; опредѣлить площ. втораго треуг.?

82. Рѣшить предъид. зад. при $a=18,2$; $a_1=9,8$; $s=84,5$?

83. Отношеніе площадей двухъ подобныхъ треуг.$={}^{16}/_{9}$; стороны меньшаго треуг. суть 8; 6 и 5 арш. Опредѣлить стороны бо́льшаго?

84. Опредѣлить площ. треуг., котораго основаніе $b=12$ саж. 4 ф., одна изъ сторонъ $a=9$ саж. 2 ф.; отрѣзокъ p основанія, образуемый высотой и прилежащій къ a, равенъ 5 с. 4 ф.?

85. Треуг. ABC имѣетъ стороны 55 саж. 4,2 фут.; 69 саж. 3,5 ф.; 41 саж. 4,9 фут.; треуг. $A_1B_1C_1 \infty ABC$; площ. $A_1B_1C_1=s_1=42$ кв. саж. 40,14 кв. ф. Опредѣлить стороны треуг. $A_1B_1C_1$?

86. Два треуг. имѣютъ по равному углу; стороны, заключающія эти углы, въ одномъ треуг суть $a=17,6$ и $b=13,2$; въ другомъ $a_1=8,4$ и $b_1=11,2$. Площ. перваго треуг.$=s=116,16$; опредѣлить площ. втораго треуг.?

87. Опредѣлить площ. четыреугольника по сторонамъ $a=14$, $b=15$, $c=21$, $d=20$ и діагонали $e=13$?

88. Рѣшить пред. зад., при $a=64$, $b=70$, $c=81$, $d=69$, $e=76$?

89. Периметръ прямоугольника $=2p=412$, а площадь его$=s=10528$; опредѣлить его стороны a и b?

90. Діагональ прямоугольника $e=40,7$; а площ. его $s=508,2$; опредѣлить его стороны a и b?

91. Опредѣлить діагонали e и f ромба по его сторонѣ $a=40,7$ и площади $s=1016,4$?

92. Опредѣлить площ. трапеціи по ея сторонамъ a, b, c, d, полагая $b \parallel d$ и $d > b$?

93. Опредѣлить площ. четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, по его сторонамъ a, b, c, d?

94. По сторонамъ a, b, c треугольника опредѣлить радіусъ r внутренняго вписаннаго круга и радіусы внѣшнихъ вписанныхъ круговъ r_a, r_b, r_c?

95. По сторонамъ a, b, c треугольника опредѣлить радіусъ R описаннаго круга?

96. Опредѣлить высоту h треугольника по радіусу r внутренняго вписаннаго круга и радіусу r_b внѣшняго вписаннаго круга, касательнаго къ основанію b треугольника?

97. Опредѣлить высоту h треугольника по радіусамъ r_b и r_c внѣшнихъ вписан. круговъ, касательныхъ къ сторонамъ b и c треуг.?

98. Въ треуг. ABC вписанъ прямоугольникъ $DEFG$, котораго основаніе DG совпадаетъ съ основаніемъ BC треуг. ABC. Въ какомъ отношеніи находится площадь прямоугольника къ площ. треуг., если сторона EF прямоугольника, параллельная BC, дѣлитъ остальныя двѣ стороны треуг. въ отношеніи $m:n$?

99. Въ треуг. ABC изъ точки D на сторонѣ AB проведены $DE \parallel BC$ и $DF \parallel AC$. Въ какомъ отношеніи къ площ. ABC находятся части, на которыя раздѣлился треуг. ABC, если точка D дѣлитъ сторону AB въ отношеніи $m:n$?

100. Въ треуг. ABC отъ вершинъ A и B на сторонѣ $AB=c$ отложены части $AD=BE=m$ и изъ точекъ D и E проведены параллели къ BC. Въ какомъ отношеніи къ площ. ABC находится площ. образованной этими параллелями трапеціи?

101. На сторонахъ треуг. ABC даны точки D, E, F, которыя стороны треуг. a, b, c дѣлятъ соотвѣтственно на отрѣзки a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Опредѣлить отношеніе треуг. DEF къ треуг. ABC?

102. Рѣшить предъид. зад., когда D и E лежатъ на сторонахъ BC и AC, а F на продолженіи AB за точку B? Когда D лежитъ на сторонѣ, а E и F на продолженіяхъ сторонъ? Когда всѣ точки D, E и F лежатъ на продолженіяхъ сторонъ треуг. ABC?

103. Опредѣлить отношеніе площ. треуг. DEF къ площ. треуг. ABC, когда точки D, E, F поставлены на сторонахъ c, b, a треуг. ABC такъ, что каждая сторона продолжена на свою длину?

104. Ко всѣмъ сторонамъ треуг. ABC проведены параллели такъ, что каждая изъ нихъ дѣлитъ двѣ остальныя въ отношеніи $m:n$, причемъ $\frac{m}{n} > 2$. Въ какомъ отношеніи къ данному треуг. находятся части, на которыя онъ раздѣлился?

105. Опредѣлить площ. треуг. по его высотамъ h_a, h_b, h_c?

106. Линіи, соединяющія вершины треуг. съ срединами противолежащихъ сторонъ, суть m_a, m_b, m_c; опредѣлить площ. треуг.?

107. Опредѣлить площ. треуг. по радіусу r внутренняго вписаннаго круга и радіусамъ r_a, r_b, r_c внѣшнихъ вписан. круговъ?

108. Опредѣлить площ. прав. n—угольника по его сторонѣ a и радіусу r описаннаго круга?

109. По радіусу r описаннаго круга опредѣлить площ. прав. треуг.? квадрата? прав. 6—ка? прав. 10—ка?

110. По сторонѣ a опредѣлить площ. прав. треуг.? квадрата? прав. 6—ка? прав. 10—ка?

111. По данной площ. s опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около прав. треуг.? около квадрата? около прав. 6—ка? около прав. 10—ка?

112. По данной площ. s опредѣлить сторону прав. треуг.? квадрата? прав. 6—ка? прав. 10—ка?

113. По радіусу r опис. круга опредѣлить площ. прав. 8—ка? прав. 12—ка?

114. По апоѳемѣ a опредѣлить площ. прав. треуг.? квадрата? прав. 6—ка? прав. 10—ка?

115. Въ треуг. ABC, въ которомъ $AB=c=18$, провести $DE \parallel BC$ такъ, чтобы отношеніе площ. треуг. ADE къ площ. $ABC=n={}^1/_4$?

116. Рѣшить предъид. зад. при $c=36$, $n=^3/_8$?

117. Рѣшить зад. 115 при $c=4,5$; $n=5$?

118. Треуг. ABC раздѣлить прямыми DE и FG, параллельными BC, на части, которыя находились бы въ отношеніи $m : n : p$? Сдѣлать вычисленіе, когда $AB=c=300$, $m:n:p=1:1:1$?

119. Рѣшить зад. 118, полагая $c=12,6$; $m:n:p=1:2:3$?

120. Въ треуг. ABC сторона $BC=a=24$; сторона $AB=c=30$; высота h_a, опущенная на a, равна 27. Провести въ треуг. ABC прямую $DE \parallel BC$ такъ, чтобы площ. треуг. $ADE=s_1=169$?

121. Рѣшить предъид. зад., если стороны треуг. ABC суть $a=$ $=23,05$; $b=20,44$; $c=17,81$; а $s_1=80,2816$?

122. На сторонѣ AB треуг. ABC дана точка D. Провести прямую DF такъ, чтобы часть треуг., прилежащая къ AD, относилась къ остальной части какъ $m:n$? Сдѣлать вычисленіе, когда $a=412$; $b=500$; $c=372$; $AD=200$; $m:n=1:1$?

123. Рѣшить предъид. зад., полагая $a=24$; $b=36$; $c=40$; $AD=15$; $m:n=1:2$?

124. Изъ точки D на сторонѣ AB треуг. ABC провести прямую DE такъ, чтобы она образовала со сторонами AC и BC треугольникъ, площадь котораго равна s_1? Сдѣлать вычисленіе, когда $b=24$, $c=30$, $h_b=20$, $AD=28$, $s_1=100$?

125. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=180$; $c=70$; $h_c=96$; $AD=21$; $s_1=560$?

126. Рѣшить зад. 124, полагая $a=210$; $c=160$; $h_c=120$; $AD=21$; $s_1=3000$?

127. Въ треуг. ABC изъ вершины B проведена прямая BD, пересѣкающая сторону AC въ точкѣ D; параллельно BD проведены прямыя EF и GH, которыя дѣлятъ треуг. въ отношеніи $m:n:p$. Опредѣлить разстоянія AF и CH, если $b=45$; $AD=25$; $m:n:p=1:1:1$?

128. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=45$; $AD=20$; $m:n:p=$ $=2:6:7$?

129. Рѣшить зад. 127, полагая $b=200$; $AD=160$; $m:n:p=1:2:3$?

130. Въ треуг. ABC проведены перпендикулярно къ BC прямыя EF и GH, дѣлящія треуг. отъ вершины B на части въ отношеніи $m:n:p$. Опредѣлить BF и CH, если $a=355$; $b=284$; $c=213$; $m:n:p=1:1:1$?

131. Рѣшить предъид. зад., полагая $a=30,6$; $b=42,8$; $c=48,9$; $m:n:p=1:1:2$?

132. Въ параллелограммѣ $ABCD$ изъ вершины A проведена прямая AE, дѣлящая его въ отношеніи $m:n$; опредѣлить BE, если $AB=a=236$; $AD=b=408$; $m:n=2:3$?

133. Въ параллелограммѣ $ABCD$ изъ вершины A проведены прямыя AE и AF, дѣлящія его въ отношеніи $m:n:p$. Опредѣлить BE и DF, если $AB=a=427$; $AD=b=315$; $m:n:p=1:3:3$?

134. Въ параллелограммѣ $ABCD$ на сторонѣ $AD=b$ дана точка P въ разстояніи $AP=c$ отъ вершины A; изъ P проведена прямая PE, пересѣкающая сторону BC и дѣлящая параллелограммъ въ отношеніи $m:n$. Опредѣлить BE, если $AD=b=412$; $c=108$; $m:n=2:3$?

135. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=176^2/_3$; $c=80$; $m:n=3:5$?

136. Изъ точки P на сторонѣ AD параллелограмма $ABCD$ проведена къ сторонѣ BC прямая PE такъ, что часть площади параллелограмма, прилежащая къ линіи AP, равна s_1. Опредѣлить BE, если $AB=b=412$; $h=80$; $AP=c=100$; $s_1=12000$?

137. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=125,6$; $h=49,5$; $c=65,4$; $s_1=3000$?

138. Изъ точекъ P и P_1 на сторонѣ AD параллелограмма $ABCD$ проведены линіи PE и P_1F къ сторонѣ BC, такъ что часть площади параллелограмма, прилежащая къ AP, относится къ послѣдующимъ частямъ какъ $m:n:p$. Опредѣлить BE и CF, если $AD=b=60$; $AP=c=12$; $P_1D=d=20$; $m:n:p=2:3:5$?

139. Рѣшить предъид. зад., полагая $b=120,3$; $c=40,6$; $d=20,3$; $m:n:p=3:4:5$?

140. Трапеція $ABCD$ раздѣлена линіей $EF \parallel AB$ на параллелограммъ $ABEF$ и трапецію $FECD$, площади которыхъ относятся какъ $m:n$. Опредѣлить BE, если $BC=d=70$; $AD=b=110$; $m:n=2:3$?

141. Рѣшить предъид. зад., полагая $d=81,9$; $b=123,9$; $m:n=4:5$?

142. Трапеція $ABCD$ линіями EF и GH, параллельными AB, раздѣлена такъ, что часть ея площади, прилежащая къ AB, относится къ слѣдующимъ частямъ какъ $m:n:p$ Опредѣлить BE и EG, если $BC=d=200$; $AD=b=240$; $m:n:p=3:4:8$?

143. Рѣшить предъид. зад., полагая $d=208,2$; $b=315,3$; $m:n:p=2:3:7$?

144. Трапеція $ABCD$ линіей EF, параллельной основанію AD, раздѣлена на части въ отношеніи $m:n$. Опредѣлить EF, если $BC=d=66$; $AD=b=120$; $m:n=1:1$?

145. Рѣшить предъид. зад., полагая $d=84,7$; $b=136,5$; $m:n=1$?

146. Рѣшить зад. 144, если $d=146,5$; $b=208^2/_3$; $m:n=2:3$?

147. Рѣшить зад. 144, полагая $d=248,6$; $b=436,4$; $m:n=1:2$?

148. Рѣшить зад. 144, полагая $d=56,75$; $b=78^2/_3$; $m:n=^3/_4$?

149. Въ трапеціи $ABCD$ проведены линіи EF и GH параллельно основанію, и площ. $BCFE$: площ. $EFHG$: площ. $GHDA=m:n:p$. Опредѣлить EF и HG, если $BC=d=108$; $AD=b=143$; $m:n:p=1:1:2$?

150. Рѣшить предъид. зад., полагая $d=56^3/_4$; $b=91,25$; $m:n:p=1:2:3$?

151. Въ трапеціи линія EF проведена параллельно основанію AD такъ, что площ. $BCFE=s_1$. Опредѣлить EF, если $BC=d=80$; $AD=b=140$; $h=50$; $s_1=4000$?

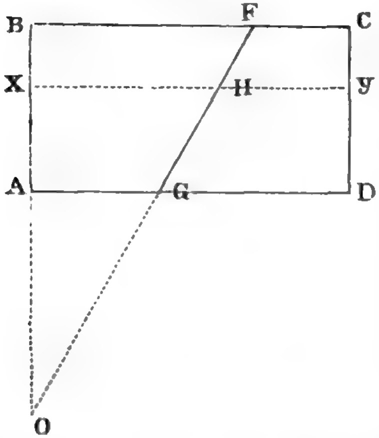
152. Рѣшить предъид. зад., полагая $d=43$; $b=97$; $h=21$; $s_1=490$?

153. Лугъ имѣетъ видъ треуг., котораго основаніе$=24$ саж.; линіей, проведенной изъ вершины треуг. въ средину основанія, этотъ лугъ раздѣленъ на двѣ части; квадратная саж. первой части стоитъ 20 коп., а второй 30 коп. Требуется этотъ лугъ раздѣлить прямою, проведенной изъ вершины, на двѣ части одинакой цѣнности?

154. Поле $ABCD$, имѣющее видъ параллелограмма, состоитъ изъ двухъ параллелограммовъ: $ABFG$, котораго десятина стòитъ 96 руб., и $FGCD$, котораго десятина стòитъ 72 руб. На какомъ разстояніи отъ A, считая по AD, надо провести параллель къ AB, чтобы раз-

дѣлить поле на двѣ части одинакой цѣнности, если $AB=400$ саж., $AD=300$ саж., $AF=200$ саж.?

Чер. 387.



155. Поле, имѣющее видъ прямоуг. $ABCD$ (чер. 387), котораго длина $AD=18$ саж., а ширина $AB=8$ саж., состоитъ изъ двухъ трапецій $ABFG$ и $GFCD$; квадр. саж. земли въ первой трапеціи стоитъ 21 коп., а во второй 7 коп. На какомъ разстояніи x отъ прямой AD надо провести $XУ \parallel AD$, чтобъ раздѣлить поле на два прямоуг. $AXУD$ и $XBCУ$ одинакой стоимости, если $AG=9$, а $BF=12$ саж.?

156. Рѣшить предыд. зад., полагая $AD=36$, $AB=16$, $AG=18$, $BF=32$, если цѣна первой части будетъ 54, а второй 42 коп.?

157. Мѣсто имѣетъ видъ треуг., котораго основаніе$=3{,}6$ саж., а высота$=1{,}2$ саж.; оно раздѣлено линіей, параллельной основанію и отстоящей отъ вершины въ 0,9 саж., на двѣ части разной цѣнности: квадр. саж. треугольной части стоитъ 14 руб., а кв. саж. трапеціи стоитъ 7 руб. Въ какомъ разстояніи отъ вершины надо провести линію, параллельную основанію, чтобы раздѣлить все мѣсто на двѣ части одинакой стоимости?

158. Треугольное мѣсто, имѣющее основаніе 16,375 саж., а высоту 14,25 саж., раздѣлено линіей, параллельной основанію и отстоящей въ 6,65 саж. отъ вершины, на двѣ части разной цѣнности: 1 кв. саж. треугольной части стоитъ 1,855 руб., а 1 кв. саж. трапеціи 2,12 руб. Въ какомъ разстояніи отъ вершины надо провести линію, параллельную основанію, чтобъ раздѣлить все мѣсто на двѣ части одинакой стоимости?

159. Поле, имѣющее видъ трапеціи, которой параллельныя стороны равны 20 саж. и 12 саж., а высота$=16$ саж., раздѣлено діагональю на два треуг. разной цѣнности; кв. саж. бо̀льшаго треуг. стоитъ 6 коп., а меньшаго 8 коп. На какомъ разстояніи отъ меньшей стороны надо провести параллель къ основаніямъ, чтобы раздѣлить все поле на двѣ части одинакой стоимости?

160. Участокъ земли въ городѣ имѣетъ видъ трапеціи, параллельныя стороны которой 84 и 52 саж., а высота 16 саж.; линіей, проведенной изъ конца меньшаго основанія параллельно одной изъ непараллельныхъ сторонъ, этотъ участокъ раздѣленъ на двѣ части: кв. саж. земли въ той части, которая имѣетъ видъ треуг., сто̀итъ 13 руб.; а въ части, имѣющей видъ параллелограмма, кв. саж. стоитъ $3^1/_2$ руб. На какомъ разстояніи отъ меньшей изъ параллельныхъ сторонъ надо провести параллель къ ней, чтобы раздѣлить трапецію на двѣ части одинакой стоимости?

299. Доказать теоремы:

1. Прямоугольникъ, имѣющій основаніемъ гипотенузу, а высотой высоту прямоуг. треуг., равновеликъ прямоугольнику, построенному на катетахъ (Доказать, не пользуясь выраженіемъ площ треуг. и площ. прямоуг.).

2. Прямоуг., имѣющій съ даннымъ треуг. общее основаніе и высоту, равновеликъ параллелограмму, имѣющему съ тѣмъ же треуг. общія стороны и уголъ между ними.

3. Два равнобедр. треуг. равновелики, если имѣютъ по равной сторонѣ и если высота одного равна $^1/_2$ основанія другаго (Доказать безъ помощи выраженія площ. треуг.).

4. Два треуг. равновелики, если имѣютъ по двѣ равныхъ стороны, и если углы, заключенные между этими сторонами, дополняютъ другъ друга до 180° (Доказать безъ помощи выраженія площ. треуг.).

5. Изъ всѣхъ треуг., имѣющихъ по двѣ равныхъ стороны a и b, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго уголъ между этими сторонами прямой.

6. Периметръ равнобедр. треуг. больше периметра прям—ка, имѣющаго съ нимъ одинакую высоту и равную площадь.

7. Изъ всѣхъ треуг. съ общимъ основаніемъ и одинакимъ угломъ при вершинѣ наибольшую площадь имѣетъ равнобедренный.

8. Изъ всѣхъ треуг. съ общимъ основаніемъ и одинакимъ угломъ при вершинѣ наибольшій периметръ имѣетъ треуг. равнобедренный.

9. Изъ всѣхъ треуг., которые образуютъ стороны даннаго угла съ прямыми, проходящими черезъ точку, данную на линіи, дѣлящей этотъ уголъ пополамъ, равнобедренный треуг. имѣетъ наименьшую площадь.

10. Изъ всѣхъ равновеликихъ треуг., имѣющихъ общее основаніе, треуг. равнобедренный имѣетъ периметръ наименьшій.

11. Изъ всѣхъ равновеликихъ треуг. наименьшій периметръ имѣетъ треуг. равносторонній.

12. Изъ всѣхъ треуг. равнаго периметра, имѣющихъ общее основаніе, равнобедр. треуг. имѣетъ площадь наибольшую.

13. Изъ всѣхъ треуг., имѣющихъ одинакую высоту и одинакій уг. при вершинѣ, наименьшую площадь имѣетъ треуг. равнобедренный.

14. Два треуг., построенные на одномъ и томъ же основаніи по разныя его стороны, будутъ равновелики, если линія, соединяющая ихъ вершины, дѣлится основаніемъ пополамъ.

15. Два треуг. равны, если имѣютъ равныя площади и по два равныхъ угла.

16. Два треуг. равны, если они имѣютъ равныя площади, по равной сторонѣ и по равному, прилежащему къ этой сторонѣ, углу.

17. Два треуг. равны, если имѣютъ равныя площади, по двѣ равныхъ стороны и если заключенные между этими сторонами углы будутъ одного рода.

18. Если на отрѣзкахъ высотъ треуг—ка построить прямоугольники, то эти прямоугольники будутъ равновелики.

19. Изъ всѣхъ параллелограммовъ, имѣющихъ общее основаніе и одинакую высоту, прямоугольникъ имѣетъ периметръ наименьшій.

20. Если квадратъ и прямоугольникъ имѣютъ одинакій периметръ, то площ. квадрата больше площ. прямоуг. на площадь квадрата, построеннаго на полуразности сторонъ прям—ка.

21. Изъ всѣхъ параллелограммовъ одинакаго периметра наибольшую площадь имѣетъ квадратъ.

22. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ неравныхъ прямыхъ, больше удвоенной площади прямоуг., построеннаго на тѣхъ же линіяхъ; а квадратъ, построенный на суммѣ этихъ линій, больше учетвереннаго прямоуг., построеннаго на нихъ же.

23. Изъ всѣхъ равновеликихъ прямоуг. наименьшій периметръ имѣетъ квадратъ.

24. Прямая, соединяющая средины параллельныхъ сторонъ трапеціи, дѣлитъ трапецію на двѣ равновеликія части.

25. Если обѣ параллельныя стороны трапеціи раздѣлить на одинакое число равныхъ частей и соотвѣтствующія точки дѣленія соединить прямыми линіями, то трапеція раздѣлится на равновеликія части.

26. Если на линіи, соединяющей средины параллельныхъ сторонъ трапеціи, взять произвольную точку и соединить ее съ вершинами трапеціи, то треугольники, имѣющіе основаніями непараллельныя стороны трапеціи, будутъ равновелики.

27. Если средину одной изъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи соединить съ конечными точками противоположной стороны, то образовавшійся отъ этого треуг. будетъ $=\frac{1}{2}$ трапеціи.

28. Если среднюю линію трапеціи раздѣлить на n равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія провести параллельныя между собой линіи до пересѣченія съ параллельными сторонами трапеціи, то трапеція раздѣлится на n равновеликихъ частей.

29. Вывести выраженіе площади трапеціи, разсматривая ее какъ разность площадей двухъ треуг—въ, которые получатся отъ продолженія непараллелльныхъ сторонъ трапеціи до ихъ пересѣченія.

30. Если средину діагонали четыреугольника соединить съ противолежащими ей вершинами, то четыреугольникъ этими линіями раздѣлится на двѣ равновеликія части.

31. Если соединить прямыми линіями средины каждыхъ двухъ прилежащихъ сторонъ четыреугольника, то образуется параллелограммъ, котораго площадь $=\frac{1}{2}$ площади 4-ка.

32. Два многоугольника равновелики, если периметры ихъ разсѣкаются прямыми, параллельными какой либо опредѣленной линіи, такъ, что отрѣзки каждой параллели, заключенные внутри многоугольниковъ, соотвѣтственно равны.

33. Во всякомъ равностороннемъ многоуг-кѣ сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны изъ точки, находящейся внутри мнег-ка, есть величина постоянная (т. е. равна суммѣ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ всякой другой внутренней точки).

34. Площ. прав. впис. въ кругъ 6-ка вдвое больше площ. прав. впис. 3-ка.

35. Доказать построеніемъ формулу $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+$ $+2ac+2bc$.

36. Если въ двухъ прямоуг. треуг. суммы катетовъ равны, а раз-

ности ихъ не равны, то большей разности катетовъ соотвѣтствуетъ бòльшая гипотенуза.

37. Если изъ точки, взятой на гипотенузѣ равнобедр. прямоуг. треуг., провести параллели къ обоимъ катетамъ, то образовавшійся отъ этого прямоугольникъ будетъ имѣть наибольшую площадь тогда, когда точка будетъ взята на срединѣ гипотенузы.

38. Если два прямоугольника имѣютъ одинакій периметръ, но разныя площади, то въ большемъ прям-кѣ діагональ меньше, чѣмъ въ другомъ.

39. Сумма квадратовъ, построенныхъ на діагоналяхъ трапеціи, равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на непараллельныхъ сторонахъ, сложенной съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, построеннымъ изъ параллельныхъ сторонъ.

40. Изъ всѣхъ многоугольниковъ одинакаго числа сторонъ и равнаго периметра наибольшую площадь имѣетъ равносторонній.

41. Изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ одинакаго периметра наибольшую площадь имѣетъ многоуг. правильный.

42. Изъ всѣхъ равновеликихъ одноименныхъ многоугольниковъ наименьшій периметръ имѣетъ многоуг. правильный.

43. Изъ двухъ правильныхъ многоуг. равнаго периметра бòльшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго больше сторонъ.

44. Изъ двухъ равновеликихъ прав. многоугольниковъ тотъ имѣетъ меньшій периметръ, у котораго больше сторонъ.

45. Изъ всѣхъ одноименныхъ мног-въ, вписанныхъ въ одинъ кругъ, наибольшую площадь и наибольшій периметръ имѣетъ многоуг. правильный.

46. Изъ двухъ правильныхъ многоуг., вписанныхъ въ кругъ, бòльшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго больше сторонъ.

47. Изъ двухъ правильныхъ многоуг., вписанныхъ въ кругъ, бòльшій периметръ имѣетъ тотъ, у котораго больше сторонъ.

48. Изъ всѣхъ одноименныхъ многоуг., описанныхъ около одного круга, наименьшій периметръ и наименьшую площадь имѣетъ многоуг. правильный.

49. Изъ двухъ прав. многоуг., описанныхъ около круга, меньшую площадь и меньшій периметръ имѣетъ тотъ, у котораго больше сторонъ.

300. Задачи на построеніе. 1. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему треугольн. такъ, чтобы одна изъ сторонъ послѣдняго равнялась BC, а другая была $=$данной прямой b_1?

2. Треуг. ABC, у котораго основаніе BC, а высота AD, превратить въ равновеликій ему треугол. такъ, чтобы одна изъ сторонъ послѣдняго$=$сторонѣ AC даннаго треуг., а высота$=$данной прямой h_1?

3. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему треуг. такъ, чтобы основаніе послѣдняго$=a_1$, а уг. при основаніи$=$уг. B даннаго треугольн.?

4. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему треуг. такъ, чтобы высота искомаго$=h_1$, а уг. при основаніи$=$уг. B даннаго треуг.?

5. Вершину A даннаго треуг. ABC перемѣстить въ точку M, находящуюся по ту же сторону BC, какъ и вершина A, такъ, чтобы

площадь полученнаго треуг. была равна площ. даннаго, основаніе совпадало съ линіей основанія даннаго и имѣло бы съ нимъ общую конечную точку?

6. Построить треуг., равновеликій суммѣ данныхъ треуг. одинакой высоты? разности двухъ такихъ треуг.?

7. Построить треуг. такъ, чтобы основаніе его$=a$ и онъ былъ равновеликъ суммѣ данныхъ треуг.? разности двухъ треуг.?

8. Треуг. ABC превратить въ равнобедренный, основаніе котораго равнялось бы одной изъ сторонъ даннаго?

9. Треуг. ABC превратить въ равнобедр., котораго сторона равнялась бы одной изъ сторонъ даннаго?

10. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему, котораго основаніе равнялось бы a_1, а уг. при немъ$=B_1$?

11. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему, котораго основаніе$=a_1$, а сторона$=b_1$?

12. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему, котораго высота$=h_1$, а сторона$=b_1$?

13. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему. котораго высота$=h_1$, а уг. при основаніи$=B_1$?

14. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему треуг. такъ, чтобы вершина этого послѣдняго была въ точкѣ O, лежащей по ту же сторону отъ BC, какъ и A, чтобы основаніе совпадало съ основаніемъ BC даннаго треуг., а одна изъ сторонъ проходила бы черезъ точку D, находящуюся на сторонѣ BC ?

15. Треугол. ABC превратить въ равнобедр., такъ чтобы уг. A былъ угломъ при вершинѣ равнобедр. треуг.?

16. Треуг. ABC превратить въ равновеликій ему треуг. такъ, чтобы уг. A остался безъ измѣненія, а основаніе пошло параллельно данной прямой MN ?

17 Данный треуг. обратить въ равновеликій ему треуг. такъ, чтобы периметръ этого послѣдняго$=2p$, а одинъ изъ угловъ$=$уг. A?

18. Треуг. ABC превратить въ другой, который былъ бы подобенъ данному треуг. MON?

19. Параллелограммъ $ABCD$ обратить въ равновеликій ему параллелогр. такъ, чтобы сторона AB осталась безъ перемѣны, а другая сторона$=$данной прямой m ?

20. Параллелогр. $ABCD$ превратить въ другой параллелогр. такъ, чтобы сторона AB осталась безъ перемѣны, а одинъ уголъ$=$уг. n?

21. Параллелогр. $ABCD$ превратить въ другой такъ, чтобы углы остались безъ перемѣны, а одна сторона$=m$?

22. Параллелогр. $ABCD$ превратить въ другой такъ, чтобы одинъ уголъ не измѣнился, а высота$=h_1$?

23. Построить параллеграммъ, котораго основаніе$=$данной прямой a, а площадь$=$суммѣ площадей данныхъ параллелограммовъ? разности площ. двухъ данныхъ параллелогр.?

24. Данный параллелограммъ превратить въ равновеликій треуг.?

25. Данный параллелограммъ превратить въ ромбъ такъ, чтобы одна изъ сторонъ параллелограмма$=$діагонали ромба?

26. Построить квадратъ, равновеликій $^1/_3$ даннаго квадрата? $^2/_3$ даннаго квадрата?

27. Данный квадратъ обратить въ прямоугольникъ, котораго діагональ$=$прямой m ?

28. Трапецію превратить въ параллелограммъ такъ, чтобы одна изъ непараллельныхъ сторонъ и углы, къ ней прилежащіе, сдѣлались стороной и углами параллелограмма?

29. Трапецію превратить въ параллелограммъ такъ, чтобы одинъ уголъ его$=$углу трапеціи и одна изъ сторонъ его$=$одной изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи?

30. Данный квадратъ m^2 превратить въ прямоугольникъ, периметръ котораго$=2p$?

31. Данный прямоугольникъ обратить въ другой, котораго периметръ$=2p$?

32. Черезъ точку O, лежащую на прямой линіи, дѣлящей пополамъ прямой уголъ BAC, провести прямую такъ, чтобы она со сторонами угла составила треуг., равновеликій данному квадрату m^2? (Рѣшить помощью уравненія).

33. Рѣшить предъидущ. зад., полагая, что уг. BAC не прямой?

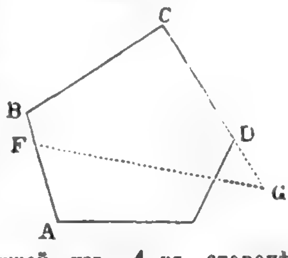
34. Черезъ точку O, данную внутри прямаго угла BAC, провести прямую такъ, чтобы она со сторонами угла образовала треуг., равновеликій данному квадрату m^2?

35. Чрезъ точку O, данную между сторонами угла BAC, провести прямую такъ, чтобы прямоугольникъ, построенный на отрѣзкахъ ея, заключенныхъ между точкой O и сторонами угла, былъ равновеликъ данному квадрату?

36. Между сторонами угла BAC провести прямую данной длины l, притомъ такъ, чтобы она съ сторонами угла образовала треуг., равновеликій данному квадрату m^2?

37. Въ многоуг. $ABCDE$ (чер. 388) изъ точки F на сторонѣ AB проведена прямая FG, пересѣкающая въ точкѣ G продолженіе стороны CD. Найти на периметрѣ многоуг. такую точку H, чтобы площ. $FBCG$ равнялась площ. $FBCDH$?

Чер. 388.



38 Данный треуг. раздѣлить на n равновеликихъ частей прямыми, проходящими черезъ одну изъ вершинъ?

39. Данный треуг. ABC раздѣлить на 3 равновеликія части ломаной линіей, идущей изъ A къ сторонѣ BC и отъ стороны BC къ сторонѣ AC?

40. Данный треуг. ABC раздѣлить на n равновеликихъ частей ломаной линіей, идущей изъ A къ сторонѣ BC, отъ стороны BC къ AC, отъ AC опять къ BC и т. д.?

41. Внутри треуг. ABC найти такую точку, чтобы прямыя линіи, проведенныя изъ нея къ вершинамъ треуг., дѣлили его на три равновеликія части?

42. Въ треуг. ABC черезъ вершину C проведена прямая CY и на ней дана точка M по туже сторону отъ BC, какъ и A; опредѣлить на сторонѣ BC такую точку N, чтобы площ. $CMN=$ $=\frac{1}{2}$ площ. ABC ?

43. Треуг. ABC раздѣлить на двѣ равновеликія части прямой, проведенной изъ точки O, данной на сторонѣ BC ?

44. Раздѣлить треуг. ABC на n равновеликихъ частей прямыми, проведенными изъ точки O стороны BC ?

45. На сторонѣ AB треуг. ABC дана точка D; провести черезъ эту точку прямую линію такъ, чтобы она отсѣкла отъ ABC треугольникъ, равновеликій данному треуг. EFG ?

46. На сторонахъ треуг. ABC даны точки M и N; раздѣлить треуг. на три равновеликія части прямыми, проходящими черезъ эти точки ?

47. Треуг. ABC раздѣлить въ отношеніи $m : n$ линіей, проходящей черезъ вершину A ?

48. Треуг. ABC раздѣлить въ отношеніи $m : n$ линіей, проходящей черезъ точку M, данную на сторонѣ AB ?

49. Внутри треуг. ABC опредѣлить такую точку O, чтобы линіи, соединяющія ее съ вершинами треуг., дѣлили его на три части, находящіяся въ отношеніи $m : n : p$?

50. Изъ точки M, данной на сторонѣ AB треуг. ABC, провести двѣ прямыя, дѣлящія треуг. на части въ отношеніи $m : n : p$?

51. Изъ точекъ M и N, данныхъ на сторонѣ AB треуг. ABC, провести двѣ прямыя, дѣлящія треуг. на части въ отношеніи $m:n:p$?

52. Въ треуг. ABC на сторонѣ AB дана точка M; требуется на AC опредѣлить такую точку X, чтобы отношеніе площадей треугольниковъ AMX и BCX равнялось $m : n$?

53. Треуг. ABC раздѣлить на двѣ равновеликія части прямой, параллельной BC ?

54. Треуг. ABC раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, параллельными BC ?

55. Раздѣлить треуг. ABC въ отношеніи $m : n$ прямою $\parallel BC$?

56. Раздѣлить треуг. ABC на двѣ равновеликія части прямой, параллельной данной линіи MN ?

57. Раздѣлить треуг. ABC на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными данной линіи MN ?

58. Раздѣлить треуг. ABC въ отношеніи $m : n$ прямой, параллельной данной линіи MN ?

59. Раздѣлить треуг. ABC въ отношеніи $m : n : p$ двумя прямыми, изъ коихъ одна параллельна данной прямой MN, а другая параллельна данной прямой PQ ?

60. Раздѣлить треуг. ABC на двѣ равновеликія части прямой, перпендикулярной къ сторонѣ BC ?

61. Раздѣлить треуг. ABC на три равновеликія части двумя прямыми, изъ коихъ одна параллельна, а другая перпендикулярна къ BC?

62. Раздѣлить треуг. ABC на три равновеликія части такъ, чтобы одна изъ дѣлящихъ прямыхъ была параллельна BC, а другая выходила изъ вершины A ?

63. Параллелограммъ $ABCD$ раздѣлить прямыми, выходящими изъ A, на $2n$ равновеликихъ частей ? на $2n+1$ равновеликихъ частей?

64. Трапецію раздѣлить на n равновеликихъ частей прямыми, пересѣкающими параллельныя стороны?

65. Раздѣлить трапецію на n равновеликихъ частей прямыми линіями, проведенными изъ какой либо ея вершины?

66. Трапецію (или параллелограммъ) раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, выходящими изъ точки M, данной на одной изъ параллельныхъ сторонъ?

67. Трапецію раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, выходящими изъ точки пересѣченія непараллельныхъ сторонъ ея?

68. Трапецію (или параллелограммъ) раздѣлить на n равновеликихъ частей ломаной линіей, выходящей изъ вершины и идущей къ одной изъ параллельныхъ сторонъ, отъ нея къ другой, отъ другой опять къ первой и т. д?

69. Многоуг. $ABCDE$ превратить въ треуг., вершина котораго была бы въ точкѣ O на сторонѣ AB, а основаніе на одной прямой съ CD?

70. Четыреуг. $ABCD$ раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, выходящими изъ вершины A?

71. Четыреуг. $ABCD$ раздѣлять на n равновеликихъ частей линіями, выходящими изъ точки O на сторонѣ AB?

72. Отъ многоуг. $ABCDE$ отсѣчь часть, равновеликую данному треуг. KLM?

73. Въ многоуг. $ABCDE$ проведена ломаная линія, дѣлящая его на двѣ части; замѣнить ломаную линію прямой, дѣлящей многоуг. на такія же по величинѣ части?

74. Данный многоуг. $ABCDE$ раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, проведенными изъ вершины A?

75. Данный многоуг. раздѣлить на n равновеликихъ частей линіями, проведенными изъ точки O на сторонѣ AB?

76. Данный четыреуг. раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, выходящей изъ его вершины?

77. Данный многоуг. раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, выходящей изъ его вершины?

78. Параллелограммъ $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной одной изъ сторонъ его?

79. Трапецію раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, выходящей изъ точки пересѣченія непараллельныхъ сторонъ?

80. Четыреуг. $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, выходящей изъ точки O на сторонѣ AB?

81. Многоуг. раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, выходящей изъ точки, взятой на его периметрѣ?

82. Параллелограммъ $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, проходящей черезъ данную точку M?

83. Параллелограммъ $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной прямой MN?

84. Трапецію $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, проходящей черезъ внѣшнюю точку M и пересѣкающей параллельныя стороны?

85. Трапецію раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной одной изъ непараллельныхъ сторонъ?

86. Трапецію раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной данной прямой MN?

87. Трапецію раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной ея основаніямъ?

88. Многоуг. $ABCDE$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$, такъ чтобы одна изъ полученныхъ частей была подобна цѣлому многоугольнику?

89. Многоуг. $ABCDE$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной данной прямой MN?

90. Четыреуг. $ABCD$ обратить въ равновеликую ему трапецію, такъ чтобы сторона BC и углы B и C были стороной и углами трапеціи?

91. Четыреуг. $ABCD$ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ линіей, параллельной сторонѣ BC?

92. Треуг. ABC обратить въ равновеликую ему трапецію $BCED$, такъ чтобы BC была большей изъ параллельныхъ сторонъ, уг. при B остался бы безъ перемѣны, а уг. при C былъ бы равенъ m?

93. Треуг. ABC раздѣлить на 4 равновеликія части такъ, чтобы одна изъ дѣлящихъ линій была параллельна сторонѣ BC, а двѣ другія были заключены между первой линіей и стороной BC?

94. Внутри треуг. ABC найти такую точку O, что если изъ нея проведемъ линію въ A и параллели къ AB и AC, то эти три линіи раздѣлятъ треуг. на три равновеликія части?

95. Въ треуг. ABC вписать прямоугольникъ, равновеликій квадрату, котораго сторона есть m?

96. Построить треуг. по его высотамъ?

97. Ломаная линія bcd разграничиваетъ двѣ фигуры $abcd$ и $Abcd$; замѣнить эту ломаную прямой, параллельной данной прямой MN?

98. Построить треуг. по сторонѣ a, противолежащему углу A и площади m^2?

99. Построить прав. 6—къ, площадь котораго была бы средней пропорціональной между площадями квадратовъ a^2 и b^2?

100. Въ трапеціи $ABCD$ провести параллель ML къ непараллельной сторонѣ CD такъ, чтобы она отъ треугольниковъ ABD и BCD, образованныхъ діагональю BD, отсѣкла два равновеликихъ четыреугольника?

101. Построить прямоугольникъ по периметру $2p$ и площади m^2?

102. Въ равносторонній треуг. ABC вписать другой равносторонній треуг., вдвое меньшій по площади?

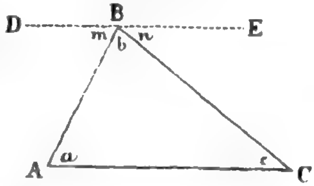
103. Въ треуг. ABC провести прямую MN между сторонами AB и AC такъ, чтобы обѣ части, на которыя раздѣлятся треуг., были равновелики и имѣли одинакій периметръ?

ГЛАВА X.

Способы геометрическихъ доказательствъ.

301. Всѣ, изложенныя до сихъ поръ, теоремы геометріи были доказаны тѣмъ методомъ, основныя черты котораго мы указали еще въ самомъ началѣ курса, и который употребляется вообще въ математикѣ и потому наз. *математическимъ*; его называютъ также методомъ *умозрительнымъ* въ отличіе отъ способовъ изслѣдованія въ наукахъ опытныхъ. При доказательствѣ различныхъ теоремъ этотъ методъ можно примѣнять двоякимъ образомъ. Возьмемъ напр. теорему: *сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ*. Для доказательства, что (чер. 389) $a+b+c=2d$, мы изъ B проводимъ $DE \| AC$; тогда $m=a$, $n=c$; но m, b, n суть углы, расположенные по одну сторону прямой DE и имѣющіе общую вершину; а сумма такихъ угловъ, какъ было доказано прежде, равна $2d$; слѣд. и сумма угловъ треуг.$=2d$.

Чер. 389.



При такомъ способѣ доказательства, мы, исходя изъ извѣстной намъ истины (черезъ данную точку можно провести параллель къ данной прямой) и комбинируя ее съ другими, такъ же извѣстными, истинами, постепенно доходимъ до доказательства требуемой теоремы. Такой способъ доказательства наз. *синтезомъ*. Но во многихъ случаяхъ намъ приходилось идти и обратнымъ путемъ: именно, отправляясь отъ истины, которую намъ нужно доказать, мы находили, что для ея доказательства надо прежде доказать еще другую истину; для доказательства этой другой надо доказать третью и т. д. до тѣхъ поръ, пока наконецъ не доходили до какой либо аксіомы или до теоремы, которая была доказана раньше. Прилагая этотъ способъ, наз. *анализомъ*, къ доказательству той же теоремы объ углахъ треугольника, мы должны бы разсуждать такъ: если (чер. 389) сумма угловъ треуг. $a+b+c=2d$, то и сумма угла b треугольника съ уг. m и n, которые получимъ, построивъ при точкѣ B линіи BA уголъ$=a$ и при точкѣ B линіи BC уголъ$=c$, также должна быть равна $2d$; а если $m+b+n=2d$, то линія DBE должна быть прямою. А такъ какъ по построенію уг. $m=a$ и $n=c$, то части линіи DBE, именно DB и BE, должны быть параллельны AC. Слѣд. чтобы доказать, что линія DBE есть прямая, надо доказать, что черезъ точку B можно провести параллельную прямой AC, и притомъ только одну. А такъ какъ эта теорема была доказана раньше, то слѣд. и разсматриваемая теорема справедлива.

302. Математическій способъ доказательства, въ синтетическомъ и аналитическомъ видѣ, употребляется во всѣхъ математическихъ наукахъ—и въ ариѳметикѣ, и въ алгебрѣ, и въ геометріи. Какъ спеціально-геометрическій способъ доказательства, надо указать способъ наложенія, который въ особенности удобно прилагается въ теоремахъ о равенствѣ геометрическихъ протяженій, такъ какъ въ геометріи подъ равенствомъ подразумѣвается совмѣщеніе геометрическихъ протяженій.

303. Во многихъ теоремахъ намъ при доказательствѣ приходилось пользоваться свойствами пропорцій и вообще алгебраическими выкладками. Такой пріемъ въ изслѣдованіи свойствъ геометрическихъ протяженій получилъ сильное развитіе и послужилъ къ основанію особой отрасли геометріи, наз. *аналитической геометріей*.

304. Наконецъ при доказательствахъ теоремъ мы употребляли иногда способъ приведенія къ нелѣпости; этотъ способъ наиболѣе удобно примѣняется къ теоремамъ обратнымъ и противоположнымъ. Мы знаемъ (§ 27), какія теоремы наз. обратными; объяснимъ, какія теоремы наз. противоположными.

305. Возьмемъ теорему: 1) Если двѣ прямыя пересѣкаются третьею и при этомъ сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ$=2d$, то такія прямыя параллельны.

Обратная этой теоремѣ будетъ

2) Если двѣ прямыя параллельны и пересѣчены третьей, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ$=2d$.

Изъ взятой нами прямой теоремы можно составить еще теорему

3) Если двѣ прямыя пересѣкаются третьей и при этомъ сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ *не равна* $2d$, то такія прямыя *не параллельны* (т. е. пересѣкаются). Эта теорема, въ которой изъ отрицанія условій взятой нами 1-й теоремы выводится отрицаніе и ея заключенія, наз. теоремой, *противоположной* первой.

Обративъ 3-ю теорему, получимъ

4) Если двѣ *непараллельныя* прямыя разсѣчены третьей, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ *не равна* $2d$.

Эта теорема будетъ противоположна 2-й.

Вообще, каждая теорема, безъ введенія новыхъ условій, даетъ возможность къ составленію трехъ новыхъ теоремъ.

Въ общемъ видѣ всѣ эти теоремы могутъ быть выражены такъ:

1) *основная теорема*: если существуетъ какое либо свойство (геометрическаго протяженія или вообще величины) A, то существуетъ и свойство B;

2) *обратная*: если существуетъ B, то существуетъ и A;

3) *противоположная*: если не существуетъ A, то не существуетъ и B;

4) *обратная противоположной*: если не существуетъ B, то не существуетъ и A.

Изъ этихъ четырехъ теоремъ необходимо доказать, кромѣ основной, еще обратную или противоположную; двѣ остальныя уже нечего доказывать.

Напр., если доказаны первыя двѣ теоремы, то третья также справедлива; дѣйствительно, B не можетъ существовать, ибо еслибъ B существовало, то по 2-й теоремѣ существовало бы и A. Справедливость 4-й теоремы слѣдуетъ изъ невозможности допустить существованіе A безъ существованія B, такъ какъ это противорѣчило бы 1-й теоремѣ.

306. Иногда бываетъ трудно и даже невозможно открыть свойство какого либо протяженія изъ непосредственнаго его разсмотрѣнія; въ такомъ случаѣ разсматриваютъ сперва протяженія, по своимъ свойствамъ близкія къ данному, но не представляющія такихъ трудностей при изслѣдованіи, и затѣмъ выводы такого изслѣдованія переносятъ и на данное протяженіе. Подобнымъ пріемомъ мы пользовались напр. въ § 115; а именно, узнавъ, чѣмъ измѣряется уголъ, имѣющій вершину внѣ окружности и состоящій изъ двухъ сѣкущихъ, мы могли перейти къ измѣренію угла, состоящаго изъ сѣкущей и касательной. Чтобы такой переносъ свойствъ одного рода протяженій на другой можно было сдѣлать совершенно точно, необходимо ознакомиться съ *теоріей предѣловъ*, главныя основанія которой мы теперь и изложимъ.

307. Величины постоянныя и перемѣнныя. При рѣшеніи какого нибудь вопроса или при доказательствѣ теоремы встрѣчаются величины двухъ родовъ: одни во время всего рѣшенія и всего доказательства не измѣняются, т. е. имѣютъ одно и тоже значеніе —такія величины наз. *постоянными*; другія величины при тѣхъ же обстоятельствахъ измѣняются—это величины *перемѣнныя*. Такъ въ данномъ кругѣ радіусъ и діаметръ суть величины постоянныя, а хорды—перемѣнныя; углы треугольника суть величины перемѣнныя, а сумма ихъ постоянна, и т. под.

308. Перемѣнныя величины въ большей части вопросовъ измѣняются въ зависимости другъ отъ друга; напр. въ данномъ кругѣ хорда и разстояніе ея отъ центра измѣняются такъ, что съ уменьшеніемъ хорды увеличивается ея разстояніе отъ центра—и обратно. Внутренній уг. прав. многоугольника измѣняется въ зависимости отъ числа сторонъ, такъ какъ этотъ уг. $x=\frac{2d(n-2)}{n}$, гдѣ n есть число сторонъ многоугольника.

309. Предѣлъ. Во многихъ случаяхъ перемѣнная величина, постепенно увеличиваясь или уменьшаясь, приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ, такъ что разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, хотя никогда не можетъ обратиться въ нуль, т. е. перемѣнная никогда не можетъ обратиться въ постоянную. Такъ напр. уголъ прав. мног. съ увеличеніемъ числа сторонъ приближается къ $2d$, ибо этотъ уг. $=\frac{2d(n-2)}{n}=2d-\frac{4d}{n}$; а дробь $\frac{4d}{n}$, выражающая разность между $2d$ и уг. x прав. многоуг., при увеличенія числа сторонъ n уменьшается, притомъ такъ, что ее можно сдѣлать меньше всякой произвольной величины, какъ бы ни была мала эта послѣдняя, для чего надо только взять n достаточно большимъ. Въ самомъ дѣлѣ, если напр. хотимъ, чтобы $\frac{4d}{n}$ было меньше $^1/_{1000}d$, то надо взять $n > 4000$; такъ если $n = 5000$, то $\frac{4d}{n} = \frac{4d}{5000} = {}^1/_{1250}d < {}^1/_{1000}d$. Вообще, если хотимъ, чтобы $\frac{4d}{n}$ было меньше $\frac{1}{m}d$, то надо взять $n > 4m$; дѣйствительно, если $n = 4m$, то $\frac{4d}{n} = \frac{4d}{4m} = \frac{1}{m}\ d$; а если $n > 4m$, то $\frac{4d}{n} < \frac{1}{m}d$. Но какъ бы велико мы ни взяли n, всегда $\frac{4d}{n}$ будетъ больше нуля и слѣд. уг. прав. мног-ка никогда не достигнетъ величины $2d$.

Точно также дробь 0,999.... по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ будетъ приближаться къ единицѣ, и разность между этой дробью и единицей можно сдѣлать какъ угодно малою; но въ единицу эта дробь никогда не можетъ обратиться.

Постоянная величина, къ которой приближается перемѣнная такъ, что разность между ними можетъ быть сдѣлана меньше всякой, произвольно взятой, величины, наз. предѣломъ этой перемѣнной величины. Такъ $2d$ есть предѣлъ для угла прав. многоуг.; 1 есть предѣлъ дроби 0,999....

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что одного приближенія перемѣнной величины къ постоянной еще недостаточно для того, чтобы принять постоянную величину за предѣлъ перемѣнной; необходимо еще, чтобы разность между ними могла быть сдѣлана меньше всякой, произвольно взятой, величины. Напр. хотя дробь 0,8999.... и приближается къ единицѣ по мѣрѣ увеличенія числа ея десятичныхъ знаковъ, но единица не будетъ предѣломъ этой дроби, ибо разность между ними не можетъ быть сдѣлана $< 0,1$. Предѣломъ дроби, 0,8999.... будетъ 0,9.

Перемѣнная величина, которой предѣломъ служитъ нуль, наз. безконечно малой; иначе говоря, безконечно малой величиной наз. такая перемѣнная, которая можетъ быть сдѣлана меньше всякой, произвольно взятой, величины; такимъ свойствомъ обладаетъ напр. центральный уг. прав. мног-ка, ибо онъ $= \frac{4d}{n}$, гдѣ n—число сторонъ многоуг.; дробь же $\frac{4d}{n}$, какъ мы видѣли выше, можетъ быть сдѣлана произвольно малою.

310. Теоремы о предѣлахъ. Выведемъ нѣкоторыя, относящіяся къ перемѣннымъ величинамъ и предѣламъ ихъ, теоремы, которыми намъ придется пользоваться въ дальнѣйшемъ изложенiи курса.

Теорема 1. *Сумма и разность безконечно-малыхъ величинъ, произведенiе безконечно-малой величины на конечную, частное отъ дѣленiя безконечно-малой на конечную, конечная степень безконечно малой величины, корень конечной степени изъ безконечно-малой величины суть также величины безконечно-малыя.* Пусть x и y будутъ безконечно малыя величины, а n-конечная; докажемъ, что $x+y$, $x-y$, nx, $\frac{x}{n}$, x^n, $\sqrt[n]{x}$ будуть также безконечно-малыя.

Если x и y меньше какой либо произвольно малой величины k, то и $x+y$ можно сдѣлать меньше той же величины k, для чего надо только взять x и y меньше $^1/_2k$.

Такъ какъ $x-y<x$, то слѣд. если x безконечно-малое, то $x-y$ и подавно безконечно-мало.

Если $x<k$, то nx также можно сдѣлать меньше k, для чего надо только взять $x<\frac{k}{n}$.

Если $x<k$, то чтобы $\frac{x}{n}$ было меньше k, надо взять $x<nk$.

Точно также x^n и $\sqrt[n]{x}$ можно сдѣлать меньше всякой произвольной величины k, взявъ въ первомъ случаѣ $x<\sqrt[n]{k}$, а во второмъ $<k^n$.

Теорема 2. *Если какое нибудь равенство справедливо при всѣхъ соотвѣтствующихъ измѣненiяхъ перемѣнныхъ величинъ, входящихъ въ него, то будетъ справедливо и такое равенство, которое получимъ, если въ предъидущее вмѣсто перемѣнныхъ величинъ подставимъ ихъ предѣлы.* Пусть напр. x и y суть перемѣнныя, a и b—ихъ предѣлы, и пусть справедливо равенство

$$mx+p=ny+q. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Докажемъ, что и $ma+p=nb+q$.

Означимъ разность между перемѣнной x и ея предѣломъ a черезъ α, а разность между y и b черезъ β, такъ что $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, гдѣ α и β могутъ быть положительными или отрицательными, смотря по тому, какъ приближается перемѣнная къ своему предѣлу — уменьшаясь или увеличиваясь; притомъ α и β суть величины безконечно малыя. Тогда урав. (1) приметъ видъ

$$m(a+\alpha)+p=n(b+\beta)+q$$

или

$$ma+p+m\alpha=nb+q+n\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Допустимъ, что $ma+p$ не равно $nb+q$ и что разность между ними есть k, такъ что $ma+p=nb+q+k$; тогда урав. (2) приметъ видъ

$$nb+q+k+m\alpha=nb+q+n\beta, \text{ откуда}$$

$$k+m\alpha=n\beta \text{ или } k=n\beta-m\alpha.$$

Такъ какъ β и α суть безконечно-малыя, то по предъид. теоремѣ $n\beta$, $m\alpha$, а также и разность между ними k суть также безконечно малыя. Но k есть также разность между постоянными величинами $ma+p$ и $nb+q$, слѣд. она должна быть величиной конечною и постоянною, а потому не можетъ быть безконечно-малою. Поэтому и $ma+p$ не можетъ отличаться отъ $nb+q$, т. е. $ma+p=nb+q$, что и требовалось доказать. Подобнымъ разсужденіемъ можно убѣдиться въ справедливости теоремы и въ тѣхъ случаяхъ, когда данное уравненіе между перемѣнными будетъ квадратное или высшей степени.

Изъ доказанной нами теоремы слѣдуетъ:

1) ***если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны между собою, то равны и предѣлы ихъ;***

2) ***если перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ находятся въ постоянномъ отношеніи, то въ такомъ же отношеніи находятся и предѣлы ихъ.***

311. Пользуясь изложенными теоремами о предѣлахъ, можно указать общій способъ доказательства всякой теоремы о пропорціональности въ случаѣ несоизмѣримости разсматриваемыхъ величинъ, когда та же теорема въ случаѣ соизмѣримости уже доказана. Обыкновенно, при этомъ легко показать, что если въ случаѣ соизмѣримости имѣемъ равенство отношеній $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$, гдѣ a_1, a_2 суть значенія одной величины, соотвѣтствующія значеніямъ b_1, b_2 другой, то въ случаѣ несоизмѣримости отношеніе $\frac{a_1}{a_2}$, опредѣленное съ точностью $\frac{1}{n}$, равно отношенію $\frac{b_1}{b_2}$, опредѣленному съ той же точностью. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть равенство между перемѣнными величинами, справедливое при всякой степени точности $\frac{1}{n}$, т. е. равенство, сохраняющееся при всѣхъ измѣненіяхъ перемѣнныхъ величинъ; предѣлами для этихъ перемѣнныхъ будутъ служить отношенія несоизмѣримыхъ величинъ $\frac{a_1}{a_2}$ и $\frac{b_1}{b_2}$, ибо $\frac{1}{n}$ можно сдѣлать менѣе всякой произвольно взятой величины; на основаніи 1-го слѣдствія 2-й теоремы предъидущаго § эти предѣлы будутъ равны, т. е. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ и въ случаѣ несоизмѣримости.

ГЛАВА XI.

Опредѣленіе длины окружности и площади круга.

312. Въ самомъ началѣ (§ 18) было указано, какъ опредѣлять длину прямой линіи; для этого, какъ мы видѣли, нужно умѣть опредѣлять отношеніе между двумя прямыми, что дѣлается помощью наложенія прямыхъ линій одна на другую. Вопросъ объ опредѣленіи длины ломаной линіи также разрѣшается весьма легко, ибо всегда можно *выпрямить* ломаную линію, т. е. найти прямую, которой длина равна длинѣ ломаной. Гораздо больше затрудненій представляетъ опредѣленіе длины кривой линіи. Дѣйствительно, если при измѣреніи этой длины принять такія же единицы, какъ и для прямыхъ линій, т. е. прямыя линіи, то прямая линія не можетъ совмѣщаться съ кривой и слѣд. длину этой послѣдней невозможно опредѣлить непосредственнымъ наложеніемъ. Если же за единицы для измѣренія кривыхъ линій принимать кривыя же линіи, то необходимо для каждой кривой имѣть особую единицу; напр. для измѣренія дугъ каждой окружности можно принять за единицу только дугу той же или равной ей окружности, ибо только дуги равныхъ окружностей могутъ быть совмѣщаемы. Поэтому кривыя линіи, а слѣд. и окружность, измѣряются прямолинейными единицами.

За длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремятся периметры правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ по мѣрѣ увеличенія числа сторонъ ихъ до безконечности.

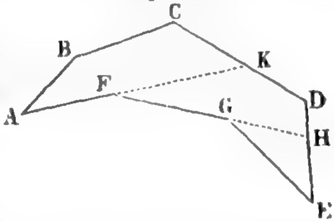
313. Чтобы доказать, что окружность есть дѣйствительно предѣлъ периметровъ прав. впис. и опис. многоуг., мы примемъ, что *если двѣ выпуклыя,* * *ломаныя или кривыя, линіи имѣютъ общія конечныя точки, то линія внѣшняя больше внутренней.* Если обѣ линіи будутъ ломаныя, то предложеніе это доказывается легко. Дѣйствительно (чер. 390), продолживъ AF и FG, будемъ по свойству прямой линіи имѣть неравенства:

$$AB+BC+CK > AF+FK;$$

$$FK+KD+DH > FG+GH;$$

$GH+HE > GE.$ Сложивъ почленно эти неравенства и исключивъ изъ обѣихъ частей равныя величины, получимъ $ABCDE > AFGE$.

Чер. 390.



Легко также доказать теорему и въ томъ случаѣ, когда внѣшняя линія будетъ кривая.

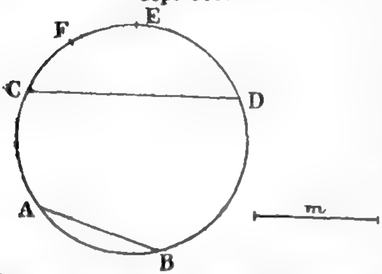
Доказательство же теоремы для того случая, когда внѣшняя или объемлющая линія будетъ ломаная, а внутренняя будетъ кривая, помѣщено ниже (§ 337—339).

314. Затѣмъ докажемъ, что *въ каждую окружность можно вписать такой прав. многоугольникъ, чтобы сторона его была меньше произвольно взятой прямой.* Пусть напр. требуется вписать въ

* Кривая и ломаная линіи наз. выпуклыми, если онѣ съ прямой линіей не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.

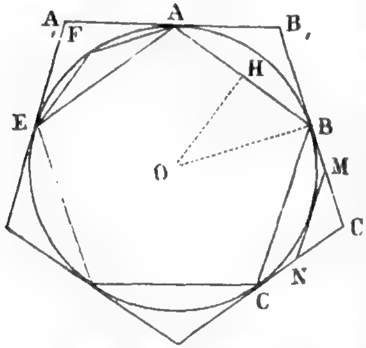
кругъ прав. многоуг., котораго сторона была бы меньше прямой m (чер. 391); отложимъ эту прямую отъ какой нибудь точки A окружности; пусть $AB = m$; потомъ впишемъ въ кругъ какой нибудь прав. многоуг.; положимъ, что CD будетъ сторона этого многоуг.; если CD будетъ больше AB, то удвоимъ число сторонъ вписаннаго многоуг., раздѣливъ дугу CD пополамъ въ точкѣ E; если дуга CE будетъ больше дуги AB, то раздѣлимъ CE пополамъ въ F и будемъ поступать такъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ наконецъ дуги, которая будетъ меньше дуги AB; сторона прав. мног., соотвѣтствующая этой дугѣ, и будетъ меньше m.

Чер. 391.



315. Теперь уже можно доказать, что *окружность есть предѣлъ периметровъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ*. Пусть (чер. 392) $ABC\ldots$ и $A_1B_1C_1\ldots$ будутъ правильные впис. и опис. одноименные многоуг. Если будемъ удвоивать число сторонъ ихъ, то периметръ описаннаго будетъ уменьшаться, ибо ломаная MC_1N будетъ замѣняться прямой MN; периметръ же впис. мног. будетъ увеличиваться, ибо прямая EA будетъ замѣняться ломаной EFA; притомъ (§ 313) перим. опис. мног. всегда будетъ оставаться больше окружности, а перим. впис. меньше ея. Остается доказать, что разность между окружностью и каждымъ периметромъ есть безконечно малая, т. е. можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно взятой величины. Означимъ перим. впис. многоуг. черезъ p, описаннаго — p_1, апоѳ. впис. — a, апоѳему описан. мног. или радіусъ круга — r. Мы видѣли (§ 181), что правильные одноименные многоуг. подобны между собою; периметры подобныхъ мног-ковъ вообще относятся какъ сходственныя стороны (§ 196); въ прав. же многоуг. стороны пропорціональны радіусамъ или апоѳемамъ; поэтому периметры правильныхъ одноименныхъ многоуг. относятся какъ ихъ радіусы или апоѳемы, и слѣд.

Чер. 392.



$$\frac{p_1}{p} = \frac{r}{a}, \text{ откуда } \frac{p_1 - p}{p} = \frac{r - a}{a}.$$

Здѣсь во второмъ отношеніи предъид. членъ $r-a$ есть величина безконечно малая, ибо изъ треуг. BOH имѣемъ $BH > r-a$ или $r-a < {}^1/_2\ AB$; а сторона прав. мног., какъ доказано въ § 314-мъ, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Послѣдующій же членъ a втораго отношенія есть величина конечная, ибо онъ съ увеличеніемъ числа сторонъ приближается къ r. Итакъ $\frac{r-a}{a}$ есть величина безконечно-малая; поэтому и $\frac{p_1-p}{p}$ также величина безконечно-малая; а такъ какъ послѣдующій членъ p этого отношенія при удвоеніи числа сторонъ возрастаетъ, то слѣд. предъидущій членъ долженъ быть безконечно малымъ; т. е. разность p_1-p между периметрами впис. и опис. многоуг. можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Но окружность меньше p_1 и больше p, слѣд. разность между ней и каждымъ изъ периметровъ и подавно можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно взятой величины.

Теорему о томъ, что окружность есть предѣлъ периметровъ прав. впис. и опис. мног—въ, иногда выражаютъ въ такой формѣ: окружность есть периметръ правильнаго многоугольника, имѣющаго безчисленное множество сторонъ.

316. Возьмемъ два круга, которыхъ радіусы r и r_1; окружности ихъ назовемъ O и O_1; впишемъ въ эти круги прав. n—угольники, периметры которыхъ назовемъ p и p_1. Такъ какъ периметры прав. одноименныхъ мног—ковъ относятся какъ ихъ радіусы, то $\frac{p}{p_1}=\frac{r}{r_1}$. Это отношеніе перемѣнныхъ величинъ p и p_1 будетъ существовать при всѣхъ ихъ измѣненіяхъ; слѣд. въ такомъ же отношеніи должны находиться и ихъ предѣлы, т. е. $\frac{O}{O_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{2r}{2r_1}$. Итакъ *окружности относятся какъ ихъ радіусы или діаметры*; если напр. радіусъ одной окружности втрое больше радіуса другой, то первая окружность втрое длиннѣе второй.

317. Перемѣстивъ средніе члены въ пропорціи $\frac{O}{O_1}=\frac{2r}{2r_1}$, получимъ $\frac{O}{2r}=\frac{O_1}{2r_1}$; т. е. во сколько разъ одна окружность больше своего діаметра, во столько же разъ и всякая другая окружность больше своего діаметра; иначе говоря—*отношеніе окружности къ діаметру есть число постоянное*. Это отношеніе есть число *ирраціональное*; иначе говоря — *окружность несоизмѣрима съ діаметромъ*, а слѣд. и съ радіусомъ, и длину ея нельзя выразить точно въ частяхъ радіуса, а можно найти только съ бо̀льшимъ или меньшимъ приближеніемъ. Отношеніе окружности къ діаметру принято обозначать греческой буквой π.

318. Легко найти, между какими цѣлыми числами заключается π; дѣйствительно, мы знаемъ, что сторона прав. впис. 6—ка $=$ радіусу, а сторона описан. квадрата $=$ діаметру; слѣд. перим. прав. впис. 6—ка $= 6$ рад. $= 3$ діаметрамъ; а перим. описан. квадр. $= 4$ діамет.; но окружность $>$ перим. впис. 6—ка и менѣе перим. опис. квадр.; слѣд. длина ея > 3 діам. и < 4 діам.; иначе говоря, $\pi > 3$ и < 4.

Болѣе точное число для π есть $\pi = 3{,}1415926535......$

Отношеніе окружности къ діаметру было впервые опредѣлено знаменитымъ древнимъ ученымъ Архимедомъ (род. въ Сиракузахъ около 287 г. до Р. Х.), который нашелъ $\pi = {}^{22}/_{7}$; это число больше настоящаго и точно до ${}^{1}/_{192}$ или приблизительно до ${}^{1}/_{100}$.

Затѣмъ заслуживаетъ вниманіе число, найденное Меціемъ: $\pi = {}^{355}/_{113}$, точное до ${}^{1}/_{1000000}$. Лудольфъ вычислилъ величину π съ 35 десятичными знаками; въ настоящее же время вычисленіе π доведено до 530 десятичныхъ цифръ.

319. Изъ формулы $\frac{O}{2r} = \pi$ находимъ $O = 2\pi r$ и $r = \frac{O}{2\pi}$; такимъ образомъ, зная величину π, можно по данному радіусу опредѣлить длину окружности и обратно по данной окружности вычислить ея радіусъ. Если напр. радіусъ$=14$ дюйм., то, принимая $\pi = {}^{22}/_{7}$, найдемъ $O = 2 \cdot {}^{22}/_{7} \cdot 14 = 88$ дюйм.

Если окружность $= 2198$ метр., то принимая $\pi = 3.14$, найдемъ $r = \frac{2198}{3.14} = 700$ метр.

320. Можно также вычислить длину дуги, зная величину ея радіуса и число градусовъ дуги. Пусть напр. требуется вычислить длину l дуги, содержащей n^0, при радіусѣ r. Такъ какъ $O = 2\pi r$, то длина $1^0 = \frac{2\pi r}{360}$, а слѣд. $l = \frac{2\pi r . n}{360} = \frac{\pi r n}{180}$.

Обратно, зная длину дуги и радіусъ ея, легко вычислить, сколько она содержитъ градусовъ. Дѣйствительно, изъ предъид. формулы имѣемъ $n = \frac{180\, l}{\pi r}$.

Наконецъ, если извѣстны n и l, то $r = \frac{180\, l}{\pi n}$.

321. Возьмемъ нѣсколько числовыхъ примѣровъ, причемъ будемъ принимать $\pi = {}^{22}/_{7}$.

1. Найти длину дуги въ $5^0\ 37'30''$, если радіусъ ея $= 14$ дюйм.? Обративъ дугу въ секунды, получимъ $20250''$; слѣд.
$360^0 = 2 \cdot {}^{22}/_{7} \cdot 14 = 88$ дюйм., или $360.60.60'' = 88$ дюйм.;
$1'' = \frac{88}{360.60.60}$ дюйм.; $20250'' = \frac{88 \cdot 20250}{360.60.60} = 1^{3}/_{8}$ дюйм.

2. Дуга, которой рад. 1 сажень, имѣетъ длину $16^1/_2$ дюйм.; сколько въ ней градусовъ, минутъ, секундъ? Число градусовъ дуги должно быть во столько разъ меньше 360, во сколько $16^1/_2$ дюйм. меньше длины окружности; раздробивъ 1 саж. въ дюймы, найдемъ эту длину $=2.\,^{22}/_7.84=528$ дюйм., слѣд. $\frac{x}{360}=\frac{16^1/_2}{528}$, откуда $x=\frac{360.16^1/_2}{528}=$ $=11^0\,^1/_4=11^0\ 15'$.

3. Уголъ $49^0 13'7'',5$ имѣетъ вершину на окружности и опирается на дугу въ $13^3/_4$ дюйм. длины; опредѣлить въ вершкахъ радіусъ круга? Дуга, на которую опирается уголъ, равна $98^0\,26'15''$; слѣд. окружность во столько разъ больше $13^3/_4$ дюйм., во сколько 360^0 больше $98^0 26'15''$; поэтому, обративъ дугу въ секунды, найдемъ длину окруж. $=\frac{13^3/_4.360.60.60}{354375}$; а потому рад. $=\frac{13^3/_4.\ 360.60.60}{354375.\ 2.\ ^{22}/_7}=$ $=8$ дюйм. $=4^4/_7$ вершк.

322. Если бы величину π можно было вычислить точно, то легко было бы *выпрямить* окружность, т. е. начертить прямую линію, которой длина была бы равна длинѣ окружности. Но какъ π есть число ирраціональное, то и задача о выпрямленіи окружности можетъ быть рѣшена лишь приблизительно. Такъ, принимая $\pi={}^{22}/_7$, чтобы выпрямить окружность, надо діаметръ ея раздѣлить на 7 равныхъ частей и построить прямую линію $=22$ такимъ частямъ. Наиболѣе простой способъ для выпрямленія данной окружности состоитъ въ слѣдующемъ: надо вписать въ нее квадратъ и прав. треугольникъ; затѣмъ начертить прямую $=$ суммѣ стороны квадрата и стороны тр—ка, и прямую эту удвоить; полученная прямая будетъ приблизительно равна длинѣ окружности. Дѣйствительно, если рад. окр. $=r$, то сторона впис. квад. $=r\sqrt{2}$; стор. впис. треуг. $=r\sqrt{3}$; слѣд. полученная прямая $=2r(\sqrt{2}+\sqrt{3})=$ $=2r(1{,}41\ldots+1{,}73\ldots)=2r.3{,}14\ldots=2\pi r$, принимая $\pi=3{,}14$; т. е. эта прямая будетъ равна окружности съ точностью архимедова отношенія.

Черт. 393.

Приведемъ еще слѣдующее построеніе. Въ окружности O (чер. 393) проведемъ діаметръ AB и касательную BC; отложимъ на ней $Bm=$ діаметру, потомъ $mn={}^1/_5$ радіуса и $np={}^2/_5$ радіуса; n и p соединимъ съ центромъ; отложимъ на продолженномъ діаметрѣ часть $BD=On$ и изъ D проведемъ $DC \parallel Op$;

тогда BC будетъ приблизительно равна длинѣ окружности. Дѣйствительно, полагая радіусъ$=1$, по построенію будемъ имѣть $Bn={}^{11}/_5$, а $Bp={}^{13}/_5$; слѣд. $BD=On=\sqrt{OB^2+Bn^2}=\sqrt{1+({}^{11}/_5)^2}=$ $=\sqrt{1+{}^{121}/_{25}}={}^1/_5\sqrt{146}.$

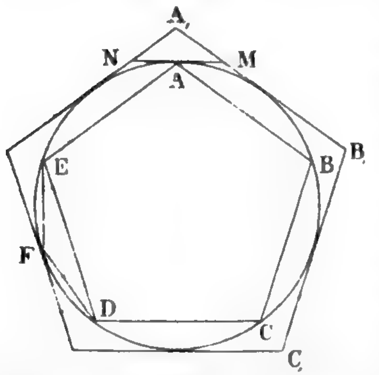
Такъ какъ треуг. $DBC \infty OBp$, то $\frac{BC}{Bp}=\frac{BD}{BO}$ и слѣд. $BC={}^{13}/_5 BD=$

$$={}^{13}/_{25}\sqrt{146}={}^1/_{25}\sqrt{146.13^2}={}^1/_{25}\sqrt{24674}=\frac{157.079...}{25}=$$

$$=2.\frac{157,079....}{50}=2.\ 3,1415.$$

323. ***Площадь круга есть предѣлъ площадей вписанныхъ въ него и описанныхъ около него правильныхъ многоугольниковъ.***

Чер. 394.



Пусть (черт. 394) ABC... и $A_1\ B_1\ C_1$... суть прав. впис. и опис. n—угольники; площ. впис. многоуг. меньше площ. круга, и при удвоеніи числа сторонъ, увеличиваясь на сумму треуг. EFD...., будетъ приближаться къ площ. круга, но никогда ея не достигнетъ. Площадь опис. мног. больше площ. круга; при удвоеніи числа сторонъ она будетъ уменьшатся на сумму треуг. NA_1M.... и также приближаться къ площади круга. Если мы докажемъ, что разность между площадями впис. и опис. многоугольника можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины, то разность между площадью каждаго изъ этихъ многоуг. и площадью круга будетъ и подавно безконечно малою; слѣд. площадь круга и будетъ предѣломъ площадей впис. и опис. многоугольн.

Означивъ площ. впис. мног. черезъ s, описан. s_1, радіусъ круга, который будетъ апоѳемой опис. мног., черезъ r, апоѳему впис. мног. черезъ a, и замѣтивъ, что площади прав. одноим. мног—въ относятся, какъ квадраты ихъ радіусовъ или апоѳемъ, получимъ $\frac{s_1}{s}=\frac{r^2}{a^2}$, откуда $\frac{s_1-s}{s}=\frac{r^2-a^2}{a^2}=\frac{(r+a)(r-a)}{a^2}$.

Здѣсь $r-a$, какъ мы уже доказали (§ 315), есть величина безконечно малая; а такъ какъ $r+a$ и a величины конечныя, то и вся дробь $\frac{(r+a)(r-a)}{a^2}$ есть безконечно малая; поэтому и s_1-s можетъ быть сдѣлано меньше всякой, произвольно взятой, величины.

324. Площадь прав. мног., какъ мы знаемъ, равна произведенію его периметра на $^1/_2$ апоөемы; поэтому, назвавъ черезъ p_1 периметръ опис. мног., будемъ имѣть $s_1 = p_1 . {}^1/_2 r$.

Это равенство справедливо при всѣхъ измѣреніяхъ входящихъ въ него перемѣнныхъ p_1 и s_1; поэтому (теор. 2 § 310) оно останется справедливымъ и тогда, когда вмѣсто s_1 и p_1 подставимъ ихъ предѣлы, т. е. площадь круга и окружность; назвавъ первую C, а вторую O, получимъ

$C = O . {}^1/_2 r$; т. е. *площадь круга = произведенію окружности на $^1/_2$ радіуса.*

Это предложеніе можно также вывести, разсматривая кругъ какъ прав. мног—къ съ безконечнымъ числомъ сторонъ.

Такъ какъ $O = 2\pi r$, то площ. круга $= 2\pi r . {}^1/_2 r = \pi r^2$. Если напр. $r = 21$ дюйм., то принимая $\pi = {}^{22}/_7$, найдемъ площ. круга $= {}^{22}/_7 . 21^2 = 1386$ кв. дюйм.

Для круга, котораго рад. $= 1$, площадь $= \pi = 3{,}1415\ldots$

Изъ формулы $C = \pi r^2$ получимъ $r = \sqrt{\dfrac{C}{\pi}}$ — формулу, которая опредѣляетъ радіусъ круга по данной его площади. Наприм. если площ. $= 38^1/_2$ кв. верш., то $r = \sqrt{\dfrac{38^1/_2}{\pi}}$; принявъ $\pi = {}^{22}/_7$, найдемъ $r = \sqrt{\dfrac{77.7}{2.22}} = \sqrt{\dfrac{7.7}{2.2}} = {}^7/_2$ верш.

Если требуется опредѣлить площ. круга C по данной окруж. O, то замѣтивъ, что $C = \pi r^2$, а $r = \dfrac{O}{2\pi}$, найдемъ $C = \dfrac{\pi . O^2}{4\pi^2} = \dfrac{O^2}{4\pi}$.

Изъ послѣдняго выраженія находимъ $O = 2\sqrt{C\pi}$ — формулу, служащую для опредѣленія длины окружности по площади круга.

325. Если имѣемъ два круга, которыхъ площади C и C_1, а радіусы r и r_1, то получимъ

$\dfrac{C}{C_1} = \dfrac{\pi r^2}{\pi r_1^2} = \dfrac{r^2}{r_1^2} = \dfrac{4r^2}{4r_1^2} = \dfrac{(2r)^2}{(2r_1)^2} = \left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2 = \left(\dfrac{2r}{2r_1}\right)^2$; т. е. *площади круговъ относятся между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ*; иначе говоря—отношеніе площадей двухъ круговъ = квадрату отношенія ихъ радіусовъ или діаметровъ. Если напр. рад. одного круга $= {}^3/_5$ рад. другаго, то площ. перваго $= {}^9/_{25}$ втораго.

326. Площадь сектора будетъ во сколько разъ меньше площади цѣлаго круга, во сколько дуга сектора меньше окружности (это можно доказать совершенно такъ же, какъ въ § 103 доказано, что отношеніе центральныхъ угловъ равно отношенію соотвѣтствующихъ имъ дугъ); поэтому, означивъ площ. сектора черезъ s, дугу его l, радіусъ r, получимъ $\frac{s}{\pi r^2}=\frac{l}{2\pi r}$, откуда $s=\frac{\pi r^2 l}{2\pi r}=l.\,^1/_2 r$; т. е. *площ. сектора = произведенію его дуги на $^1/_2$ радіуса.* При этомъ дуга должна быть вычислена въ частяхъ радіуса.

Если дуга сектора содержитъ n°, то длина ея $l=\frac{\pi r n}{180}$, слѣдов. площ. $s=\frac{\pi r n}{180}\cdot\frac{r}{2}=\frac{\pi n r^2}{360}$.

Въ эту формулу входятъ три количества s, n, r, и если два изъ нихъ даны, то легко опредѣлить и третье. Такъ $n=\frac{360 s}{\pi r^2}$; $r=\sqrt{\frac{360 s}{n\pi}}$. Возьмемъ нѣсколько числовыхъ примѣровъ.

1. Опредѣлить площ. сектора, котораго уголъ $=67^\circ 30'$, а радіусъ $=3{,}39$ дюйм., принимая $\pi={}^{355}/_{113}$? Дуга $67^\circ 30'=4050'=\frac{2.\,^{355}/_{113}\,.\,3{,}39.\ 4050}{360.60}$, слѣд. площ. $=\frac{2.355.\ 3{,}39.4050.\ 3{,}39}{113.360.60.2}=$ $=6{,}76940625$ кв. дюйм.

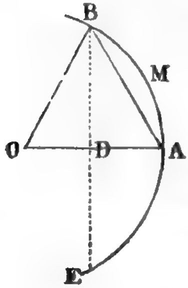
2. Площ. сект. $=154$ кв. вершк.; рад. $=28$ вершк.; опредѣлить уголъ сектора, принимая $\pi={}^{22}/_7$? Уголъ во столько разъ меньше 360°, во сколько площ. сектора меньше площ. круга; слѣд. $\frac{x}{360}=$ $=\frac{154}{^{22}/_7.28^2}$, откуда $x=\frac{154.360.7}{22.28^2}=22^\circ\,^1/_2=22^\circ 30'$.

3. Принимая $\pi=3{,}14$, опредѣлить радіусъ сектора, котораго уголъ $=56^\circ 15'$, а площ. $=49{,}0625$ кв. дюйм.?

Обративъ $56^\circ 15'$ въ минуты, найдемъ, что площ. всего круга $=$ $=\pi r^2=\frac{49{,}0625.360.60}{3375}$; слѣд. $r=\sqrt{\frac{49{,}0625.360.60}{3375.\ 3{,}14}}=10$ дюйм.

327. Площ. сегм. AMB (чер. 395) найдемъ, вычтя изъ площ. сектора $AOBM$ площ. треуг. AOB.

Чер. 395.



Если длину дуги сегмента назовемъ черезъ l, радіусъ r, площ. сегм. s, то получимъ

$$s=\frac{lr}{2}-\frac{AO.BD}{2}=\frac{r}{2}\,(l-BD).$$

Здѣсь BD есть половина хорды BE, соотвѣтствующей удвоенной дугѣ сегмента. Если уг. AOB будетъ равенъ центральному углу одного изъ такихъ правильныхъ многоугольниковъ, которые можно вписывать въ кругъ посредствомъ циркуля и линейки (§ 250), то зная число градусовъ дуги сегмента и радіусъ круга, можно вычислить хорду AB, а по формулѣ § 249 и хорду BE (ибо BE будетъ сторона прав.

мног—ка, имѣющаго вдвое меньше сторонъ), а слѣд. опредѣлить и площ. сегмента.

Для другихъ дугъ вычисленіе площ. сегмента дѣлается посредствомъ тригонометріи.

Положимъ напр., что $AOB=45^\circ$, а $r=1$ дюйму; тогда BD есть $^1/_2$ стороны квадрата, слѣд. $BD={}^1/_2\sqrt{2}$; а длина l дуги $={}^1/_4\,\pi$, ибо эта дуга составляетъ $^1/_8$ окружности, а окружность $=2\pi$, и площ. сегм. $={}^1/_2\,({}^1/_4\,\pi-{}^1/_2\sqrt{2})$. Полагая $\pi=3{,}14$ и извлекши $\sqrt{2}$ въ сотыхъ доляхъ, найдемъ площадь $s={}^1/_2\left(\frac{3{,}14}{4}-\frac{1{,}41}{2}\right)=0{,}04$ кв. дюйм.

328. Если имѣемъ двѣ концентрическія окружности радіусовъ r и r_1, то часть круга, находящаяся между этими окружностями, наз. ***концентрическимъ кольцомъ***; площадь кольца опредѣлится какъ разность площадей обоихъ круговъ; поэтому, если $r > r_1$, то площ. кольца $=\pi r^2-\pi r_1^2=\pi(r^2-r_1^2)=\pi(r+r_1)(r-r_1)$.

329. Въ § 293 мы доказали, что пиѳагорова теорема распространяется на подобные многоугольники; то же легко доказать и относительно круговъ: площадь круга, построеннаго на гипотенузѣ прямоуг. треуг., равна суммѣ площадей круговъ, построенныхъ на катетахъ. Пусть A, B, C будутъ площади круговъ, которыхъ діаметры a, b, c суть гипотенуза и катеты прямоуг. треугольн.; тогда $A=\pi({}^1/_2 a)^2=\frac{\pi a^2}{4}$; $B=\pi({}^1/_2 b)^2=\frac{\pi b^2}{4}$; $C=\pi({}^1/_2 c)^2=\frac{\pi c^2}{4}$; но $a^2=b^2+c^2$ по свойству прямоуг. треуг., слѣд. $A=B+C$.

330. Такимъ образомъ, если BAC (чер. 396) есть треуг., прямоугольный при A, то площадь полукруга, построеннаго на BC, равна суммѣ площадей полукруговъ, построенныхъ на катетахъ. Отнявъ сегменты m и n отъ площади полукруга, построеннаго на гипотенузѣ, получимъ треуг. BAC; а отнявъ ихъ отъ двухъ другихъ полукруговъ, получимъ фигуры p и q; слѣд. площ. треуг. $BAC=$ суммѣ площадей криволинейныхъ фигуръ p и q. Фигуры эти наз. ***гиппократовыми луночками*** по имени ученаго, открывшаго вышеизложенное ихъ свойство.

Чер. 396.

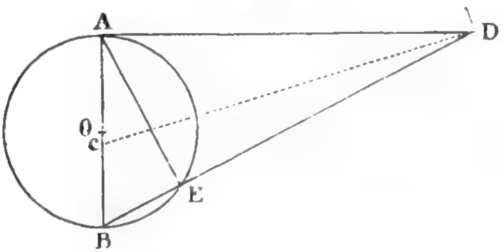
331. Найти квадратуру круга значитъ опредѣлить сторону квадрата, котораго площадь равнялась бы площади даннаго круга. Назвавъ сторону этого квадрата x, а радіусъ круга r, получимъ $x^2=\pi r^2$, откуда $x=r\sqrt{\pi}$. Такъ какъ π есть число ирраціональное, то совершенно точно вычислить x невозможно.

Невозможно также рѣшить задачу о квадратурѣ круга и построеніемъ. Дѣйствительно, изъ урав. $x^2 = \pi r^2$ находимъ $\frac{2\pi r}{x} = \frac{x}{^1/_2 r}$; слѣд. сторона искомаго квадрата есть средняя пропорціональная между окружностью и $^1/_2$ радіуса. Такъ какъ нельзя точно выпрямить окружность (§ 322), то и задача о квадратурѣ круга можетъ быть рѣшена только приблизительно.

332. Слѣдующее построеніе, принадлежащее Совне, даетъ сторону квадрата, равновеликаго данному кругу съ точностью 0,00001.

Проведемъ въ кругѣ (чер. 397) діаметръ AB и въ точкѣ A ка-

Чер. 397.



сательную; на радіусѣ OB отложимъ $Oc = {^1/_6}$ радіуса и изъ c радіусомъ $= 4$ радіусамъ OB, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ касательную въ D; соединимъ точку B съ D; потомъ точку E, въ которой BD пересѣкаетъ окружность, соединимъ съ A; AE и будетъ сторона искомаго квадрата.

Дѣйствительно, проведя Dc и положивъ радіусъ $OB = 1$, имѣемъ $AD^2 = Dc^2 - Ac^2 = 4^2 - (1^1/_6)^2 = {^{527}/_{36}}$; $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4 + {^{527}/_{36}} = {^{671}/_{36}}$. Такъ какъ треуг. $ABE \sim ABD$ (уг. B общій, а углы BEA и BAD прямые), то $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{BD}$ и слѣд. $AE = \frac{AB.AD}{BD}$;

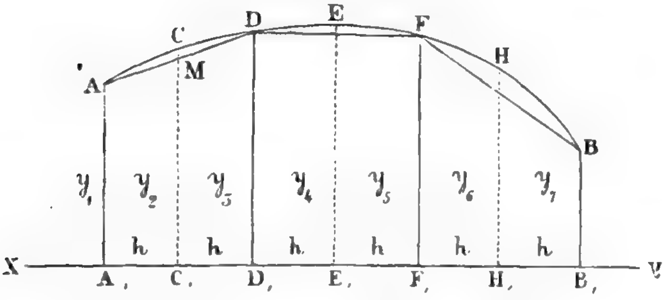
$AE^2 = \frac{AB^2\,AD^2}{BD^2}$; но $AB = 2$; $AD^2 = {^{527}/_{36}}$; $BD^2 = {^{671}/_{36}}$, слѣд. $\frac{AD^2}{BD^2} = {^{527}/_{671}}$, а $AE^2 = 4 \,.\, {^{527}/_{671}} = {^{2108}/_{671}} = 3,14158 = \pi$ съ точностью 0,00001. Такъ какъ площадь круга, котораго рад. $= 1$, равна π, то AE и выражаетъ сторону квадрата, равновеликаго кругу съ точностью 0,00001.

333. Покажемъ теперь, какимъ образомъ можно приблизительно вычислять площади другихъ криволинейныхъ фигуръ. Для этого замѣтимъ сперва, что если b и b_1 суть параллельныя стороны трапеціи, b_2 средняя линія ея, равная, какъ мы знаемъ, $^1/_2(b+b_1)$, а h — половина высоты, то площ. трапеціи $= h(b+b_1)$; помноживъ и раздѣливъ это выраженіе на 3, мы можемъ представить его въ слѣдующемъ видѣ:

$$^1/_3 h(3b+3b_1) = {^1/_3} h[b+b_1+2(b+b_1)] = {^1/_3} h(b+b_1+4b_2).$$

На основаніи этого вычислимъ площадь, заключенную (чер. 398) между кривой AB, прямой XY и перпендикулярами AA_1 и BB_1, опущенными изъ конечныхъ точекъ кривой на прямую XY. Поло-

Чер. 398.



жимъ, что кривая вогнута въ одну сторону, именно къ XY. Раздѣлимъ A_1B_1 на *четное* число равныхъ частей, напр. на 6, въ точкахъ C_1 D_1 . . . . и возставимъ изъ C_1, D_1 . . . . перпендикуляры къ XY; пусть $A_1A = y_1$, $C_1C = y_2$, $D_1D = y_3$ . . . . ; разстоянія же A_1C_1, C_1D_1 . . . между каждыми двумя перпендикулярами назовемъ h. Проведя прямыя AD, DF, FB, получимъ трапеціи A_1ADD_1, D_1DFF_1 . . . По вышевыведенному выраженію для площ. трапеціи найдемъ площадь $A_1ADD_1 = {}^1/_3 h(AA_1 + DD_1 + 4\,C_1M)$; трапеція A_1ADD_1 меньше криволинейной площади A_1ACDD_1; поэтому, если мы въ предъидущемъ выраженіи площ. трапеціи возьмемъ вмѣсто C_1M линію бо̀льшую, именно C_1C, то больше приблизимся къ этой площади, и слѣд. приблизительно можемъ принять, что площ. $A_1ACDD_1 = {}^1/_3 h(y_1 + y_3 + 4y_2)$.

Такъ же опредѣлимъ и остальныя криволинейныя площади:

$D_1DEFF_1 = {}^1/_3 h(y_3 + y_5 + 4y_4)$; $F_1FHBB_1 = {}^1/_3 h\ (y_5 + y_7 + 4y_6)$.

Слѣд. площадь всей криволинейной фигуры

$S = {}^1/_3 h\ [y_1 + y_7 + 2(y_3 + y_5) + 4\ (y_2 + y_4 + y_6)] = {}^1/_3 h\ (a + 2b + 4c)$, гдѣ a есть сумма конечныхъ перпендикуляровъ, b—сумма перпендикуляровъ нечетнаго порядка, а c—сумма перпендикуляровъ четнаго порядка.

Изложенный способъ опредѣленія площадей криволинейныхъ фигуръ принадлежитъ Томасу Симпсону.

334. Способы вычисленія π. Изъ различныхъ способовъ вычисленія π мы покажемъ слѣдующіе три способа.

1-й способъ. Принявъ въ формулѣ $O = 2\pi r$ радіусъ $= 1$, получимъ $O = 2\pi$ или $\pi = {}^1/_2 O$; т. е. $\pi = {}^1/_2$ числа, выражающаго длину окружности въ радіусѣ; поэтому числа, выражающія въ радіусахъ величины полупериметровъ впис. прав. многоугольниковъ, будутъ представлять приближенныя величины π, меньшія настоящей его величины; а вычисляя полупериметры прав. опис. многоугольниковъ, мы получимъ приближенныя значенія π, бо̀льшія дѣйствительной величины его. Такимъ образомъ, вычисляя послѣдовательно при радіусѣ $=1$ полупериметры квадрата, прав. 8—ка, 16—ка, 32—ка. . . . , или прав. 6—ка, 12—ка. . . , вписанныхъ и описанныхъ, мы будемъ получать числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ величинѣ π. Вычисленія же эти можно выполнить, ибо мы знаемъ, что сторона впис. квадр. при радіусѣ$=1$ равна $\sqrt{2}$; сторона прав. 6—ка$=1$; по формулѣ $x=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$, выведенной въ § 249, можемъ вычислить стороны (а слѣд. и полупериметры) прав. 8—ка, 16—ка.... или 12—ка, 24—ка...; по формулѣ же § 247-го $z=\frac{2a}{\sqrt{4-a^2}}$ можемъ вычислить стороны и полупер. опис. многоуг.

Результаты такихъ вычисленій представлены въ слѣд. таблицѣ:

Число сторонъ.	Полуперим. впис. многоуг.	Полуперим. опис. многоуг.
4	2,82842	4,00000
8	3,06146	3,31371
16	3,12144	3,18260
32	3,13654	3,15173
64	3,14033	3,14412
128	3,14127	3,14223
. . .	. . . . . .	. . . . . .
. . .	. . . . . .	. . . . . .
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3.21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3.14188
. . .	. . . . . .	. . . . . .
. . .	. . . . . .	. . . . . .

Изъ этой таблицы видимъ, что π заключается между 3,14145 и 3,14188 и что слѣд. 3,141 представляетъ величину π съ точностью до 0,001.

Такому способу, требующему продолжительныхъ вычисленій, слѣдовалъ Архимедъ, который вычислилъ π изъ периметровъ 96—ковъ и нашелъ, что $\pi > 3^{10}/_{71}$ и $< 3^{10}/_{70}$.

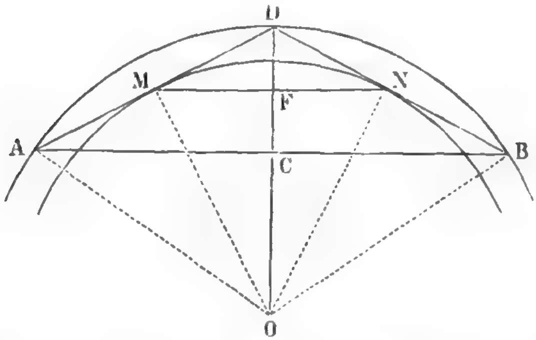
2-й способъ. Если въ формулѣ $O=2\pi r$ примемъ $O=2$, то получимъ $r=\frac{1}{\pi}$; т. е. дробь $\frac{1}{\pi}$ есть число, выражающее длину радіуса такой окружности, длина которой$=2$. Поэтому апоеема a и радіусъ R прав. мног-ка, котораго периметръ$=2$, представятъ приблизительныя величины $\frac{1}{\pi}$; апоѳема будетъ меньше, а радіусъ больше дѣйствительной величины этой дроби, ибо окружность, вписанная въ этотъ многоуг., будетъ меньше его периметра, т. е.<2; а окружность описанная >2, и слѣд. радіусъ a вписанной окружности будетъ меньше, а рад. R описанной окруж. больше радіуса r той окружности, которая$=2$.

Периметръ будетъ$=2$ у такого квадрата, котораго сторона$={}^1/_2$; апоѳема этого квадрата $a_1={}^1/_4$, а радіусъ $r_1={}^1/_2\sqrt{2}$. Чтобы можно было вычислить апоѳему и радіусъ прав. 8—ка, 16—ка . . . . , которыхъ периметръ равенъ 2, докажемъ сначала, что если вообще a и r суть апоѳема и радіусъ какого нибудь прав. мног., то апоѳема A и рад. R многоуг., имѣющаго периметръ, равный съ первымъ, а сторонъ вдвое больше, выражаются формулами

$$A={}^1/_2(a+r);\ R=\sqrt{rA}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (чер. 399) AB есть сторона какого ни-

Чер. 399.



будь прав. многоуг., а O центръ его. Проведя $OCD\perp AB$, получимъ $OD=r$, $OC=a$. Проведя AD и BD и соединивъ ихъ средины M и N, получимъ $MN \parallel AB$ и $MN={}^1/_2\ AB$; слѣд. MN будетъ сторона такого мног., который имѣетъ периметръ, равный съ даннымъ, а сторонъ вдвое больше; уг. $MON={}^1/_2$ уг. AOB и слѣд. есть центральный уг. новаго многоуг.; а потому $OM=R$, $OF=A$. Такъ какъ точка F есть средина DC, то $OF={}^1/_2(OC+OD)$ или $A={}^1/_2(a+r)$.

Сверхъ того изъ треуг. OMD, прямоугольнаго при M, имѣемъ $\frac{OM}{OD}=\frac{OF}{OM}$, откуда $OM^2=OD.\ OF$, или $R=\sqrt{rA}$.

Такимъ образомъ, найдя r и a для квадрата, котораго периметръ$=2$, можемъ найти величины радіуса и апоѳемы для прав. 8—ка, 16—ка, 32—ка . . . . того же периметра, при чемъ будемъ получать числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ величинѣ $\frac{1}{\pi}$; поэтому вычислимъ приближенно $\frac{1}{\pi}$, а потомъ и π.

Результаты такихъ вычисленій помѣщены въ слѣдующей таблицѣ.

Число сторонъ.	Апоѳемы.	Радіусы.
4	0,2500000	0,3535534
8	0,3017767	0,3266407
16	0,3142087	0,3203645
32	0,3172866	0,3188218
64	0,3180542	0,3184377
128	0,3182459	0,3183418
...	....	....
...	....	....

Отсюда видно, что 0,318 представляетъ число $\frac{1}{\pi}$, вѣрное до $^1/_{1000}$; а 0,3183—число, вѣрное до 0,0001. Раздѣливъ 1 на 0,3183, получимъ $\pi=3,142$.

3-й способъ. Наиболѣе удобный способъ вычисленія π даетъ разложеніе въ рядъ дуги по возрастающимъ степенямъ ея тангенса.

Если $u=\operatorname{tg}x$, то $x=\operatorname{arctg}u$; т. е. x есть дуга, которой тангенсъ$=u$.

Замѣтивъ, что $\operatorname{arctg}0=0$, положимъ

$\operatorname{arctg}u=Au+Bu^2+Cu^3+Du^4+\ldots\ldots$ (1).

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть

$$\operatorname{arctg}v=Av+Bv^2+Cv^3+Dv^4+\ldots$$

Вычтя этотъ рядъ изъ предъидущаго и раздѣливъ на $u-v$, найдемъ $\frac{\operatorname{arctg}u-\operatorname{arctg}v}{u-v}=A+B(u+v)+C(u^2+uv+v^2)+$

$$+D(u^3+u^2v+uv^2+v^3)+\ldots\ldots \quad (2).$$

Мы положили $\operatorname{arctg}u=x$, $\operatorname{arctg}v=z$, или $u=\operatorname{tg}x$, $v=\operatorname{tg}z$, слѣд.

$$\frac{\operatorname{arctg}u-\operatorname{arctg}v}{u-v}=\frac{x-z}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}z}=\frac{(x-z)\operatorname{cs}x\operatorname{cs}z}{\operatorname{sn}x\operatorname{cs}z-\operatorname{cs}x\operatorname{sn}z}=\frac{(x-z)\operatorname{cs}x\operatorname{cs}z}{\operatorname{sn}(x-z)}.$$

Если въ урав. (2) положимъ $u=v$, то вторая часть его обратится въ

$$A+2Bu+3Cu^2+4Du^3+\ldots\ldots$$

Первая же часть урав., равная, какъ мы видѣли, $\frac{(x-z)\operatorname{cs}x\operatorname{cs}z}{\operatorname{sn}(x-z)}$ при $u=v$ обратится въ cs^2x, ибо $u=v$ даетъ $x=z$; а съ уменьшеніемъ дуги величина ея sn приближается къ величинѣ дуги, слѣд. предѣлъ $\frac{x-z}{\operatorname{sn}(x-z)}=1$. Но $\operatorname{cs}^2x=\frac{1}{\operatorname{sc}^2x}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+u^2}$. Такимъ образомъ при $u=v$ урав. (2) приметъ видъ

$$\frac{1}{1+u^2}=A+2Bu+3Cu^2+4Du^3+\ldots.$$

Черезъ непосредственное же дѣленіе имѣемъ

$$\frac{1}{1+u^2}=1-u^2+u^4-u^6+\ldots.;\ \text{слѣд.}$$

$1-u^2+u^4-u^6+\ldots=A+2Bu+3Cu^2+4Du^3+\ldots$

Отсюда, сравнивая коэффиціенты, находимъ

$A=1$; $B=0$; $C=-{}^1/_3$; $D=0$; $E={}^1/_5$ ....; а потому рядъ (1) приметъ видъ:

$$\text{arctg}u=u-{}^1/_3u^3+{}^1/_5u^5-\ldots..(3)$$

Этотъ рядъ будетъ сходящійся, если $u<1$ или $u=1$, т. е. для дугъ до 45° включительно.

Положивъ въ ряду (3) $u=1$ и слѣд. $\text{arctg}u=45^0={}^1/_4\pi$, будемъ имѣть ${}^1/_4\pi=1-{}^1/_3+{}^1/_5-{}^1/_7+\ldots..$

Этотъ рядъ сходится не быстро, и для полученія величины π съ достаточной точностью, надо бы вычислить слишкомъ много членовъ ряда.

Поэтому выведемъ для вычисленія π еще двѣ строки, болѣе удобныя.

1. Пусть $\text{tg}x={}^1/_2$, $\text{tg}z={}^1/_3$, или $x=\text{arctg}{}^1/_2$, $z=\text{arctg}{}^1/_3$; опредѣлимъ $\text{tg}(x+z)$. Такъ какъ $\text{tg}(x+z)=\frac{\text{tg}x+\text{tg}z}{1-\text{tg}x\text{tg}z}=\frac{{}^1/_2+{}^1/_3}{1-{}^1/_2\cdot{}^1/_3}=$ $=\frac{{}^5/_6}{1-{}^1/_6}=1$, то $x+z={}^1/_4\pi$, или ${}^1/_4\pi=\text{arctg}{}^1/_2+\text{arctg}{}^1/_3$.

Разложивъ по предъидущему $\text{arctg}{}^1/_2$ и $\text{arctg}{}^1/_3$, найдемъ

$${}^1/_4\pi=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{3.3^5}-\ldots\right).$$

Это разложеніе принадлежитъ Эйлеру.

2. Если $x=\text{arctg}{}^1/_5$, $z=\text{arctg}{}^1/_{239}$, то $4x-z=45^0$. Дѣйствительно, $\text{tg}2x=\frac{2\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}=\frac{2.{}^1/_5}{1-{}^1/_{25}}=\frac{{}^2/_5}{{}^{24}/_{25}}={}^5/_{12}$. $\text{tg}4x=\frac{2\text{tg}2x}{1-\text{tg}^22x}=\frac{{}^5/_6}{1-{}^{25}/_{144}}=$ $={}^{120}/_{119}$; слѣд. $\text{tg}(4x-z)=\frac{\text{tg}4x-\text{tg}z}{1+\text{tg}4x.\text{tg}z}=\frac{{}^{120}/_{119}-{}^1/_{239}}{1+{}^{120}/_{119}\cdot{}^1/_{239}}=1$. Итакъ $4\text{arctg}{}^1/_5-\text{arctg}{}^1/_{239}={}^1/_4\pi$.

Разложивъ $\text{arctg}{}^1/_5$ и $\text{arctg}{}^1/_{239}$, получимъ

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\ldots.\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\ldots\right).$$

Вычисливъ 5 членовъ перваго изъ этихъ рядовъ и 2 члена втораго, найдемъ $\pi=3{,}141593$.

Вычисленіе 15 членовъ перваго и шести членовъ втораго ряда даетъ величину π съ 20-ю десятичными знаками:

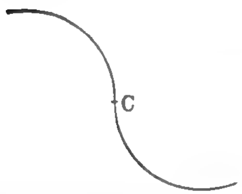
$$\pi=3{,}14159265358979323846.$$

335. Мы опредѣлили длину окружности и площадь круга на основаніи теоремъ, что окружность есть предѣлъ периметровъ, а кругъ предѣлъ площадей вписанныхъ и описанныхъ многоуг. Вторая изъ этихъ теоремъ доказана нами совершенно точно; первая же основана на *допущеніи*, что изъ двухъ выпуклыхъ линій внѣшняя больше внутренней. Теперь мы докажемъ это предложеніе.

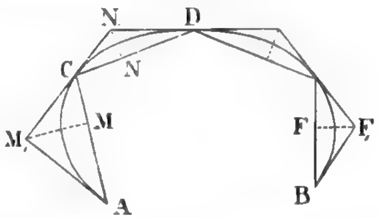
336. Мы уже говорили, что за длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго прав. мног. при увеличеніи числа сторонъ его. За длину кривой линіи вообще принимаютъ предѣлъ, къ которому приближается вписанная въ нее ломаная линія, когда каждая изъ прямыхъ, составляющихъ эту послѣднюю, приближается къ нулю. Чтобы можно было такъ опредѣлять длину кривой линіи, необходимо доказать, что предѣлъ для вписанной ломаной линіи дѣйствительно существуетъ и что онъ не зависитъ отъ того способа, по какому вписана эта линія, и отъ того, какимъ способомъ составляющія ее прямыя приближаются къ нулю; другими словами—надо доказать, что *для всѣхъ ломаныхъ, вписанныхъ въ кривую, существуетъ только одинъ предѣлъ*, если только всѣ прямыя, составляющія ее, приближаются къ нулю.

Чтобы облегчить доказательство этой теоремы, мы замѣтимъ, что при этомъ можно разсматривать кривыя, выпуклыя только въ одну сторону, потому что каждую кривую, которая выпукла не въ одну сторону, можно разбить на части, выпуклыя только въ одну сторону; напр. кривую, изображенную на чер. 400, можно въ точкѣ перегиба C раздѣлить на двѣ части, выпуклыя только въ одну сторону.

Чер. 400.



Чер. 401.



Итакъ пусть въ выпуклую кривую AB (чер. 401) вписана ломаная $ACD\ldots.$ Опишемъ соотвѣтствующую ей ломаную $AM_1N_1\ldots.$ Опустимъ изъ M_1, $N_1\ldots.$ перпендикуляры на соотвѣтствующія стороны $AC, CD\ldots$ вписанной ломаной; тогда отношеніе длины описан. ломаной къ длинѣ вписанной будетъ $\dfrac{AM_1+M_1C+CN_1+\ldots+F_1B}{AM+MC+CN+\ldots+FB.}$ Это отношеніе будетъ заключаться между наибольшимъ и наименьшимъ изъ отношеній $\dfrac{AM_1}{AM}$, $\dfrac{M_1C}{MC}$, $\dfrac{CN_1}{CN}\ldots\dfrac{F_1B}{FB}$.

Это можно доказать слѣдующимъ образомъ: возьмемъ нѣсколько отношеній:

$\dfrac{a_1}{b_1}=q_1$, $\dfrac{a_2}{b_2}=q_2$, $\dfrac{a_3}{b_3}=q_3$ и положимъ, что наибольшее изъ нихъ есть $\dfrac{a_1}{b_1}$; такъ какъ

$a_1=b_1q_1$, $a_2=b_2q_2$, $a_3=b_3q_3$, то

$a_1+a_2+a_3=b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3$, а

$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\dfrac{b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3}{b_1+b_2+b_3}$. Если во второмъ отношеніи вмѣсто q_2 и q_3 поставить бо́льшую величину, именно q_1, то это отношеніе увеличится, и слѣд. $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} < \frac{b_1q_1+b_2q_1+b_3q_1}{b_1+b_2+b_3}$

или $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} < \frac{q_1(b_1+b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}$, т. е.

$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} < q_1$. Подобнымъ образомъ докажемъ, что $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$ будетъ больше наименьшаго изъ отношеній $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$.

Каждое изъ отношеній $\frac{AM_1}{AM}$, $\frac{M_1C}{MC}$, $\frac{CN_1}{CN}$ ... стремится къ единицѣ при уменьшеніи сторонъ вписанной и описанной ломаныхъ. Чтобы показать это, возьмемъ напр. отношеніе $\frac{CN_1}{CN}$; на неизмѣняемой по величинѣ и положенію прямой ab (чер. 402) построимъ треуг. abc, у котораго уг. b прямой, а уголъ $a =$ $=$ уг. N_1CN. Такъ какъ треуг. $N_1CN \infty abc$, то $\frac{CN_1}{CN} = \frac{ac}{ab}$. Когда сторона CD ломаной будетъ приближаться къ нулю, то и уг. N_1CN, а равно и уг. a, также будутъ приближаться къ нулю, а слѣд. прямая ac будетъ приближаться къ ab, а отношеніе $\frac{ac}{ab}$ и равное ему отношеніе $\frac{CN_1}{CN}$ будутъ приближаться къ единицѣ.

Чер. 402.

Поэтому и отношеніе $\frac{AM_1+M_1C+\ldots+F_1B}{AM+MC+\ldots+FB}$, какъ заключающееся между двумя отношеніями, приближающимися къ единицѣ, само также приближается къ ней; иначе говоря, разность между длинами ломаныхъ, вписанной и описанной, будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія сторонъ ихъ къ нулю.

337. Положимъ теперь, что вписанная ломаная $ACD\ldots.B$ (чер. 401) такова, что съ увеличеніемъ числа сторонъ ея и слѣд. съ приближеніемъ ихъ къ нулю, въ число вершинъ каждой новой ломаной будутъ входить вершины предшествующей ей линіи. Тогда съ увеличеніемъ числа сторонъ длина ломаной будетъ увеличиваться, ибо каждая новая ломаная будетъ внѣшняя по отношенію къ предшествующей. Но возрастая непрерывно, ломаная $ACD\ldots B$ будетъ всегда оставаться меньше нѣкоторой ломаной, описанной около кривой AB; слѣд. она будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу L. Описанная же ломаная, при увеличеніи числа сторонъ, уменьшается, и такъ какъ ея отношеніе къ вписанной будетъ приближаться къ единицѣ, то и она будетъ стремиться къ тому же предѣлу L.

338 Положимъ, что у насъ вписано двѣ ломаныхъ линіи различнымъ образомъ, но такъ, что обѣ онѣ удовлетворяютъ тому же условію, какъ и линія $ACD\ldots.B$. Означимъ черезъ p и p_1 длины ихъ, че-

резъ P и P_1 длины соотвѣтствующихъ имъ описанныхъ ломаныхъ, и пусть L будетъ общій предѣлъ для p и P, а L_1—предѣлъ для p_1 и P_1. Такъ какъ каждая описанная линія больше вписанной, то $p<P_1$; слѣд. предѣлъ p, т. е. L, не можетъ быть больше предѣла P_1, т. е. L_1. Точно такъ же докажемъ, что и L_1 не можетъ быть больше L; слѣд. $L=L_1$; т. е. вписанныя и описанныя ломаныя имѣютъ одинъ предѣлъ.

339. Разсмотримъ наконецъ такую ломаную, которая при приближеніи сторонъ ея къ нулю, т. е. при увеличеніи числа сторонъ, не будетъ въ числѣ своихъ вершинъ заключать вершинъ предшествующей ей линіи.

Пусть въ кривую AB вписанъ рядъ такихъ ломаныхъ и пусть p длина одной изъ нихъ: а P—длина соотвѣтствующей ей описанной линіи. Такъ какъ отношеніе P къ p приближается къ единицѣ, то всегда можно взять въ обѣихъ ломаныхъ столько сторонъ, что разность $P-p$ будетъ меньше количества m, какъ бы мало ни было это послѣднее. Положимъ, что L есть предѣлъ вписанной ломаной такого же свойства, какъ прежде разсмотрѣнныя. Линія P, какъ внѣшняя, будетъ больше такой линіи, а слѣд. больше или по крайней мѣрѣ равна L. А такъ какъ $P-p<m$, то $p+m>P$ и слѣд. $p+m>L$ и $p>L-m$.

Съ другой стороны p меньше всякой описанной линіи, а слѣд. меньше и той описанной, которая имѣетъ предѣломъ L. Поэтому p или меньше или въ крайнемъ случаѣ равна L,. Такимъ образомъ $L-m<p<L$.

Такъ какъ m можетъ быть какъ угодно мало, то и разность между L и p можетъ быть сдѣлана меньше всякой, произвольно взятой, величины; т. е. и p имѣетъ тотъ же предѣлъ L, какой имѣетъ ломаная линія, удовлетворяющая прежнему условію. Такимъ образомъ *всѣ ломаныя линіи, вписанныя въ кривую, съ приближеніемъ сторонъ ихъ къ нулю стремятся къ одному и тому же предѣлу.*

Вышеизложенное доказательство принадлежитъ Бонне и заимствовано нами изъ Traité de géometrie élémentaire par Rouché et Comberousse.

340. Теперь легко уже доказать теорему, допущенную нами выше (§ 313), что всякая выпуклая кривая меньше внѣшней ломаной. Дѣйствительно, если въ кривую вписать ломаную, то эта ломаная будетъ меньше внѣшней ломаной; а слѣд. и предѣлъ ея, т. е. кривая линія, меньше внѣшней ломаной.

Замѣтимъ впрочемъ, что хотя мы и избѣгли принимать предъидущую теорему безъ доказательства, но все таки ввели нѣкоторый произволъ, принимая за длину кривой предѣлъ вписанной въ нее ломаной.

341. Задачи на вычисленіе.

Примѣч. Въ слѣдующихъ задачахъ отъ 1-й до 50-й принять $\pi={}^{22}/_{7}$.

1. Опредѣлить длину окружности при радіусѣ 28 арш.? при рад. $3^1/_2$ ф.?

2. Опредѣлить рад. окруж., которой длина=616 ф.? 11 арш.?

3. Опредѣлить длину дуги въ 72^0 при рад. $3^1/_2$ ф.? въ $11^015'$

при рад. $1\frac{1}{6}$ ф? въ 1^{0} при рад. 4,2 фут.? въ $22^{0}30'$ при рад. 28 дюйм.? въ $272^{0}48'$ при рад. $12\frac{1}{4}$?

4. Опредѣлить рад. дуги въ 154^{0} $30'$, если длина ея$=$113, 3 дюй? въ 36^{0}, если длина$=2\frac{1}{5}$ фут.? въ $5^{0}37'30''$, если длина$=1\frac{3}{8}$.

5. Опредѣлить число градусо̀въ, минутъ, секундъ въ дугѣ, которой длина$=$11 дюйм., а рад.$=26\frac{1}{4}$ дюйм.? длина$=16\frac{1}{2}$ дюйм., а рад. $=$1 саж.? въ дугѣ, равной радіусу?

6. Градусъ экватора$=$105 верс.; опредѣлить рад. земли?

7 Въ кругѣ, котораго рад.$=$7 дюйм., вписанъ прав. 6—къ; на сколько окружность больше его периметра?

8. Въ окружности, которой радіусъ $5\frac{1}{4}$ верш., вписанъ уголъ, опирающійся на дугу въ $4\frac{1}{8}$ вершка; опредѣлить уголъ?

9. Въ кругѣ рад. 5 дюйм. вписанъ уголъ въ 42^{0}; найти длину дуги, на которую онъ опирается?

10. Переднее колесо экипажа имѣетъ въ діаметрѣ $2\frac{1}{3}$ фута, а заднее въ $1\frac{1}{2}$ раза больше; сколько оборотовъ сдѣлаетъ то и другое на $5\frac{1}{2}$ верст.?

11. Въ кругѣ рад. 21 саж. вписанъ прав. 18—къ; найти длину дуги, стягиваемой его стороною?

12. Дуга, стягиваемая стороной прав. впис. 6—ка, равна $5\frac{1}{2}$ дюйм.; найти периметръ его?

13. Какое пространство проходитъ въ часъ каждая точка земнаго экватора вслѣдствіе обращенія земли около оси? Рад. экв.$=$6013 вер.

14. Сколько оборотовъ сдѣлаетъ на разстояніи 1 верс. 292 саж. колесо, котораго діаметръ$=2\frac{1}{4}$ фут.?

15. Наружная окружность цилиндрической башни$=$11 саж., а внутренняя$=$7 саж. 6 ф.; опредѣлить толщину стѣнъ?

16. Минутная стрѣлка башенныхъ часовъ имѣетъ въ длину $3\frac{1}{2}$ фута; какое пространство пройдетъ оконечность ея въ сутки?

17. Опредѣлить разстояніе между двумя городами, лежащими въ одной широтѣ и подъ долготой—одинъ 45^{0}, а другой 30^{0} къ востоку отъ Ферро, если рад. соотвѣтствующей имъ параллели$=$574 геогр. мил.?

18. Футъ мѣдной проволоки вѣситъ 12 золот.; изъ 2 фун. 28 зол. ея сдѣлано 10 одинакихъ колецъ; опредѣлить діам. каждаго кольца?

19. Надо сдѣлать зубчатое колесо 1 арш. въ діаметрѣ, притомъ такъ, чтобы разстояніе между срединами каждыхъ двухъ зубцовъ$=$4 дюй.; сколько выйдетъ зубцовъ?

20. Окружность больше діаметра на 25 дюй.; найти длину ея?

21. Дуга сектора$=90^{0}$; длина дуги меньше діаметра на 1 футъ: сколько арш. въ радіусѣ?

22. Для бѣга устроено мѣсто, ограниченное двумя концентрическими окружностями; внѣшняя$=$3,08 верст., а внутренняя$=$2 верст. 452 саж.; найти ширину бѣга?

23. Дворъ имѣетъ форму прямоугольника, на меньшей сторонѣ котораго описанъ полукругъ, находящійся внѣ прямоугольника; длина прямоуг.$=$24 саж., ширина на 5 саж. 1 арш. меньше. Сколько можно сдѣлать шаговъ вокругъ двора, если шагъ$=1\frac{1}{8}$ арш.?

24. Изъ вершины угла a радіусомъ$=$7 дюй. описана дуга$=7\frac{1}{2}$

дюй.; изъ вершины угла b описана радіусомъ$=\frac{1}{2}$ арш. дуга въ 11 дюй.; опредѣлить отношеніе угловъ?

25. Дворъ имѣетъ видъ прямоугольника, на меньшей сторонѣ котораго описанъ полукругъ, находящійся внѣ прямоугольника; длина прямоугольной части двора больше ширины на 5 саж.; вся граница двора$=74$ саж. Опредѣлить ширину двора?

26. Найти длину окружности, которая на 74 дюй. больше радіуса?

27. Опредѣлить площ. круга, котораго рад.$=1$ арш. 12 вершк.? котораго окружность$=44$ дюй.?

28. Найти рад. круга, котораго площадь$=616$ кв. фут.? $201\frac{1}{7}$ кв. верш.?

29. Вычислить въ квадр. дюйм. площ. сектора, котораго дуга содержитъ $22^0\ 30'$, а рад.$=1$ арш.?

30. Во сколько разъ площ. круга рад. 17,36 фут. меньше площ. круга рад. 12,4 саж.?

31. Опредѣлить площ. кольца, заключающагося между двумя концентрическими окружностями, если одна изъ нихъ$=1$ верс. 435 саж.; а радіусъ другой меньше, чѣмъ первой, на 10 саж. $1\frac{1}{2}$ арш.?

32. Площадь, имѣющую форму круга, котораго діаметръ$=140$ саж., хотятъ вымостить каменными плитами: плиты имѣютъ видъ прямоугольниковъ въ 1 арш. длины и 21 дюймъ ширины; каждая плита стòитъ 50 коп., а за работу просятъ по 30 коп. съ квадр. саж., считая въ томъ числѣ цементъ, песокъ и вообще матеріалы, нужные для работы. Во что обойдется мощеніе площади?

33. Опредѣлить площ. круга, вписаннаго въ квадратъ, котораго площ.$=49$ кв. верш.?

34. Найти разность между площ. круга, котораго радіусъ$=1$, и площадьми впис. и опис. квадрата?

35. Деревянный щитъ, имѣющій видъ круга, котораго рад.$=3\frac{1}{2}$ арш., надо обить съ обѣихъ сторонъ мѣдными листами; сколько пойдетъ на это прямоугольныхъ листовъ въ $1\frac{1}{3}$ ф. длины и 11 дюйм. ширины?

36. Площ. сектора$=51\frac{1}{3}$ кв. дюй.; радіусъ$=\frac{1}{2}$ арш.; опредѣлить число градусовъ дуги сектора?

37. Опредѣлить радіусъ сектора, если площ. его$=19\frac{1}{4}$ кв. дюй., а дуга$=45^0$? площ.$=12,8333....$, а дуга$=120^0$?

38. Взятъ листъ мѣди, имѣющій видъ квадрата, котораго сторона$=1$ арш.; въ этотъ квадратъ вписаны 4 круга, касающіеся между собой и къ сторонамъ квадрата; затѣмъ круги эти вырѣзаны; вѣсъ листа $=6$ фун. 18 лот.; опредѣлить вѣсъ обрѣзковъ ?

39. Секторъ, котораго дуга$=90^0$, равновеликъ кругу радіуса 14 дюй.; найти рад. сектора?

40. Опредѣлить въ кв. дюйм. площ. сегмента, котораго дуга$=30^0$, а рад.$=5\frac{1}{4}$ фут.?

41. Площ. одного круга$=12,96$ кв. дюйм., а другаго$=1,44$ кв. дюй.; опредѣлить отношеніе ихъ радіусовъ?

42. Желѣзный листъ вѣсомъ $10\frac{1}{2}$ фун. представляетъ квадратъ, котораго сторона$=1\frac{1}{2}$ арш.; въ этотъ квадратъ вписываемъ кругъ; затѣмъ радіусомъ, вдвое меньшимъ, проводимъ кругъ, концентриче-

скій съ первымъ; затѣмъ оба круга вырѣзаемъ; опредѣлить вѣсъ полученнаго желѣзнаго кольца?

43. Опредѣлить отношеніе площадей круговъ, которыхъ окружности суть $2^3/_4$ фут. и 16,5 дюйм.?

44. Рад. одного круга = 5, а другаго = 4 ф.; опредѣлить рад. круга, котораго площадь = разности площадей двухъ первыхъ круговъ?

45. Изъ вершины угла въ 45^0 описаны двѣ дуги, изъ которыхъ одна втрое длиннѣе другой; сумма же ихъ = 44 дюй.; опредѣлить величину площади между дугами и сторонами угла?

46. Сумма площадей двухъ круговъ = $^{75}/_{14}$, а разность ихъ = $^{33}/_{14}$ кв. арш.; вычислить радіусы круговъ?

47. Поле имѣетъ видъ сектора, котораго радіусъ = $^3/_4$ версты, а уголъ = 84^0; сколько десятинъ въ полѣ?

48. Дуга сектора = 90^0; длина ея на 3 фута больше діаметра; опредѣлить площ. сектора?

49. Имѣемъ 3 круга; рад. одного = 7, другаго = 14 дюй.; окружность третьяго круга = суммѣ первыхъ двухъ окружностей. На сколько площадь третьяго круга больше или меньше суммы площадей двухъ первыхъ круговъ?

Примѣч. Во всѣхъ слѣдующихъ задачахъ на вычисленіе принять $\pi = 3,1415$.

50. Опредѣлить окружность, если рад. = 10 ф.? 2,5 дюйм.? 210?

51. Опредѣлить радіусъ, если окружность = 9,4245 ф.? 500 дюйм.?

52. Опредѣлить длину дуги въ $38^0 6' 40''$ при рад. 150 дюйм.? въ $48^0 20'$ при рад. въ 18 фут.?

53. Опредѣлить число градусовъ дуги, если длина ея = 50, а рад. = 125? длина = 21, а рад. = $17^1/_2$?

54. Опредѣлить рад. дуги въ 45^0, если длина ея = 60?

55. Опредѣлить площ. круга, котораго рад. = 10 ф.? 2,5 дюй.? 210?

56. Опредѣлить площ. круга, если окружность = 9,4245 ф.? 500 дюйм.?

57 Опредѣлить радіусъ и окружность круга, котораго площ. = 201,056 кв. ф.? 144 кв. дюйм.?

58. Опредѣлить площ. кольца, заключеннаго между концентрическими окружностями, которыхъ рад. 80 и 60 фут.? 12,6 и 6,3 дюй.?

59. Опредѣлить площ. сектора, котораго дуга = $38^0 6' 40''$, а рад. = 150 дюйм.? дуга = $48^0 20'$, рад. = 18 ф.?

60. Площ. сектора = 125; рад. = 15; опредѣлить уголъ сектора и длину дуги его?

61. Дуга сектора содержитъ 45^0; длина ея = 60; опредѣлить площ. сектора?

62. Площ. сектора $s = 576$ кв. дюйм., длина дуги = $l = 20$ дюйм.; опредѣлить радіусъ r и число n градусовъ въ дугѣ сектора?

63. Дуга сектора содержитъ $n = 50^0$; площ. $s = 90$ кв. ф.; опредѣлить длину l дуги и радіусъ r?

64. Опредѣлить длину l дуги и площ. s сектора, котораго центральный уголъ $n = 125^0$, если площ. S всего круга = 1,2566?

65. Опредѣлить площ. s и уголъ n сектора, котораго дуга $l = 20$ дюйм., если площ. S всего круга = 452,376 кв. дюйм.?

66. Площ. s сектора $= 576$, а площ. S цѣлаго круга $= 1000$; опредѣлить длину l дуги и уголъ n сектора?

67. Опредѣлить длину l дуги и площ. s сектора, если уголъ его $n = 48°20'$, а длина c окружности $= 660$?

68. Опредѣлить число градусовъ n и длину l дуги сектора, если площ. его $s = 180$, а длина c окружности $= 560$?

69. Опредѣлить число градусовъ n и площадь s сектора, если длина l дуги его $= 72$, а длина c окружности $= 320$?

70. Опредѣлить площадь сегмента, котораго рад. $= 1$, если дуга его $= 90°$? $45°$? $60°$? $30°$? $120°$? $150°$? $18°$?

71. Площ. сегмента, котораго дуга $= 18°$, равна 0,01 кв. дюйм.; опредѣлить радіусъ?

72. Опредѣлить длину окружности и площадь круга, описаннаго около прямоугольника, котораго стороны 2,1 и 2,8? около квадрата, котораго площадь $= 0,25$? около прав. треуг., котораго сторона $= 0,6$? около прав. 10—ка, котораго сторона $= 1$?

73. Опредѣлить площ. такого круга, котораго окружность на 8,566 ф. больше своего діаметра?

74. Внутри круга, котораго рад. $= 4,8$ ф., проведены два равныхъ непересѣкающихся круга такъ, что остающаяся часть даннаго круга $=$ его половинѣ; опредѣлить радіусы этихъ круговъ?

75. Найти площ. сегмента, соотвѣтствующаго сторонѣ прав. 5-ка, если окружность $= 1$?

76. Найти площ. сегмента, соотвѣтствующаго сторонѣ прав. 10-ка, если площ. круга $= 1$?

77. Въ кругѣ, котораго рад. $= 1$, проведены двѣ параллельныя хорды, соотвѣтствующія центральнымъ угламъ въ $90°$ и $120°$. Найти площадь части круга, заключенной между этими хордами?

78. Площ. кольца между двумя концентрическими окружностями $= 50,264$; а разность этихъ окружностей $= 12,566$; опредѣлить ихъ радіусы?

79. Сумма площадей двухъ концентрическихъ круговъ $= 106,811$; а разность ихъ окружностей $= 12,566$; опредѣлить площ. кольца?

80. Изъ вершины угла въ $45°$ описаны дуги рад. 8,4 и 3,6; опредѣлить площ. образовавшагося концентрическаго сектора (т. е. площадь, заключенную между сторонами угла и дугами)?

81. Радіусы концентр. сектора (см. зад. 80) суть 3,6 и 2,4; а площадь $= 3,7698$; опредѣлить центральный уг.?

82. Площ. концентр. сектора (см. зад. 80) $= 1,2566$; уг. при центрѣ $= 20°$; рад. меньшей дуги $= 2,4$; опредѣлить радіусъ большей дуги?

83. Кругъ, котораго рад. равенъ 1, раздѣленъ пополамъ концентрической окружностью; опредѣлить ея радіусъ?

84. Рад. круга $= 1$; опредѣлить радіусы концентр. окружностей, которыя бы дѣлили этотъ кругъ на части въ отношеніи 1 : 2 : 3?

85. Три окружности, которыхъ радіусы 14, 7 и 3, находятся во внѣшнемъ прикосновеніи; опредѣлить площадь круга, проходящаго черезъ ихъ центры?

86. Изъ точки внѣ окружности проведены сѣкущая и касательная;

касательная = 14,4; сѣкущая проходитъ черезъ центръ, и внѣшняя часть ея = 2, 4; опредѣлить длину окружности?

87. Двѣ окружности, которыхъ радіусы равны каждый 1, пересѣкаются такъ, что разстояніе между центрами = радіусу; опредѣлить площадь, общую обоимъ кругамъ?

88. Двѣ окружности, которыхъ радіусы 1 и 2, пересѣкаются такъ, что хорда пересѣченія = радіусу бо̀льшей окружности; опредѣлить площадь, общую обоимъ кругамъ?

89. Катетъ равнобедр прямоуг. треуг. = 1; изъ вершинъ прямаго и одного изъ острыхъ угловъ этого треуг. описаны окружности — первая радіусомъ = катету, вторая радіусомъ = гипотенузѣ; опредѣлить 1) площадь, ограниченную внѣшними частями обѣихъ окружностей; 2) площадь, лежащую между внутренними частями обѣихъ окружностей, и 3) площадь той части втораго круга, которая лежитъ внѣ перваго?

90. Площадь круга, котораго рад. = 1, раздѣлена на 9 равныхъ частей концентрическими окружностями; опредѣлить радіусы этихъ окружностей?

342. Доказать теоремы:

1. Въ двухъ неравныхъ окружностяхъ длины дугъ относятся какъ произведенія ихъ радіусовъ на центральные углы; а центральные углы прямо пропорціональны дугамъ и обратно пропорціональны радіусамъ.

2. Подобные (т. е. содержащіе одно число градусовъ) секторы и сегменты двухъ круговъ относятся какъ квадраты радіусовъ.

3. Если въ кругѣ провести хорду и въ конечную точку ея провести радіусъ, а на радіусѣ описать кругъ, принявъ этотъ радіусъ за діаметръ, то площади сегментовъ, отрѣзанныхъ хордой отъ обоихъ круговъ, относятся какъ 4 : 1.

4. Если діаметръ круга раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей и на каждой части описать по кругу, то сумма ихъ окружностей равна окружности взятаго круга.

5. Если на радіусахъ квадранта (четверти круга) описать внутри квадранта полукруги, то общая часть ихъ = той части квадранта, которая лежитъ внѣ обоихъ полукруговъ.

6. Если на хордѣ квадранта описать полукругъ такъ, чтобы полуокружность его была внѣ квадранта, то площ. образовавшейся лунообразной фигуры будетъ = площади треуг., образованнаго хордой квадранта и его радіусами.

7. Если двѣ хорды круга пересѣкаются подъ уг. 90^0, то сумма площадей круговъ, діаметрами которыхъ служатъ отрѣзки хордъ, равна площ. даннаго круга.

8. Если къ двумъ равнымъ, касающимся извнѣ, кругамъ провести общую касательную и на ней описать полукругъ такъ, чтобы его полуокружность была внѣ данныхъ круговъ, то площадь, заключенная между тремя окружностями, будетъ = площ. квадрата, вписаннаго въ одинъ изъ данныхъ круговъ.

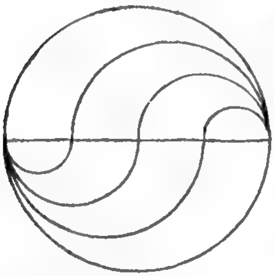
9. Если діаметръ полукруга раздѣлить на двѣ произвольныя части и на каждой внутри даннаго полукруга описать по полукругу, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будетъ равна

площ. круга, діаметръ котораго$=$перпендикуляру, возставленному изъ точки дѣленія.

10. Если полуокружность раздѣлить на 3 равныя части и точки дѣленій соединить съ однимъ изъ концовъ діаметра, то площадь, ограниченная соединительными линіями и дугой, между ними заключенной, $= \frac{1}{6}$ площ. полукруга.

11. Если діаметръ круга раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и на каждой части описать по разныя стороны діаметра полуокружности, то кривая линія, составленная этими полуокружностями, раздѣлитъ кругъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Чер. 403.



12. Если діаметръ круга (чер. 403) раздѣлить на n равныхъ частей, и начиная отъ одного конца его описать послѣдовательно полуокружности на $\frac{1}{n}$, на $\frac{2}{n}$.... частяхъ по одну сторону діаметра, а по другую его сторону сдѣлать тоже самое отъ другаго конца, то образовавшіяся кривыя раздѣлятъ кругъ на n равновеликихъ частей.

343. Задачи на построеніе.

1. Построить окружность, которая была бы въ n разъ больше или меньше данной окружности, которой радіусъ $= r$?

2. Построить окружность, равную суммѣ или разности двухъ данныхъ окружностей рад. r и r_1?

3. Построить кругъ, котораго площадь была бы въ n разъ больше или меньше площ. даннаго круга рад. r?

4. Построить кругъ, котораго площ.$=$суммѣ площ. нѣсколькихъ данныхъ круговъ? равна разности двухъ данныхъ круговъ?

5. Раздѣлить кругъ радіуса r на n равновеликихъ частей концентрическими окружностями?

ЧАСТЬ II

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

О прямыхъ линіяхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ.

344. Взаимное положеніе прямыхъ линій и плоскостей. Плоскостью наз. поверхность, по которой можно представить себѣ прямыя линія во всякомъ направленіи; иначе говоря — плоскость есть такая поверхность, что всякая *прямая линія*, имѣющая съ ней двѣ общія точки, совпадаетъ съ ней и всѣми прочими своими точками (или вся лежитъ въ этой плоскости). Плоскость есть поверхность неограниченная.

345. Прямая линія можетъ относительно плоскости имѣть три положенія:

1. *Прямая можетъ имѣть съ плоскостью двѣ общія точки*; тогда, какъ мы видѣли, она совпадаетъ съ плоскостью и всѣми остальными своими точками.

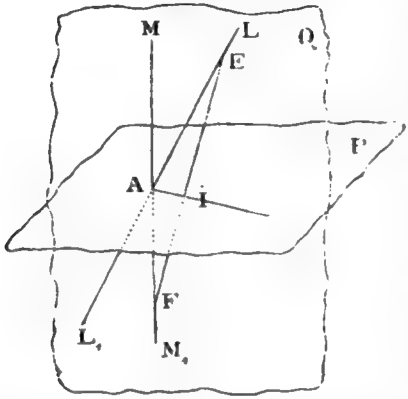
2. *Прямая можетъ имѣть съ плоскостью только одну общую точку;* тогда прямая пересѣкаетъ плоскость. Точка пересѣченія прямой съ плоскостью наз. *основаніемъ* прямой.

3. Прямая можетъ не имѣть общихъ точекъ съ плоскостью, и какъ бы далеко ни продолжали прямую линію и плоскость, онѣ не пересѣкутся между собою; тогда прямая линія и плоскость параллельны между собою.

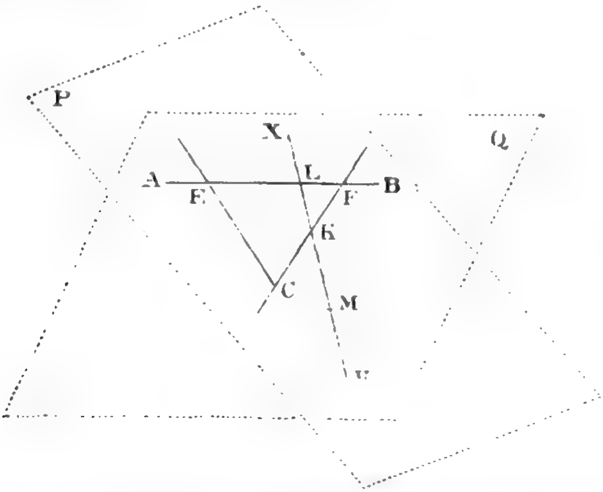
346. *Если двѣ плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ и общую прямую линію, проходящую черезъ эту точку.* Пусть точка A (чер. 404) лежитъ на плоскостяхъ P и Q; докажемъ, что эти плоскости имѣютъ еще общую прямую AI. Проведемъ въ плоскости Q черезъ точку A двѣ прямыя LAL_1 и MAM_1. Если одна изъ этихъ прямыхъ будетъ имѣть съ плоскостью P еще общую точку кромѣ A, то эта прямая будетъ лежать въ одно и тоже время и въ плоскости P и въ плоскости Q; слѣд. плоскости P и Q будутъ имѣть общую прямую—и теорема доказана.

Если же ни одна изъ этихъ прямыхъ не будетъ имѣть другихъ общихъ точекъ съ плоскостью P кромѣ только точки A, то обѣ эти прямыя будутъ пересѣкать плоскость P, и одна часть каждой прямой будетъ находиться надъ плоск. P, а другая подъ ней. Возьмемъ на прямой LAL_1 какую нибудь точку E надъ плос. P, а на прямой MAM_1 точку F подъ плос. P и соединимъ эти точки прямой линіей EF. Эта прямая будетъ лежать въ плоскости Q, ибо имѣетъ съ ней двѣ общія точки. Кромѣ того, прямая EF, проходя изъ части пространства надъ плоскостью P въ часть пространства подъ этой плос., пересѣчетъ плос. P въ какой либо точкѣ I. Эта точка I будетъ находиться на плос. P и на плос. Q. Такимъ образомъ плоскости P и Q имѣютъ *двѣ общія* точки A и I, а слѣд. имѣютъ и *общую прямую* AI.

Чер. 404.



Чер. 405.



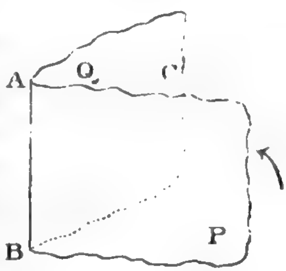
347. *Двѣ плоскости, имѣющія общую прямую линію и общую точку внѣ этой прямой, совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи.* Пусть (чер. 405) плоскости P и Q имѣютъ общую прямую AB и общую точку C. Проведемъ черезъ точку C и черезъ двѣ произвольныя точки E и F линіи AB прямыя CE и CF; эти прямыя будутъ общими для плоскостей P и Q, ибо каждая изъ прямыхъ съ каждой изъ плоскостей имѣетъ двѣ общія точки—C и E,

C и F. Возьмемъ теперь на плоскости P произвольную точку M и докажемъ, что эта точка лежитъ также и въ плоскости Q. Для этого по плос. P проведемъ черезъ M прямую XY. Эта прямая должна пересѣчь по крайней мѣрѣ двѣ изъ прямыхъ AB, CE и CF; пусть L и K будутъ точки пересѣченія XY съ AB и CF. Точки L и K находятся на прямыхъ AB и CF, лежащихъ въ плос. Q; слѣд. эти точки находятся въ плос. Q; а потому и прямая XY, проходящая черезъ нихъ, также лежитъ въ плос. Q; слѣд. и точка M прямой XY лежитъ въ плос. Q. Такимъ же образомъ можно показать, что всякая точка, произвольно взятая на плоскости Q, лежитъ и въ плос. P; т. е. всѣ точки обѣихъ плоскостей суть точки общія и слѣд. плоскости P и Q совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что двѣ не совпадающія плоскости могутъ имѣть общую прямую линію; иначе говоря—*двѣ плоскости могутъ пересѣкаться по прямой линіи;* или же двѣ плоскости могутъ совсѣмъ не имѣть общихъ точекъ; въ такомъ случаѣ онѣ *параллельны* между собою.

348. *Можно провести плоскость, и притомъ только одну,* 1) *черезъ прямую линію и точку внѣ ея;* 2) *черезъ три точки, не лежащія на одной прямой;* 3) *черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя;* 4) *черезъ двѣ параллельныя прямыя.*

Чер. 406.



1. Пусть AB (чер. 406) данная прямая, а C—данная точка. Вообразимъ черезъ прямую AB произвольную плоскость P, и пусть эта плоскость вращается около AB по направленію, указанному стрѣлкою; тогда, очевидно, плоскость приметъ такое положеніе Q, при которомъ она пройдетъ черезъ точку C. Итакъ черезъ прямую AB и точку C *можно* провести плоскость. Другой плоскости черезъ AB и точку C провести нельзя; дѣйствительно, если бы мы допустили, что кромѣ Q можно провести еще плоскость, то пришли бы къ заключенію, что двѣ плоскости, имѣющія общую прямую AB и общую точку C внѣ этой прямой, не совпадаютъ; а это заключеніе противорѣчитъ предыдущей теоремѣ.

2. Второе условіе приводится къ первому, если черезъ двѣ изъ данныхъ трехъ точекъ вообразимъ прямую линію.

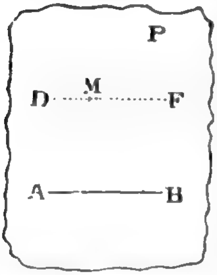
3 и 4. Остальныя два условія такъ же можно свести къ первому.

349. Взаимное положеніе двухъ прямыхъ линій въ пространствѣ можетъ быть троякое:

1. ***Двѣ прямыя могутъ заключаться въ одной плоскости и пересѣкаться между собою.***

2. ***Двѣ прямыя могутъ лежать въ одной плоскости и быть параллельны между собою.*** Легко показать, что и въ пространствѣ можно черезъ данную точку M (чер. 407) провести параллель къ данной прямой AB, и притомъ только одну. Дѣйствительно, черезъ M и AB (чер. 407) можно провести плоскость P; а въ этой плоскости можно провести черезъ M прямую $DF \parallel AB$. Другой параллели къ AB изъ точки M провести нельзя, ибо по предъидущему всякая линія, параллельная AB и проходящая черезъ M, должна заключаться въ плоскости P; а въ одной плоскости, какъ извѣстно изъ Планиметріи, можно черезъ данную точку провести только одну параллель къ данной прямой линіи.

Чер. 407.

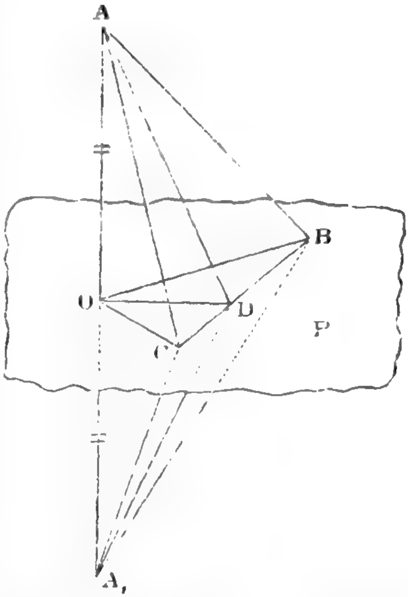


3. Наконецъ ***двѣ прямыя въ пространствѣ могутъ не заключаться въ одной плоскости; тогда онѣ и не параллельны и не пересѣкаются.***

Дѣйствительно, вообразимъ себѣ въ пространствѣ двѣ прямыя линіи AB и CD. Проведемъ черезъ прямую AB и черезъ точку D прямой CD плоскость P. Если эта плоскость заключаетъ въ себѣ прямую CD, то прямыя AB и CD будутъ или параллельны или пересѣкутся. Но можетъ случиться также, что плоскость P пересѣчетъ прямую CD въ точкѣ D; тогда прямыя AB и CD не могутъ заключаться въ одной плоскости, ибо такая плоскость, имѣя съ плос. P общую прямую AB и общую точку D, должна совпадать съ P: а P, какъ мы положили, только пересѣкаетъ прямую CD. Прямыя AB и CD, не находясь въ одной плоскости, не могутъ ни пересѣкаться, ни быть параллельными, ибо въ обоихъ этихъ случаяхъ онѣ должны заключаться въ одной плоскости.

350. Прямыя перпендикулярныя и наклонныя къ плоскости. *Если прямая линія перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ по плоскости черезъ ея основаніе, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой, проведенной въ тойже плоскости черезъ ея основаніе.* Пусть (чер. 408) $AO \perp OB$ и $AO \perp OC$; докажемъ, что $AO \perp$ и къ какой нибудь третьей прямой OD, проведенной по плоскости P черезъ основаніе O перпендикуляра AO. Для этого надо доказать, что уголъ AOD прямой, т. е. что онъ равенъ своему смежному углу. Поэтому мы продолжимъ прямую AO за точку O и сравнимъ углы AOD и A_1OD, для чего заключимъ ихъ въ треугольники, притомъ въ такіе, чтобы у этихъ треугольниковъ были по двѣ равныя стороны и чтобы между этими сторонами заключались углы AOD и A_1OD. Съ этой цѣлью отложимъ $OA_1 = OA$ и соединимъ точки A и A_1 съ какой нибудь точкой D линіи OD; тогда въ треуг. AOD и A_1OD сторона OD общая. а $AO = A_1O$, и чтобы доказать, что уголъ $AOD = A_1OD$, надо доказать, что сторона $AD = A_1D$. Поэтому заключаемъ AD и A_1D въ другіе треугольники, соединивъ точки A и A_1 съ какой нибудь точкой B прямой OB. Въ полученныхъ треуг. ADB и A_1DB сторона DB общая, $AB = A_1B$, какъ наклонныя, проведенныя въ одинаковыхъ разстояніяхъ AO и A_1O отъ перпендикуляра OB къ линіи AA_1. Чтобы узнать, равны ли треугольники ADB и A_1DB, надо узнать, равны ли углы ABD и A_1BD; заключимъ эти углы въ новые треугольники, для чего продолжимъ BD и OC до пересѣченія въ точкѣ C и соединимъ C съ A и A_1.

Чер. 408.



Въ треуг—хъ ABC и A_1BC сторона BC общая. $AB = A_1B$, какъ указано выше; $AC = A_1C$ по такой же причинѣ; слѣд. треуг. $ABC = A_1BC$, потому и уг. $ABD =$ уг. A_1BD, треуг. $ABD = A_1BD$, сторона $AD = A_1D$, треуг. $AOD = A_1OD$ и уг. $AOD =$ уг. A_1OD. Итакъ уг. AOD прямой и $AO \perp OD$.

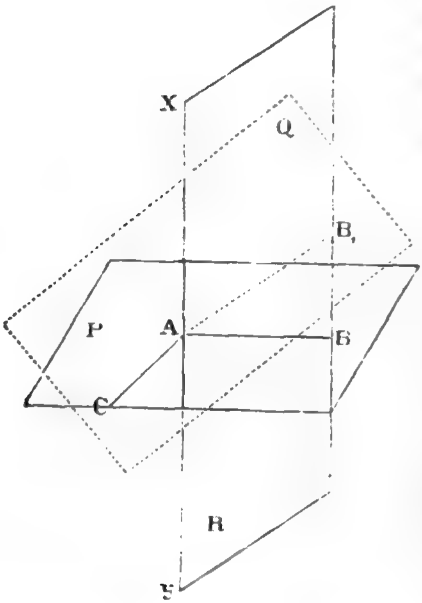
Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что прямая $AO \perp$ ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ по плоскости P черезъ ея основаніе O; такая прямая наз. перпендикулярною къ плоскости P; поэтому предъидущую теорему можно выразить такъ: *если прямая линія перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ по плоскости черезъ ея основаніе, то она перпендикулярна и къ самой плоскости.* Прямая линія, неудовлетворяющая этимъ условіямъ и не параллельная плоскости, наз. *наклонной* къ плоскости.

351. *Черезъ данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную къ данной прямой линіи, и притомъ только одну.*

1. Пусть данная точка A (чер. 409) находится на данной прямой XY. Вообразимъ двѣ плоскости, проходящія черезъ прямую XY, и возставимъ въ каждой изъ нихъ къ прямой XY изъ точки A по перпендикуляру AB и AC. Плоскость P, проходящая черезъ AB и AC, будетъ по предъид. теоремѣ $\perp XY$. Другой плоскости, перпендикулярной къ XY, черезъ точку A провести нельзя. Действи-

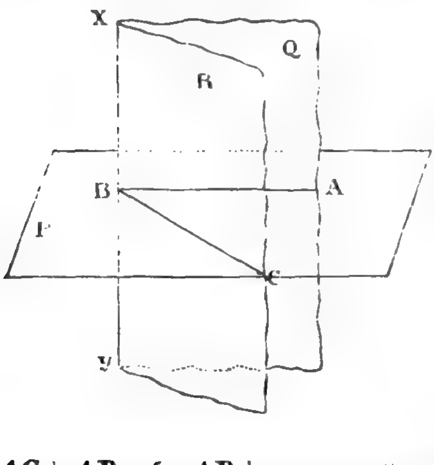
тельно, если мы положимъ, что напр. и плос. $Q \perp XY$ въ точкѣ A, то всякая плоскость R, проходящая черезъ XY, будетъ пересѣкать плоскости P и Q по линіямъ AB и AB_1, перпендикулярнымъ къ XY въ точкѣ A, и такимъ образомъ окажется, что изъ точки A къ прямой XY въ одной и той же плос. R возставлено два перпендикуляра.

Чер. 409.



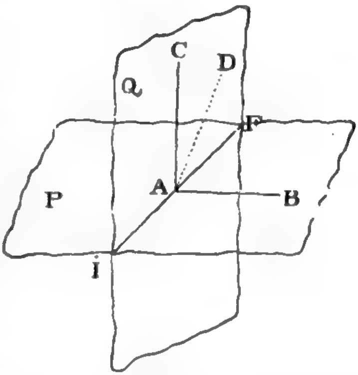
2. Пусть данная точка A (чер. 410) лежитъ внѣ прямой XY. Вообразимъ черезъ A и XY плоскость Q и проведемъ въ ней прямую $AB \perp XY$. Затѣмъ проведемъ черезъ прямую XY еще плос. R и возставимъ въ этой плоскости изъ точки B перпендикуляръ BC къ линіи XY. Плоскость P, проходящая черезъ AB и BC, будетъ $\perp XY$ и будетъ проходить черезъ точку A. Что черезъ точку A нельзя провести другой плоскости $\perp XY$ — въ этомъ можно подобно предъидущему убѣдиться способомъ приведенія къ нелѣпости.

Чер. 410.



352. ***Изъ точки, данной на плоскости, можно къ этой плоскости возставить перпендикуляръ, и притомъ только одинъ.*** Пусть (чер. 411) на плоскости P дана точка A. Проведемъ черезъ A по плоскости P произвольную прямую AB и проведемъ плоскость $Q \perp AB$ въ точкѣ A. Пусть сѣченіе этой плоскости съ P будетъ прямая IF. Проведемъ въ плоскости Q линію $AC \perp IF$; тогда AC будетъ перпендикулярна и къ плос. P. Дѣйствительно, $AC \perp AB$, ибо $AB \perp$ къ плос. Q, въ которой лежитъ AC; сверхъ того AC мы провели перпендикулярно къ линіи IF; поэтому AC, перпендикулярная къ двумъ линіямъ IF и AB, лежащимъ въ плоскости P, будетъ перпендикулярна и къ самой плос. P.

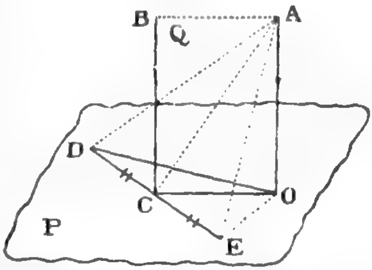
Чер. 411.



Если допустимъ, что кромѣ AC можно къ плоскости P возставить еще перпендикуляръ AD, то придемъ къ нелѣпому заключенію, что плос. Q, проходящая черезъ AC и AD, пересѣкаетъ плос. P по линіи IF, къ которой въ одной и той же плоскости Q проведены изъ точки A два перпендикуляра AC и AD.

353. ***Прямая линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама перпендикулярна къ этой плоскости.*** Пусть (чер. 412) $AO \perp$ плос. P и $BC \parallel AO$; докажемъ, что $BC \perp P$. Проведемъ черезъ AO и BC плоскость Q; она пересѣчетъ P по прямой линіи OC, которая, пересѣкая AO, пересѣчетъ также и BC, параллельную AO; слѣд. BC пересѣчетъ плоскость P. Такъ какъ $AO \perp$ пл. P, то $AO \perp OC$; а $BC \parallel AO$, слѣд. и $BC \perp OC$. Для доказательства того, что $BC \perp P$, надо доказать, что $BC \perp$ еще къ какой нибудь линіи, проходящей по плос. P черезъ точку C. Для этого проведемъ по плос. P черезъ точку C прямую $DE \perp CO$; прямая BC, какъ сейчасъ докажемъ, будетъ $\perp$ къ DE. Если мы докажемъ, что $DE \perp$ плос. Q, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ, что $DE \perp BC$, ибо линія BC проходитъ по плоскости Q черезъ основаніе C линіи DE. Такъ какъ линія DE проведена перпендикулярно къ линіи CO, лежащей въ плос. Q, то для доказательства того, что $DE \perp Q$, надо доказать, что $DE \perp$ еще къ какой либо линіи, проведенной въ плоскости Q, напр. къ линіи AC, которую получимъ, соединивъ какую нибудь точку A прямой AO съ точкой C; иначе говоря, надо доказать, что уголъ $ACD =$ уг. ACE. Заключаемъ эти углы въ треугольники, отложивъ $CE = CD$ и соединивъ E и D съ A; въ треуг. ACD и ACE сторона AC общая, $CD = CE$ по отложенію, и для доказательства равенства этихъ треуг. надо доказать, что $AD = AE$. Заключимъ эти линіи въ другіе треугольники, соединивъ точки D и E съ O; треуг. $AOD = AOE$. ибо AO общая, уг. $AOD = AOE$ какъ

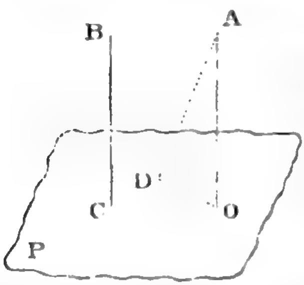
Чер. 412



прямые ($AO \perp$ плос. P, слѣд. $AO \perp OD$ и $AO \perp OE$). $OD = OE$ какъ наклонныя къ DE, проведенныя въ равныхъ разстояніяхъ отъ основанія C перпендикуляра OC. Слѣд. $AD = AE$, треуг. $ACD = ACE$ и уг. $ACD =$ уг. ACE, т. е. $DE \perp CA$. Итакъ $DE \perp CO$ и $DE \perp CA$; слѣд. $DE \perp$ плос. Q, а потому $DE \perp CB$. А прямая CB, перпендикулярная къ CO и DE, будетъ перпендикулярна и къ плос. P.

354. ***Изъ точки, лежащей внѣ плоскости, можно на эту плоскость опустить перпендикуляръ, и притомъ только одинъ.***

Чер. 413.

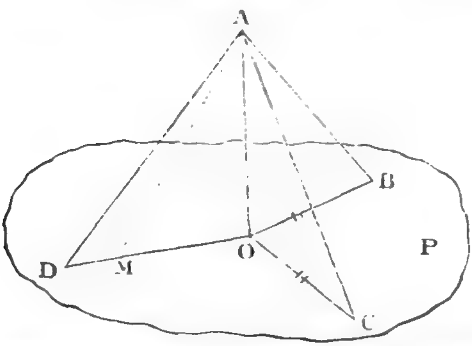


Пусть A (чер. 413) есть точка, данная внѣ плос. P. Возьмемъ на плос. P произвольную точку C и возставимъ изъ нея къ плос. P перпендикуляръ CB; если изъ A проведемъ $AO \parallel BC$, то по предъид. теоремѣ $AO \perp$ плос. P.

Допустивъ, что изъ A можно на плос. P опустить еще перпендикуляръ AD и проведя черезъ AO и AD плоскость, придемъ къ нелѣпому заключенію, что въ этой плоскости изъ точки A на линію DO, представляющую сѣченіе проведенной плоскости съ плос. P, опущено два перпендикуляра.

355. ***Если изъ точки, лежащей внѣ плоскости, опущенъ на плоскость перпендикуляръ и проведено нѣсколько наклонныхъ, то 1) перпендикуляръ короче всякой наклонной; 2) наклонныя, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра, равны между собою; 3) изъ двухъ наклонныхъ та больше, которая дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*** Пусть (чер. 414) $AO \perp$ плос. P; $OB = OC$; $OD > OB$.

Чер. 414.



1) $AO \perp OB$, а AB наклонна къ OB, слѣд. $AO < AB$.

2) Треуг. $AOB = AOC$, ибо AO общая, $OB = OC$ по условію и углы при O прямые; слѣд. $AB = AC$.

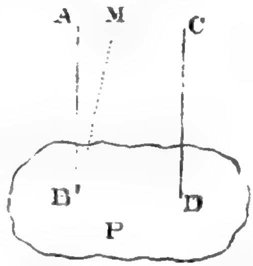
3) Отложивъ $OM = OB$, получимъ двѣ наклонныхъ AM и AD къ прямой OD, и такъ какъ AD дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра AO къ OD, то $AD > AM$. Но $AM = AB$, слѣд. $AD > AB$.

Обратныя теоремы тоже справедливы.

Слѣдствіе. *Перпендикуляръ, опущенный изъ точки на плоскость, есть кратчайшее разстояніе отъ точки до плоскости*, и разстояніе между точкой и плоскостью измѣряется перпендикуляромъ.

356. Параллельныя прямыя линіи и плоскости. *Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, параллельны между собою.* Пусть (чер. 415) $AB \perp$ плос. P и $CD \perp P$. Допустивъ, что AB не $\parallel CD$, мы могли бы изъ B провести $BM \parallel CD$, и BM (§ 353) должна быть $\perp$ плос. P; такимъ образомъ имѣли бы изъ точки B два перпендикуляра BA и BM къ плос. P.

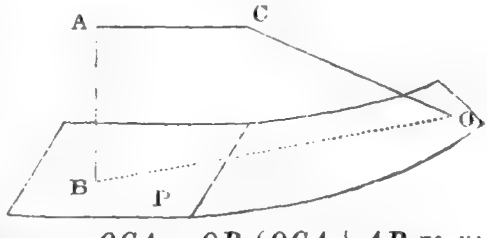
Чер. 415.



Слѣдствіе. *Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собою*, ибо плоскость, перпендикулярная къ третьей линіи, будетъ $\perp$ и къ двумъ первымъ.

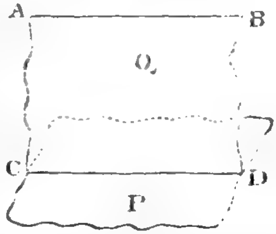
357. *Прямая линія и плоскость параллельны, если онѣ перпендикулярны къ одной и той же прямой.* Если (чер. 416) $AC \perp AB$ и плоскость $P \perp AB$, то допустивъ, что AC пересѣкаетъ плос. P въ точкѣ O, мы получимъ, что на линію AB изъ точки O опущены два перпендикуляра OCA и OB ($OCA \perp AB$ по условію; $OB \perp AB$, ибо OB лежитъ въ плос. P, а $P \perp AB$).

Чер. 416.



358. *Если линія AB* (чер. 417) *параллельна плоскости P, то всякая плоскость Q, проходящая черезъ AB, пересѣкаетъ плоскость P по прямой CD, параллельной AB.* Дѣйствительно, AB и CD лежатъ въ одной плос. Q; притомъ AB не можетъ пересѣчь CD (ибо въ такомъ случаѣ AB должна бы пересѣчь и плос. P, между тѣмъ $AB \parallel P$); слѣд. $CD \parallel AB$.

Чер. 417.



359. *Если линія AB* (чер. 417) *параллельна прямой CD, проведенной по плос. P, то она параллельна и самой плоскости P.* Такъ какъ

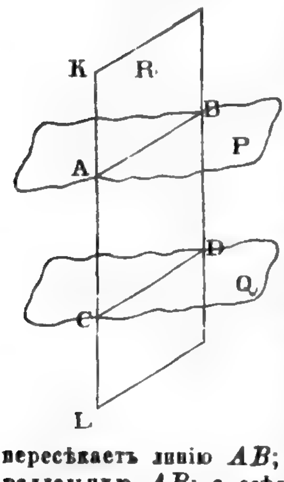
$AB \parallel CD$, то AB и CD лежатъ въ одной плос. Q; поэтому если AB можетъ пересѣчь плос. P, то не выходя изъ плос. Q, и слѣд. точка пересѣченія линіи AB съ плос. P должна находиться на пересѣченіи плоскостей P и Q, т. е. на линіи CD; иначе говоря—если бы AB пересѣкла плос. P, то она пересѣкла бы и прямую CD; между тѣмъ по условію $AB \parallel CD$.

360. *Если прямая линія параллельна двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то она параллельна линіи ихъ сѣченія.* Дѣйствительно, если черезъ данную линію и черезъ какую нибудь точку сѣченія плоскостей проведемъ плоскость, то сѣченія ея съ данными плоскостями будутъ параллельны данной прямой и потому должны слиться съ сѣченіемъ данныхъ плоскостей, такъ какъ черезъ данную точку можно провести только одну параллель къ данной прямой.

361. *Двѣ плоскости, перпендикулярныя къ одной и той же прямой, параллельны между собою.* Если предположимъ, что такія двѣ плоскости встрѣчаются, то должны будемъ допустить, что черезъ точку, взятую на линіи ихъ сѣченія, можно провести къ данной прямой двѣ перпендикулярныя плоскости.

362. *Сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей P и Q* (чер. 418) *третьей плоскостью R параллельны между собою.* Линіи AB и CD находятся въ одной плоскости R; притомъ эти линіи не могутъ пересѣчься, ибо для этого должны пересѣкаться и плоскости P и Q; между тѣмъ эти плоскости параллельны.

Чер. 418.



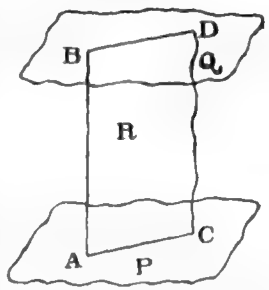
Слѣдствія. 1. *Если какая либо прямая линія KL* (чер. 418) *пересѣкаетъ одну изъ двухъ параллельныхъ плоскостей P, то она пересѣчетъ и другую плос. Q.* Для доказательства вообразимъ плоскость R черезъ прямую KL и черезъ какую нибудь точку D плоскости Q. Плоскость R, имѣя общія точки съ каждой изъ плоскостей P и Q, пересѣчетъ ихъ по линіямъ AB и CD, параллельнымъ между собою. Но KL по условію пересѣкаетъ линію AB; поэтому она пересѣчетъ и CD, какъ параллельную AB; а слѣд. KL пересѣчетъ и плоскость Q, въ которой лежитъ CD.

2. *Если какая нибудь плоскость R* (чер. 418) *пересѣкаетъ одну изъ параллельныхъ плоскостей P, то она пересѣчетъ и другую плос. Q.* Проведемъ въ плос. R прямую KL такъ, чтобы KL не была параллельна линіи AB, по которой пересѣкаются плоскости R и P. Прямая KL, пересѣкая плоскость P, пересѣчетъ на основаніи

предъид. слѣдствія и плос. Q; слѣд. и плоскость R, проходящая через KL, также пересѣчетъ плоскость Q.

363. *Если двѣ плос. P и Q* (чер. 419) *параллельны между собою, то всякая прямая AB, перпендикулярная къ одной изъ нихъ P, будетъ перпендикулярна и къ другой плос. Q.* Въ самомъ дѣлѣ, всякая прямая BD, проведенная въ плоскости Q черезъ точку B, будетъ перпендикулярна къ AB, ибо, проведя черезъ AB и BD плос. R, мы найдемъ, что $BD \parallel AC$; а такъ какъ $AC \perp AB$, то и $BD \perp AB$.

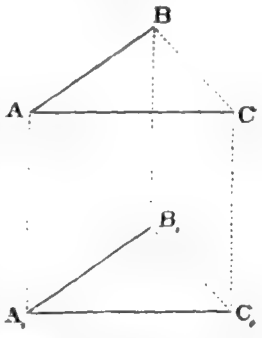
Чер. 419.



364. *Черезъ данную точку B* (чер. 419) *можно къ данной плоскости P провести параллельную плоскость, и притомъ только одну.* Для этого нужно изъ точки B опустить на плос. P перпендикуляръ BA и черезъ B провести плос. $Q \perp BA$. Допустивъ, что кромѣ Q можно черезъ B провести еще другую плоскость $\parallel P$, мы на основаніи предъид. теоремы придемъ къ нелѣпому заключенію, что къ прямой AB черезъ точку B проведены двѣ перпендикулярныя плоскости.

365. *Углы съ параллельными сторонами или равны между собою или дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ; а плоскости этихъ угловъ параллельны.* Пусть (чер. 420) $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$; докажемъ 1) что плос. $BAC \parallel$ плос. $B_1A_1C_1$ и 2) что уг. $BAC = B_1A_1C_1$, полагая, что эти углы обращены отверстіями въ одну сторону.

Чер 420.



1. Линія $AB \parallel$ плос. $B_1A_1C_1$, ибо $AB \parallel A_1B_1$, которая лежитъ въ плос. $B_1A_1C_1$; на томъ же основаніи и линія $AC \parallel$ плос. $B_1A_1C_1$. Поэтому если мы допустимъ, что плос. BAC не $\parallel$ плос. $B_1A_1C_1$ и что слѣд. плос. BAC пересѣкаетъ плос. $B_1A_1C_1$, то это сѣченіе должно быть параллельно въ одно и тоже время двумъ линіямъ AB и AC, которыя между собой пересѣкаются. Отсюда заключаемъ, что плос. $BAC \parallel$ плос. $B_1A_1C_1$.

2. Соединимъ точки A и A_1 прямой AA_1; проведемъ черезъ точки B и C, произвольно взятыя на сторонахъ угла BAC, линіи $BB_1 \parallel AA_1$ и $CC_1 \parallel AA_1$ до пересѣченія въ точкахъ B_1 и C_1 съ сторонами уг. $B_1A_1C_1$, и соединимъ точку B съ C и B_1 съ C_1 прямыми BC и B_1C_1. Прямая $BC \parallel B_1C_1$ какъ сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей BAC и $B_1A_1C_1$ третьей плоскостью BB_1C_1C, и фигуры AA_1B_1B, AA_1C_1C и BB_1C_1C будутъ парал-

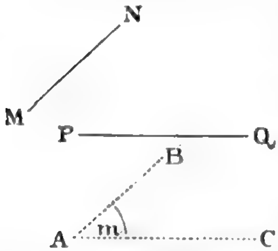
лелограммы; поэтому $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$; слѣд. треуг. $ABC=A_1B_1C_1$, а потому и уг. $A=A_1$.

На основаніи доказаннаго легко доказать, что углы съ параллельными сторонами будутъ равны, если они обращены отверстіями въ прямо—противоположныя стороны, и будутъ дополнять другъ друга до двухъ прямыхъ, если обращены отверстіями въ разныя стороны.

366. Каждая прямая AB имѣетъ два направленія—отъ A къ B и отъ B къ A.

Угломъ двухъ прямыхъ, положеніе и направленіе которыхъ въ пространствѣ дано, наз. уголъ, который образуется, если провести черезъ какую либо точку въ пространствѣ къ каждой изъ данныхъ линій линію параллельную и того же направленія. Напр. чтобъ образовать уг. между прямыми MN и PQ (чер. 421), надо изъ произвольной точки A провести прямую $AB \parallel MN$ и того же направленія, какъ MN, и прямую $AC \parallel PQ$ и того же направленія какъ PQ уг. m и будетъ угломъ между MN и PQ. На основаніи предъид. теоремы можно сказать, что уголъ этотъ будетъ одинъ и тотъ же, гдѣ бы мы ни взяли точку A. Если уголъ между двумя прямыми въ пространствѣ будетъ прямой, то линіи наз. взаимно перпендикулярными.

Чер. 421.

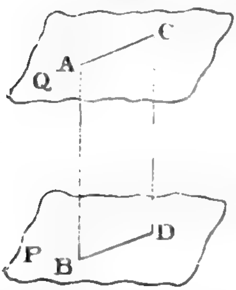


367. *Если двѣ параллельныя прямыя заключены между прямой и параллельной ей плоскостью или между двумя параллельными плоскостями, то эти прямыя равны между собою.* 1. Пусть (чер. 422) $AB \parallel CD$ и $AC \parallel$ плос. P; проведемъ черезъ AB и CD плоскость; она пересѣчетъ плос. P по линіи $BD \parallel AC$, слѣд. фигура $ABDC$ будетъ параллелограммъ, и $AB=CD$.

2. Если $AB \parallel CD$ и плос. $Q \parallel$ плос. P, то плоскость, проходящая черезъ AB и CD, пересѣчетъ P и Q по линіямъ AC и BD, параллельнымъ между собою; слѣд. $ABDC$ будетъ параллелограммъ.

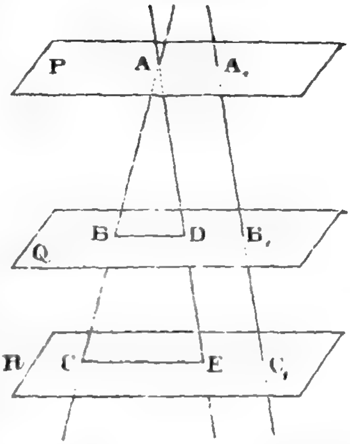
Слѣдствіе. *Разстоянія между прямой и параллельной ей плоскостью, а также между двумя параллельными плоскостями, на всемъ ихъ протяженіи одинаковы.*

Чер. 422.



368. *Двѣ прямыя линіи разсѣкаются тремя параллельными плоскостями на пропорціональные отрѣзки.* Пусть прямыя ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 423) пересѣчены тремя параллельными плоскостями

Чер. 423.



P, Q, R. Проведемъ черезъ A линію $AE \parallel A_1C_1$, а черезъ линіи AC и AE проведемъ плоскость; тогда $BD \parallel CE$ (§ 362); слѣдоват.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}.$$

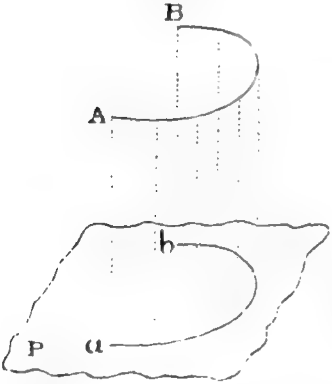
Но по § 367-му $AD = A_1B_1$, $DE=B_1C_1$, $AE=A_1C_1$, слѣд.

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

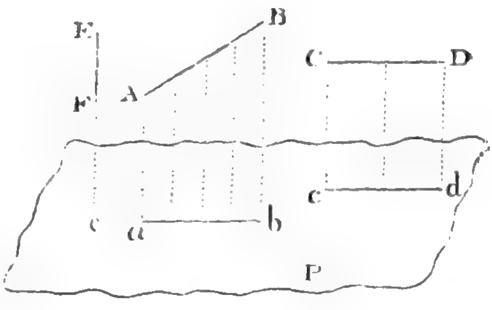
Слѣдствіе. *Двѣ сходящіяся прямыя разсѣкаются двумя параллельными плоскостями на пропорціональные отрѣзки.*

369. О проекціяхъ Проекціей точки A (чер. 424) на плоскости P наз. основаніе a перпендикуляра Aa, опущеннаго изъ A на плос. P. Проекціей линіи AB (чер. 424) на плос. P наз. геометрическое мѣсто проекцій ея точекъ на этой плоскости.

Чер. 424.



Чер. 425.

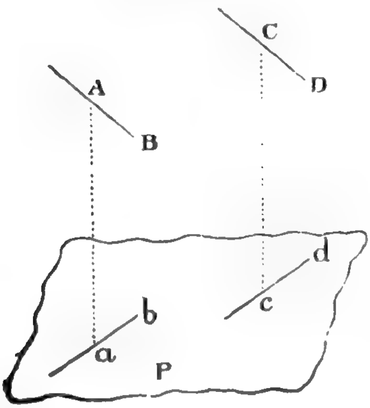


Проекція прямой AB (чер. 425) на плос. P будетъ также прямая ab, потому что всѣ перпендикуляры Aa.... Bb, опущенные на плос. P изъ разныхъ точекъ прямой AB, параллельны между собою и слѣд. всѣ лежатъ въ одной плос. съ прямой AB и съ перпендикуляромъ Aa; а потому всѣ основанія ихъ лежатъ на прямой ab, представляющей пересѣченіе этой плоскости съ плос. P.

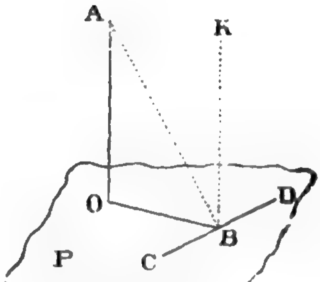
Если прямая $\perp$ плос. P, напр. EF (чер. 425), то проекція ея будетъ одна точка e. Когда прямая $\parallel$ плос. P, напр CD (чер. 425), то она параллельна и своей проекціи cd.

370. *Если линіи AB и CD* (чер. 426) *параллельны между собою, то и проекціи ихъ ab и cd на одну и туже плос. P также* *параллельны между собою.* Дѣйствительно, перпендикуляры Aa и Cc параллельны, слѣд. уг. aAB = уг. cCD и плоскости ихъ параллельны; поэтому $ab \parallel cd$ какъ сѣченія этихъ двухъ параллельныхъ плоскостей третьей плоскостью P.

Чер. 426.

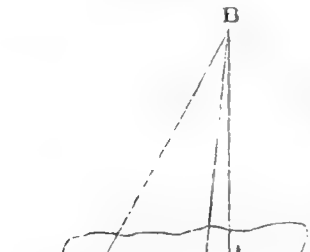


Чер. 427.



371. *Прямая CD* (чер. 427), *проведенная въ плоскости P перпендикулярно къ проекціи BO наклонной къ этой плоскости AB, будетъ перпендикулярна и къ самой наклонной AB.* Въ самомъ дѣлѣ, прямая $CD \perp BO$ по условію; вмѣстѣ съ тѣмъ CD будетъ $\perp$ къ перпендикуляру BK, возставленному изъ точки B къ плос. P; а потому CD будетъ $\perp$ и къ плоскости, проходящей черезъ параллельныя линіи BK и OA; а въ этой плоскости лежитъ и наклонная AB.

Чер. 428.

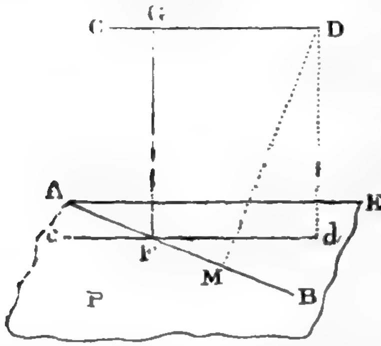


372. *Изъ всѣхъ угловъ, образуемыхъ наклонной BA* (чер. 428) *къ плоскости P съ линіями, проведенными по этой плоскости черезъ основаніе наклонной A, наименьшимъ будетъ острый уголъ BAb, образуемый наклонной съ ея проекціей.* Возьмемъ на плос. P произвольную прямую AC и докажемъ, что уг. $BAC > BAb$. Для этого отложимъ $AC = Ab$ и соединимъ B съ C. Тогда въ треугольникахъ BAb и BAC сторона AB общая, $Ab = AC$; но $Bb < BC$, ибо Bb есть перпендикуляръ; слѣд. уг. $BAb < BAC$.

Острый уголъ, составляемый наклонной къ плоскости съ ея проекціей на этой плоскости, наз. угломъ этой линіи съ плоскостью.

373. *Если даны двѣ прямыя линіи AB и CD* (чер. 429), *не лежащія въ одной плоскости, то 1) всегда можно найти прямую,* *и притомъ только одну, которая встрѣтитъ обѣ данныя прямыя подъ прямымъ угломъ, и* 2) *этотъ общій перпендикуляръ представляетъ кратчайшее разстояніе между данными прямыми.*

Чер. 429.



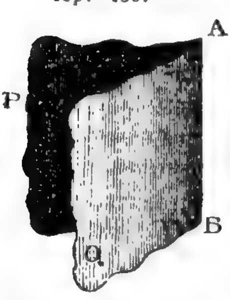
Проведемъ черезъ какую либо точку A прямой AB линію $AE \parallel CD$; плоскость P, проходящая черезъ AB и AE, будетъ $\parallel$ линіи CD; поэтому, чтобъ найти проекцію линіи CD на плоскости P, надо найти проекцію d какой нибудь ея точки D и затѣмъ по плоскости P провести прямую $dc \parallel DC$. Пусть dc пересѣкаетъ AB въ точкѣ F; возставимъ изъ F перпендикуляръ FG къ плос. P; линія FG будетъ $\perp$ къ AB (ибо $FG \perp$ плос P) и къ CD (ибо $FG \parallel dD$; а $dD \perp CD$ и лежитъ съ CD въ одной плоскости). Другой такой прямой линіи, которая бы встрѣчала обѣ прямыя AB и CD подъ прямымъ угломъ, быть не можетъ, ибо для этого необходимо, чтобы она была $\perp$ къ плос. P, проходящей черезъ линію AB и черезъ линію AE, параллельную CD; кромѣ того эта прямая должна проходить черезъ одну изъ точекъ линіи cd—проекціи CD. Этотъ общій перпендикуляръ GF меньше всякой другой прямой DM, соединяющей одну изъ точекъ AB съ одной изъ точекъ CD; дѣйствительно, $GF = Dd$, а $Dd < DM$, ибо $Dd \perp$ плоск. P, а DM наклонна къ этой плоскости

ГЛАВА II.

Углы, образуемые плоскостями.

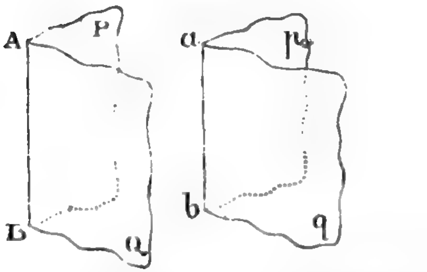
371. Двугранные углы. Двѣ плоскости P и Q (чер. 430), сходящіяся въ прямой линіи AB, образуютъ *двугранный уголъ*. Плоскости эти наз. *сторонами* угла, а линія ихъ пересѣченія AB наз. *ребромъ* угла. Двугр. уголъ обозначается четырьмя буквами, изъ которыхъ двѣ ставятся на сторонахъ, а двѣ на ребрѣ, и буквы, стоящія на ребрѣ, произносятся между другими двумя буквами; такъ уголъ, представленный на чер 430, надо прочесть $PABQ$. Иногда также обозначаютъ двугр. уголъ только двумя буквами, поставленными на ребрѣ его; напр. уг. AB (чер. 430).

Чер. 430.

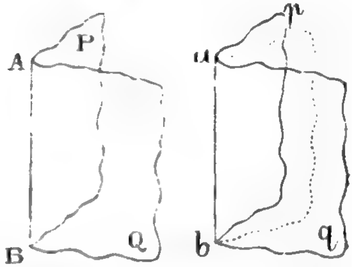


Чтобы узнать, равны ли два двугранныхъ угла $PABQ$ и $pabq$ (чер. 431) или нѣтъ, вложимъ уг. $PABQ$ въ уг. $pabq$, такъ чтобы ребро AB совмѣстилось съ ab и плоскость P совпала съ p; если при этомъ плоскость Q также совпадетъ съ q, то углы бу-

Чер. 431.



Чер. 432.

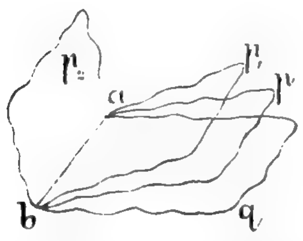


дутъ равны. Если же (чер. 432) Q пойдетъ внутри уг. $pabq$, то уг. $PABQ<pabq$.

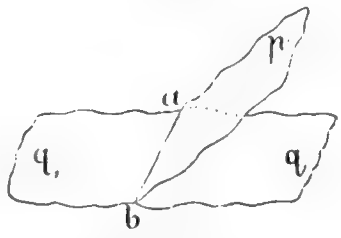
Вообразимъ, что сторона p (чер. 433) двугр. угла $pabq$ вращается около прямой ab, принимая послѣдовательно положенія $p_1, p_2 \ldots$; тогда двугранный уг. будетъ постепенно возрастать.

Легко видѣть, что двугр. углы можно складывать, вычитать и проч. Такъ уг. p_2abq (чер. 433) $=p_2abp_1+p_1abp+pabq$; уголъ p_1abp есть разность угловъ p_1abq и $pabq$.

Чер. 433.



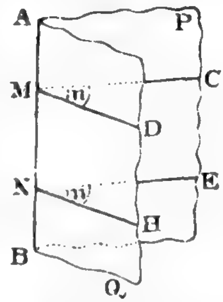
Чер. 434.



Два двугр. угла $pabq$ и $pabq_1$ (чер. 434), имѣющіе одну сторону p общую, и у которыхъ двѣ другія стороны q и q_1 составляютъ одну плоскость, наз. *смежными*. Если смежные двугр. углы равны между собою, то каждый изъ нихъ наз. *прямымъ*; стороны прямаго двугр. угла наз. взаимно *перпендикулярными*.

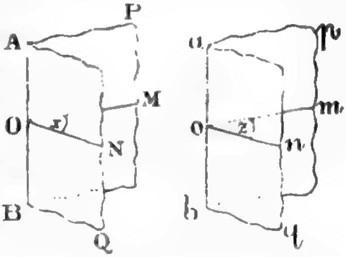
375. Возьмемъ на ребрѣ двугр. угла (чер. 435) какую нибудь точку M и проведемъ по плоскости P прямую $MC \perp AB$, а по плоскости Q прямую $MD \perp AB$; тогда получимъ уг. m. Если такое же построеніе сдѣлать въ какихъ нибудь другихъ точкахъ линіи AB, напр. въ точкѣ N, то получимъ углы, равные m, ибо всѣ эти углы будутъ имѣть стороны параллельныя и отверстіями будутъ обращены въ одну сторону ($MC \parallel NE$, ибо обѣ онѣ, находясь въ одной плоскости P, перпендикулярны къ AB; также и $MD \parallel NH$); каждый изъ такихъ угловъ наз. *линейнымъ угломъ* даннаго двугр. угла. Такъ какъ плоскость, проходящая черезъ линіи CM и MD, будетъ перпендикулярна къ AB, то слѣд. линейный уг. двуграннаго угла можно получить также, если въ какой нибудь точкѣ ребра провести плоскость, перпендикулярную къ ребру.

Чер. 435.



376. *Если два двугр. угла равны между собою, то и линейные углы ихъ равны*. Пусть (чер. 436) уг. $PABQ = pabq$; докажемъ, что $x = z$. Вообразимъ, что уг. $PABQ$ вложенъ въ $pabq$ такъ, что точка O совпала съ o, ребро OB пошло по ob и плоскость P совпала съ p; тогда по равенству двугр. угловъ и плоскость Q совпадетъ съ q; вмѣстѣ съ тѣмъ линія ON пойдетъ по on по равенству прямыхъ угл. BON и bon; такъ же и OM пойдетъ по om; слѣд. уг. x совмѣстится съ z.

Чер. 436.



377. Обратно—*если въ двухъ двугр. углахъ линейные углы равны, то равны и двугранные*. Вложимъ опять двугр. уг. $PABQ$ (чер. 436) въ уг. $pabq$ такъ же, какъ и въ пред. теоремѣ, т. е. чтобъ точка O совпала съ o, ребро OB пошло по ob и плоскость P совпала съ p; тогда плоскость линейнаго угла x совпадетъ съ плоскостью уг. z (иначе къ ребру AB въ одной точкѣ O можно было бы провести двѣ перпендикулярныя плоскости); по равенству прямыхъ уг. BOM и bom линія OM пойдетъ по om; а вслѣдствіе равенства линейныхъ угл. x и z линія ON пойдетъ по on; такимъ образомъ двѣ прямыя AB и ON, находящіяся на плоскости Q, совпадутъ съ линіями плоскости q; а потому и плоскость Q совпадетъ съ q. Итакъ стороны двугр. угла $PABQ$ совпадутъ съ сторонами уг. $pabq$; слѣд. эти углы равны.

378. Изъ двухъ предъидущихъ теоремъ слѣдуетъ:

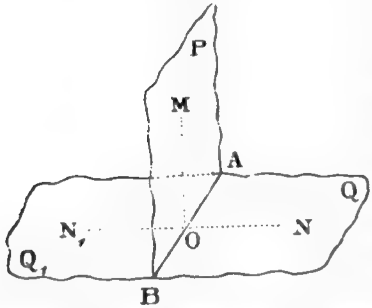
1) *Если двугранный уг. будетъ прямой, то и линейный его уголъ также прямой*—и обратно

2) *если линейный уголъ двуграннаго есть прямой, то и двугранный уг. прямой*.

Дѣйствительно, если (чер. 437) двугр. уг. $PABQ$ будетъ прямой, то онъ равенъ своему смежному $PABQ_1$, а потому и линейный его уг. MON=своему смежному MON_1; слѣд. эти углы прямые.

Наоборотъ, если уг. MON прямой, то онъ $= MON_1$; поэтому и двугр. уг. $PABQ$= своему смежному $PABQ_1$; слѣд. эти двугр. углы прямые.

Чер. 437.

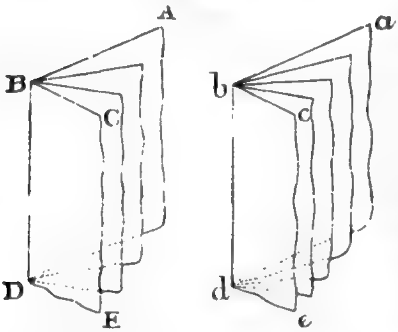


3. Такъ какъ всѣ прямые линейные углы равны между собою, то и *всѣ прямые двугр. углы равны между собою*; иначе говоря—*прямой двугр. уголъ есть величина постоянная*, и потому его принимаютъ за единицу для измѣренія двугр. угловъ.

Двугранный уголъ, меньшій прямаго, наз. *острымъ*; а большій прямаго—*тупымъ*.

379. *Двугранные углы пропорціональны своимъ линейнымъ угламъ*. 1. Положимъ (чер. 438), что ABC и abc суть линейные углы, соотвѣтствующіе двуграннымъ $ABDE$ и $abde$; пусть эти линейные углы соизмѣримы, и общая мѣра ихъ въ углѣ ABC укладывается m разъ, а въ углѣ abc—n разъ; тогда отношеніе $\dfrac{ABC}{abc} = \dfrac{m}{n}$. Проведя плоскости черезъ ребра BD и bd обоихъ двугр. уг. и черезъ линіи, которыя получатся при отложеніи по линейнымъ угламъ ABC и abc ихъ общей мѣры, мы раздѣлимъ двугр. углы — одинъ на m, другой на n равныхъ угловъ, и слѣд. отношеніе двугр. угловъ также $= \dfrac{m}{n}$, т. е. равно отношенію линейныхъ.

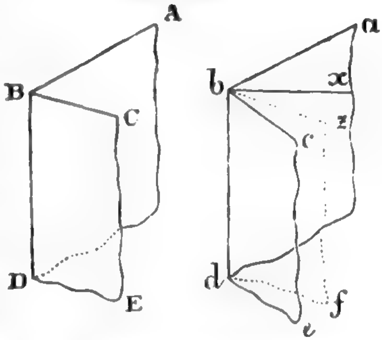
Чер. 438.



2. Для доказательства того, что (чер. 439) $\dfrac{ABDE}{abde} = \dfrac{ABC}{abc}$ и въ случаѣ несоизмѣримости линейныхъ угловъ ABC и abc, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Положимъ, что $\dfrac{ABDE}{abde} > \dfrac{ABC}{abc}$; тогда, чтобъ уравнять эти отношенія, надо второе отношеніе увеличить; для этого уменьшимъ его послѣдующій членъ и положимъ, что $\dfrac{ABDE}{abde} = \dfrac{ABC}{abx}$, гдѣ abx есть уг., меньшій уг. abc и лежащій

въ одной съ нимъ плоскости. Раздѣлимъ уг. ABC пополамъ, половину его опять пополамъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ уголъ, меньшій xbc, и будемъ одну такую часть откладывать въ плоскости угла abc, начиная отъ линіи ab; тогда одна изъ линій дѣленія непремѣнно упадетъ между xb и cb—пусть эта линія будетъ bz; уг. ABC будетъ тогда соизмѣримъ съ уг. abz, и слѣд. если проведемъ плоскость черезъ bd и bz, то на основаніи доказаннаго въ первомъ случаѣ будемъ имѣть $\frac{ABDE}{abdf}=\frac{ABC}{abz}$. Сравнивая эту пропорцію съ допущенной нами пропорціей $\frac{ABDE}{abde}=\frac{ABC}{abx}$, видимъ, что у нихъ предъидущіе члены равны, слѣд. послѣдующіе должны быть пропорціональны, т. е. $\frac{abdf}{abde}=\frac{abz}{abx}$. Но провѣряя эту пропорцію по чертежу, видимъ, что она невѣрна, ибо въ первомъ отношеніи $abdf < abde$; во второмъ же отношеніи предъид. членъ abz $>$ послѣдующаго abx. Итакъ $\frac{ABDE}{abde}$ не можетъ быть больше $\frac{ABC}{abc}$.

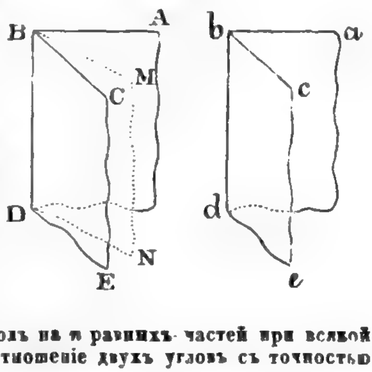
Чер. 439.



Точно такъ же можно доказать, что $\frac{ABDE}{abde}$ не можетъ быть меньше $\frac{ABC}{abc}$; для этого надо только взять вмѣсто abc большій уголъ и повторить предъидущія разсужденія. Итакъ отношеніе двугр. угловъ равно отношенію линейныхъ и въ случаѣ несоизмѣримости этихъ послѣднихъ.

Докажемъ туже теорему въ случаѣ несоизмѣримости линейныхъ угловъ по *способу предѣловъ*. Для этого стóитъ только доказать, что отношеніе двугр. угловъ=отношенію линейныхъ угловъ *при всякой степени точности*. Чтобъ опредѣлить отношеніе несоизмѣримыхъ линейныхъ угловъ ABC и abc (чер. 440) съ точностью напр. до $\frac{1}{n}$, надо уг. abc раздѣлить на n равныхъ частей * и одну такую

Чер. 440.

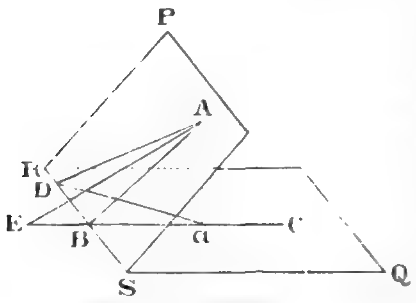


* Хотя мы и не можемъ раздѣлить уголъ на n равныхъ частей при всякой величинѣ n, тѣмъ не менѣе опредѣлить отношеніе двухъ угловъ съ точностью

часть укладывать въ углѣ ABC, пока не получится остатокъ MBC, меньшій n-й части угла abc. Если эта часть уложилась m разъ въ уг. ABC, то $\frac{m}{n}$ и будетъ выражать отношеніе $\frac{ABC}{abc}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Проведя черезъ линіи BD и BM плоскость, получимъ двугр. уг. $ABDN$, котораго линейн. уг. ABM соизмѣримъ съ abc; слѣд. $\frac{ABDN}{abde}=\frac{m}{n}$. Эта же величина $\frac{m}{n}$ будетъ выражать и отношеніе данныхъ двугр. угловъ $\frac{ABDE}{abde}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Дѣйствительно, разность между отношеніями $\frac{ABDE}{abde}-\frac{ABDN}{abde}=\frac{MBDE}{abde}$; но уг. $MBDE < \frac{1}{n}$ уг. $abde$, ибо линейный уг. перваго угла $<n$-й части уг. abc; слѣд. $\frac{MBDE}{abde}<\frac{1}{n}$.

380. Такимъ образомъ во всякомъ случаѣ, если A и B представляютъ двугр. углы, а a и b соотвѣтствующіе имъ линейные, то $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$. Если B будетъ прямой двугр. уголъ, принимаемый за единицу двугр. угловъ, то b будетъ прямой линейный уголъ, принимаемый за единицу для измѣренія угловъ, образуемыхъ прямыми линіями, и полагая въ предъидущей пропорціи $B=1$ и $b=1$, получимъ $A=a$; это выраженіе показываетъ, что *двугранный уголъ измѣряется своимъ линейнымъ угломъ*.

Чер. 441.



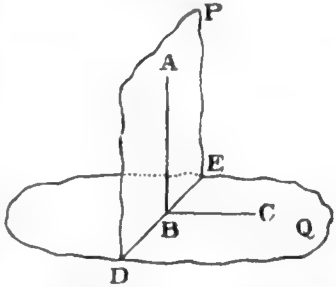
381. Замѣтимъ, что *линейный уг. ABC* (чер 441) *двуграннаго уг. $PRSQ$ будетъ больше всѣхъ угловъ, которые образуютъ съ плоскостью Q прямыя линіи, проведенныя по плоскости P черезъ точку A*. Дѣйствительно, проведемъ какую нибудь прямую AD; опустимъ изъ A перпендикуляръ Aa на плоскость Q; тогда a будетъ проекція A на плоскости Q; Ba — проекція прямой BA, Da—проекція прямой DA на той же плоскости; докажемъ, что уг. $ABa >$ уг. ADa. Такъ какъ

$\frac{1}{n}$ всегда возможно; положимъ напр., что надо опредѣлить это отношеніе съ точностью до $^1/_{119}$; будемъ дѣлить уг. пополамъ, потомъ опять пополамъ и т. д., т. е. раздѣлимъ его на 2, 4, 8..... 128 равныхъ частей; тогда опредѣлимъ отношеніе съ точностью до $^1/_{128}$, а слѣд. и подавно съ точностью до $^1/_{119}$.

$aB \perp RS$, то $aB < aD$; поэтому если отъ a по aB отложимъ $aE = aD$, то точка E придется за точкой B, и соединивъ A съ E, получимъ треуг. AEB, для котораго уг. ABa будетъ внѣшній; слѣд. уг. $ABa >$ уг. AEB; но уг. $AEB =$ уг. ADa по равенству треуг. AEa и ADa; поэтому уг. $ABa >$ уг. ADa.

382. *Если прямая AB* (чер. 442) *перпендикулярна къ плоскости Q, то всякая плоскость P, проходящая черезъ AB, или параллельная ей* (чер. 443), *будетъ также перпендикулярна къ Q.*

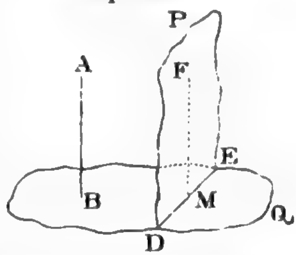
Чер. 442.



1. Пусть DE (чер. 442) будетъ линія пересѣченія плоскости Q съ плоскостью P. Проведемъ въ плоскости Q изъ точки B линіи DE прямую $BC \perp DE$; эта прямая BC будетъ также $\perp BA$, ибо BA по условію $\perp$ къ плоскости Q, слѣд. $BA \perp BC$. Такимъ образомъ уг. ABC есть прямой; а такъ какъ $AB \perp DE$ и $BC \perp DE$, то уг. ABC есть линейный уг. двуграннаго угла, образуемаго плоскостями P и Q; поэтому и двугр. уг. прямой и слѣд. $P \perp Q$.

2. Если (чер. 443) плоскость $P \parallel AB$, то проведя изъ какой нибудь точки F этой плоскости прямую $FM \parallel AB$, найдемъ, что $FM \perp Q$; слѣд. плоскость P, проходящая черезъ линію FM, перпендикулярную къ плоскости Q, будетъ по сейчасъ доказанному и сама перпендикулярна къ Q.

Чер. 443.



383. *Если двѣ плоскости P и Q* (чер. 442) *взаимно перпендикулярны, то всякая прямая AB, проведенная въ одной изъ этихъ плоскостей P перпендикулярно къ ихъ сѣченію DE, будетъ перпендикулярна къ другой плоскости Q.* Дѣйствительно, если $P \perp Q$, то двугр. уголъ $PDEQ$ будетъ прямой, а слѣд. и его линейный уголъ долженъ быть прямымъ. Чтобъ получить этотъ линейный уголъ, надо изъ точки B, въ которой прямая AB, перпендикулярная къ DE и лежащая въ плоскости P, пересѣкаетъ DE, возставить къ DE перпендикуляръ BC въ плоскости Q. Поэтому данная прямая AB будетъ перпендикулярна къ двумъ прямымъ DE и BC, лежащимъ въ плоскости Q, а потому $AB \perp$ и къ самой плоскости Q.

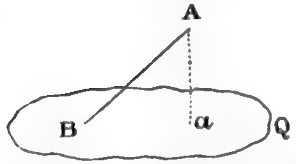
384. *Если двѣ плоскости P и Q* (чер. 442) *взаимно перпендикулярны, то всякая прямая AB, перпендикулярная къ одной изъ нихъ Q, лежитъ въ другой плоскости P* (чер. 442) *или па-*

раллельна ей (чер. 443). Въ самомъ дѣлѣ, если бы прямая AB (чер. 442) имѣла съ плоскостью P только одну общую точку B, то проведя изъ B въ плоскости P перпендикуляръ къ пересѣченію DE плоскостей P и Q, мы получили бы перпендикуляръ къ плоскости Q, и тогда изъ точки B имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости Q. Слѣд. прямая AB или не имѣетъ общихъ точекъ съ плоскостью P, т. е. параллельна ей (чер. 443), или же лежитъ въ плоскости P.

385. *Черезъ прямую* DE (чер. 442), *лежащую въ плоскости* Q, *можно провести къ этой плоскости перпендикулярную плоскость* P, *и притомъ только одну.* Дѣйствительно, если мы изъ какой либо точки B линіи DE (чер. 442) возставимъ къ плоскости Q перпендикуляръ BA и черезъ прямыя DE и BA проведемъ плоскость P, то по предъидущему $P \perp Q$. Если мы допустимъ, что кромѣ плоскости P можно черезъ DE провести еще другую плоскость $\perp Q$, то возставивъ въ этой другой плоскости изъ точки B перпендикуляръ BN къ линіи DE, мы получимъ два перпендикуляра къ плоскости Q, возставленные изъ точки B—одинъ BA, другой BN.

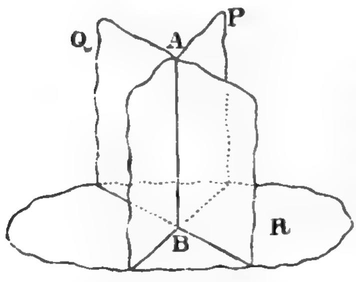
386. *Черезъ прямую* AB (чер. 444), *наклонную къ плоскости* Q, *можно къ этой плоскости провести перпендикулярную плоскость, и притомъ только одну.* Опустимъ изъ какой нибудь точки A данной прямой AB перпендикуляръ Aa къ плоскости Q и проведемъ плоскость черезъ AB и Aa; эта плоскость $ABa \perp Q$. Притомъ такая плоскость только одна, ибо всякая плоскость, проходящая черезъ AB и перпендикулярная къ Q, должна заключать въ себѣ перпендикуляръ Aa и слѣд. должна совпадать съ плоскостью ABa.

Чер. 444.



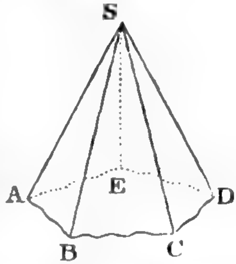
387. *Если* (чер. 445) *плоскость* $P \perp$ *плос.* R *и плоскость* $Q \perp R$, *то и линія* AB, *въ которой пересѣкаются плоскости* P *и* Q, *также перпендикулярна къ* R. Дѣйствительно, если изъ какой нибудь точки прямой AB проведемъ перпендикуляръ къ плоскости R, то этотъ перпендикуляръ долженъ заключаться и въ плоскости P и въ плоскости Q, слѣд. онъ долженъ сливаться съ линіей пересѣченія этихъ плоскостей, т. е. съ AB, и потому AB будетъ перпендикулярна къ плоскости R.

Чер. 445.



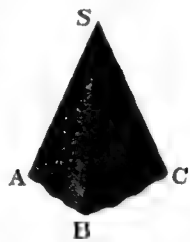
388. Многогранные углы. Когда нѣсколько плоскостей (чер. 446) ASB, BSC, CSD.... пересѣкаются послѣдовательно по прямымъ линіямъ SA, SB, SC...., которыя въ свою очередь сходятся въ одной точкѣ S, то эти плоскости образуютъ *многогранный уголъ*. Плоскости эти наз. *сторонами* или *гранями* многограннаго угла; точка S — его *вершиной*; линіи SB, SC, SD....— *ребрами*; а углы ASB, BSC, CSD..., образуемые ребрами, наз. *плоскими углами* многограннаго угла. Обозначаютъ многогр. уголъ или одной буквой, поставленной при вершинѣ, или же буквами, стоящими при вершинѣ и при ребрахъ, причемъ буква при вершинѣ читается впереди другихъ буквъ; такъ пятигранный уголъ, изображенный на чер. 446, надо прочесть уголъ S или уг. $SABCDE$.

Чер. 446.



Простѣйшій изъ многогранныхъ угловъ есть уг. *трегранный* (чер 447); въ немъ находятся 3 плоскихъ угла: ASB, BSC, CSA и 3 угла двугранныхъ: одинъ образованъ плоскостями BSA и CSA (уг. $BSAC$); другой образованъ плоскостями BSA и BSC (уг. $ASBC$); третій образованъ плоскостями ASC и BSC (уг. $ASCB$).

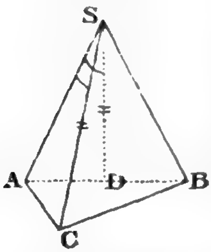
Чер. 447.



389. ***Во всякомъ многогранномъ углѣ каждый изъ плоскихъ угловъ меньше суммы остальныхъ.*** Если всѣ плоскіе углы равны между собою, то справедливость теоремы очевидна; поэтому ее нужно доказать только для того случая, когда одинъ изъ угловъ больше каждаго изъ прочихъ; если мы докажемъ, что этотъ наибольшій уг. меньше суммы всѣхъ прочихъ, то каждый изъ остальныхъ будетъ и подавно меньше суммы прочихъ.

1. Возьмемъ сперва трегран. уг. $SABC$ (чер. 448) и пусть въ немъ уг. ASB будетъ наибольшій; докажемъ, что уг. $ASB<ASC+CSB$. Для этого надо сравнить уг. ASB съ суммою угловъ ASC и CSB; но чтобы привести вопросъ къ сравненію только двухъ угловъ, мы въ плоскости угла ASB отложимъ уг. $ASD=ASC$; если мы теперь докажемъ, что уг. DSB, оставшійся отъ уг. ASB, будетъ меньше уг. CSB, то и $DSB+ASD$ будетъ меньше $CSB+ASC$ и слѣд. $ASB<CSB+ASC$. Чтобы сравнить углы DSB и CSB, заключимъ ихъ въ треугольники; для этого отложимъ $SD=SC$ и соединимъ точки C и D съ какой нибудь точкой B линіи SB; тогда въ треуг. BSD и BSC сторона SB будетъ об-

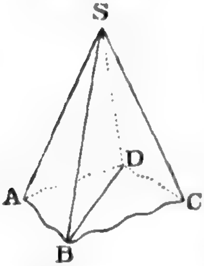
Чер. 448.



щая, $SC=SD$ по отложенію; чтобы доказать, что уг. $DSB<CSB$, надо доказать, что сторона $BD<BC$. Для этого продолжимъ BD до пересѣченія съ SA (пересѣченіе это непремѣнно послѣдуетъ, ибо линіи BS, DS и AS находятся въ одной плоскости) и соединимъ A съ C; тогда $AD+DB<AC+CB$; но $AD=AC$ по равенству треуг. ASD и ASC (сторона AS общая, $SC=SD$ и уг. $ASC=ASD$ по отложенію); слѣд. $DB<CB$; а потому уг. $DSB<$уг. CSB и уг. $ASB<ASC+CSB$.

2. Чтобы доказать теорему для многогр. угла, положимъ, что уг. BSC (чер. 449) есть наибольшій плоскій уг. многогр. уг. S. Проведемъ черезъ ребра BS и SD плоскость BSD; тогда въ трегр. углѣ $SBDC$ будемъ имѣть $BSC<BSD+DSC$; а въ трегр углѣ $SABD$ имѣемъ $BSD<ASB+ASD$; слѣд. и подавно

Чер. 449.

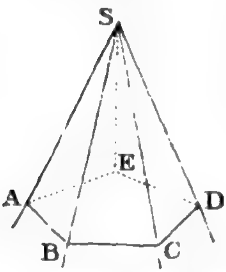


$$BSC<ASB+ASD+DSC.$$

Слѣдствіе. Если a,b,c суть плоскіе углы треграннаго, то $a<b+c$; вычитая изъ обѣихъ частей неравенства по c, получимъ $a-c<b$ или $b>a-c$: итакъ *каждый плоскій уг. трегранняго угла больше разности двухъ прочихъ угловъ.*

390. *Сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ всякаго многограннаго угла меньше четырехъ прямыхъ* ($4d$). Для доказательства проведемъ плоскость, которая пересѣкла бы всѣ ребра многограннаго угла S (чер. 450); тогда при точкахъ $A,B,C....$ получимъ трегранные углы, и по предъидущей теоремѣ будемъ имѣть

Чер. 450.



$$EAB<EAS+BAS$$
$$ABC<ABS+CBS$$
$$BCD<BCS+DCS$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Сложивъ эти неравенства, увидимъ, что сумма внутреннихъ угловъ многоугольника $ABC....$ будетъ меньше суммы угловъ при основаніяхъ треуг—въ BSA, $ESA...$, которые имѣютъ общую вершину S. Поэтому, означивъ черезъ n число сторонъ мног—ка $ABC....$ и слѣд. число сторонъ многогр. угла, а черезъ s—сумму угловъ при точкѣ S, получимъ

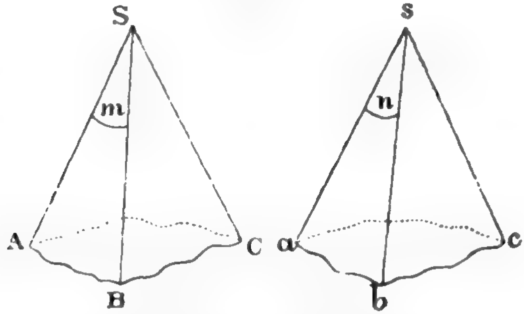
$$2d(n-2)<2dn-s, \text{ или } 2dn-4d<2dn-s, \text{ откуда } s<4d.$$

391. Разсмотримъ случаи равенства трегранныхъ угловъ.

1. *Трегранные углы равны, если они имѣютъ по равному плоскому углу, заключенному между соотвѣтственно равными двугранными углами, и если плоскіе и двугранные углы одинаково распо-*

ложены въ обоихъ трегр. углахъ. Пусть (чер. 451) двугр. уг. $SA=$ $=sa$, двугр. уг. $SB=sb$ и плоскій уг. $m=n$, и положимъ кромѣ

Чер. 451.

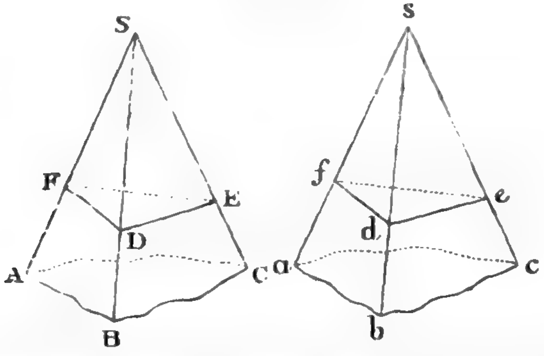


того, что всѣ эти углы одинаково расположены (т. е. если наблюдатель, голова котораго въ S и который обращенъ спиною къ плоскости ASB, а лицомъ къ прямой SC, будетъ видѣть ребро SA влѣво отъ себя, а ребро SB вправо, то и наблюдатель, расположенный такимъ же образомъ въ уг. $sabc$, увидитъ ребро sa влѣво, а sb вправо отъ себя). Чтобы доказать равенство трегр. угловъ, вообразимъ, что уг. s вложенъ въ уг. S такъ, чтобы уг. n совпалъ съ m; тогда, по равенству двугр. уг. sa и SA, грань asc пойдетъ по ASC и ребро sc должно расположиться на грани ASC. По равенству двугр. угловъ sb и SB грань bsc пойдетъ по BSC и ребро sc должно расположиться на грани BSC; вслѣдствіе этого ребро sc совпадетъ съ SC; а потому и трегр. уг. s совмѣстится съ S.

2. *Трегр. углы равны, если они имѣютъ по равному двугр. углу, заключенному между соотвѣтственно равными плоскими углами, и если эти плоскіе и двугр. углы одинаково расположены.* Этотъ случай легко, подобно предъидущему, доказать наложеніемъ.

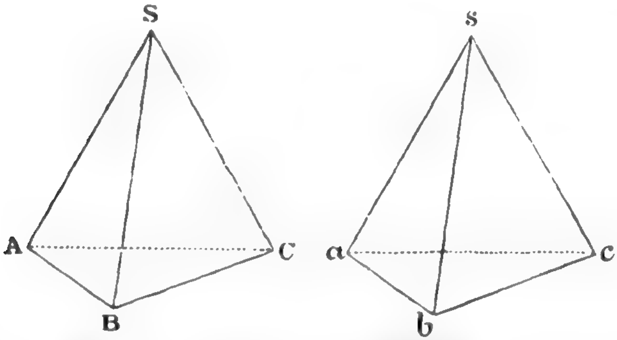
3. *Трегр. углы равны, если всѣ плоскіе углы одного равны порознь плоскимъ угламъ другаго и если эти углы одинаково расположены.* Пусть (чер. 452) уг. $ASB=asb$, уг. $ASC=asc$, уг. $BSC=$

Чер. 452.



$=bsc$, и положимъ сперва, что плоскіе углы ASB и ASC, которые заключают между собой двугр. уг. SA, суть острые. Въ какой нибудь точкѣ F ребра SA образуемъ линейный уг. DFE для двугр. угла SA; затѣмъ отложимъ $sf{=}SF$ и сдѣлаемъ при точкѣ f такое же построеніе, какъ при F. Такъ какъ углы ASB и ASC острые, то прямыя FD и FE пересѣкутъ ребра SB и SC въ D и E; а fd и fe пересѣкутъ sb и sc въ d и e. Соединимъ точки D и E, d и e прямыми DE и de; тогда прямоуг. тр—ки FSD и fsd будутъ равны, ибо $SF{=}sf$ и уг. $FSD{=}fsd$; точно такъ же треуг. $FSE{=}fse$. Изъ равенства этихъ треуг. слѣдуетъ, что $SD{=}sd$, $SE{=}se$; а такъ какъ уг. $BSC{=}bsc$, то и треуг. $DSE{=}dse$, слѣд. $DE{=}de$. Такъ какъ $DF{=}df$ по равенству тр—ковъ FSD и fsd; $FE{=}fe$ по равенству треуг. FSE и fse и $DE{=}de$ по равенству треуг. DSE и dse, то треуг. $DFE{=}dfe$ и уг. $DFE{=}$ $=dfe$; слѣд. и двугранные углы SA и sa равны; а потому по 2-му случаю и трегр. углы равны.

Чер. 453.

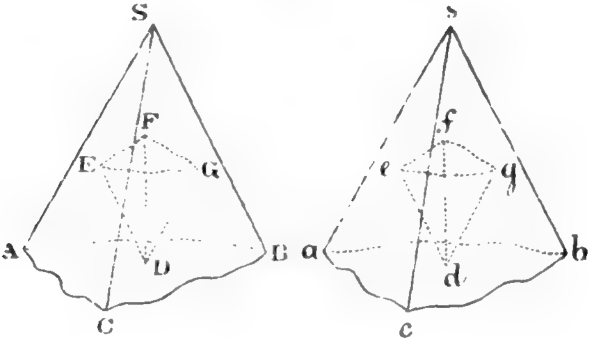


Если оба плоскіе угла ASB и ASC, содержащіе двугр. уг. SA, или одинъ изъ этихъ угловъ, будутъ не острые, то (чер. 453) отложимъ $SA{=}SB{=}SC{=}sa{=}sb{=}sc$; тогда треуг. $ASB{=}asb$, $ASC{=}asc$, $BSC{=}bsc$, какъ имѣющіе по равному углу между равными сторонами. Изъ равенства этихъ треуг. слѣдуетъ, что треуг. $ABC{=}abc$, какъ имѣющіе всѣ стороны равныя; поэтому трегр. углы A и a имѣютъ равные плоскіе углы, и кромѣ того углы SAB и SAC, а слѣд. и равные имъ sab и sac, суть острые; слѣд. по предъидущему двугр. углы AS и as равны; а въ такомъ случаѣ и трегр. уг. $S{=}s$.

4. *Трегранные углы равны, если въ нихъ двугранные углы порознь равны и одинаково расположены.* Пусть (чер. 454) двугр. уг. $SA{=}$ $=sa$, уг. $SB{=}sb$, уг. $SC{=}sc$. Возьмемъ внутри трегр. угла S точку D и проведемъ изъ нея $DF\perp$ плоскости ASB, $DE\perp ASC$ и $DG\perp BSC$; тогда уг. FDE будетъ служить дополненіемъ до 180° линейному углу двуграннаго угла AS. Въ самомъ дѣлѣ (чер. 455), плоскость, проведенная черезъ DF и DE, будетъ $\perp$ къ плоскостямъ ASB и ASC, а слѣд. и къ сѣченію ихъ SA; поэтому и сѣченія ея FK и EK съ плоскостями ASB и ASC будутъ перпендикулярны къ SA; т. е. уг. EKF будетъ линейнымъ угломъ для двугр. уг.

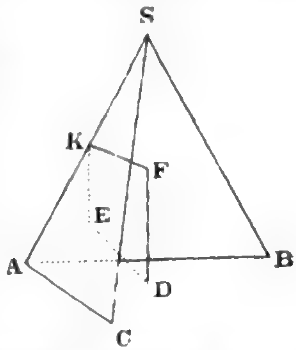
SA. А такъ какъ въ четыреугольникѣ $DFKE$ углы E и F прямые, то уг. $FDE +$ уг. $EKF = 2d$.

Чер. 454.



Точно такъ же найдемъ, что уг. FDG (чер. 454) будетъ дополненіемъ для лин. угла двугр. угла SB, а уг. EDG будетъ дополнять лин. уг. двугр. угла SC. Если мы возьмемъ точку d внутри угла s и сдѣлаемъ такое же построеніе, то углы fde, fdg и edg будутъ дополненіями линейнымъ угламъ двугр. угловъ sa, sb и sc. А такъ какъ по условію углы $SA = sa$, $SB = sb$, $SC = sc$, то $FDE = fde$, $FDG = fdg$, $EDG = edg$: поэтому, если мы проведемъ плоскости черезъ DF и DE, черезъ DF и DG и черезъ DE и DG и сдѣлаемъ соотвѣтственное построеніе въ углѣ s, то трегр. углы D и d будутъ равны, какъ имѣющіе равные плоскіе углы; а слѣд. будутъ равны и двугр. углы этихъ трегр. угловъ. Поэтому и наоборотъ плоскіе углы трегр. угловъ S и s будутъ равны какъ дополнительные линейнымъ угламъ двугранныхъ угловъ, образуемыхъ сторонами трегранныхъ угловъ D и d, ибо напр. $AS \perp$ къ плоскости FDE, такъ какъ эта плоскость $\perp$ къ плоскостямъ ASB и ASC.

Чер. 455.



392. **Задачи.** 1. Опредѣлить наибольшее число плоскостей, которыя можно провести черезъ n точекъ, полагая, что каждыя 4 изъ этихъ точекъ не лежатъ въ одной плоскости?

2. Сколько линій пересѣченія могутъ дать n плоскостей?

3. Разстояніе точки M отъ точки N, лежащей на плоскости P, равно a; а разстояніе N отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ M на P, равно b; опредѣлить разстояніе M отъ P?

4. Изъ точки M опущенъ на плос. P перпендикуляръ MA и проведены двѣ наклонныя MB и MC: опредѣлить длину MA, если $MB = b$, $MC = c$, $BA : CA = m : n$?

5. Разстоянія точекъ M и N отъ плос. P равны a и b; разстояніе между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ M и N на P, равно c; опредѣлить разстояніе MN, если $a=1^5/_6$; $b=1,65$; $c=1$?

6. Имѣемъ прямую $AB=a$ и $\parallel$ плос. P; изъ точки M внѣ плоскости P опущенъ на AB перпендикуляръ $=p$; продолженіе его до пересѣченія съ плоскостью $=q$. Опредѣлить разстояніе между основаніями прямыхъ, проведенныхъ изъ M черезъ конечныя точки прямой AB, если $a=3,9$; $p=5,2$; $q=1,4$?

7. Стороны треуг. ABC параллельны плоскости P; черезъ точку M и вершины треугольника проведены прямыя MA_1, MB_1, MC_1 до пересѣченія съ плос. P въ точкахъ A_1, B_1, C_1. Опредѣлить площ. треуг. $A_1B_1C_1$, если площ. $ABC=s$ и $MA:MA_1=m:n$?

8. Изъ точки, взятой на одной изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей, опущены перпендикуляры на другую плоскость и на линію пересѣченія плоскостей; первый перпендикуляръ вдвое меньше втораго. Опредѣлить уголъ между плоскостями?

9. Двѣ плоскости пересѣкаются; къ одной изъ нихъ возставлены два перпендикуляра до пересѣченія съ другой; разстоянія основаній этихъ перпендикуляровъ отъ линіи пересѣченія плоскостей равны соотвѣтственно a и a_1; длина перваго перпендикуляра $=b$. Опредѣлить длину втораго перпендикуляра, полагая $a=7,91$; $a_1=5,65$; $b=7,28$?

10. Прямая пересѣкаетъ двѣ взаимноперпендикулярныя плоскости; разстоянія точекъ пересѣченія отъ ребра угла, образуемаго плоскостями, соотвѣтственно равны $a=16$ и $b=12$; а отрѣзокъ ребра между этими разстояніями $=c=21$. Опредѣлить длину прямой?

11. Между двумя параллельными плоскостями проведены двѣ прямыя—одна $\perp$ къ плоскостямъ, другая наклонно; длина первой $=a=1,5$; разстояніе между основаніями обѣихъ прямыхъ на первой плоскости $=b=32,3$; а на второй равно $c=32,5$; проекція наклонной линіи на первой плоскости перпендикулярна къ линіи b, соединяющей основанія обѣихъ прямыхъ. Опредѣлить длину наклонной?

12. Два прямые угла имѣютъ параллельныя стороны и обращены отверстіями въ одну сторону; линія, соединяющая ихъ вершины, $=c=165$. На сторонѣ одного угла отъ его вершины отложена часть $a=48$, а на непараллельной ей сторонѣ другаго угла отложена часть $b=20$; опредѣлить длину прямой, соединяющей концы отрѣзковъ a и b?

13. Опредѣлить предѣлы для третьяго плоскаго угла трехграннаго угла, если первый уг. $=115°23'37''$, а второй $=69°57'3''$? если первый уг. $=78°32'54''$, а второй $=63°27'6''$.

14. Три прямыя, выходящія изъ одной точки, образуютъ между собой послѣдовательно углы въ $110°$, $113°$ и $137°$; могутъ ли эти прямыя лежать въ одной плоскости?

15. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ пространства, равноотстоящихъ отъ конечныхъ точекъ прямой AB?

16. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ плоскости P, равноотстоящихъ отъ точекъ M и N, лежащихъ внѣ этой плоскости?

17. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ пространства, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ параллельныхъ плоскостей находятся въ отношеніи $m:n$?

18. Изъ центра O круга, котораго радіусъ $=r=13$, возставленъ къ плоскости круга перпендикуляръ $OP=a=17$; къ кругу проведена касательная и на ней отъ точки касанія M отложена часть $MN=b=24$; опредѣлить разстояніе PN съ точностью до 0,01?

ГЛАВА III.

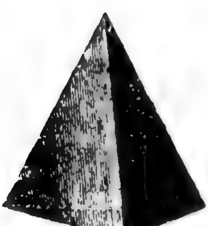
Многогранники.

393. *Многогранникомъ* наз. тѣло, ограниченное плоскостями. Эти плоскости наз. *гранями*; линіи ихъ пересѣченія наз. *ребрами*; точки пересѣченія реберъ—*вершинами*; двугранные и многогранные углы, образуемые гранями,—*углами многогранника*. Многогранники называются по числу граней: четырегранникъ, осьмигранникъ и т. под.

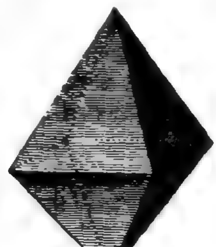
394. Правильные многогранники. Если всѣ грани многогранника суть равные между собою правильные многоугольники и если всѣ многогранные углы его равны между собою, то многогранникъ наз. *правильнымъ*.

Правильныхъ многогранниковъ только пять. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ многограннаго угла меньше 4 прямыхъ; а такъ какъ уголъ правильнаго треугольника$=60^0$, то слѣд. изъ прав. треугольниковъ можно составить только трегранный, четырегранный и пятигранный углы; шеститраннаго же составить нельзя, ибо сумма шести угловъ прав. тр—ка$=360^0$. Такимъ образомъ могутъ быть только 3 прав. тѣла, ограниченныхъ треугольниками; а именно *прав. четырегранникъ* или *тетраэдръ* (чер. 456), *осьмигранникъ* или *октаэдръ* (чер. 457), *двадцатигранникъ* или *икосаэдръ* (чер. 458).

Чер. 456.



Чер. 457.



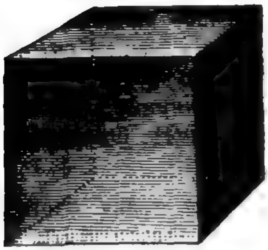
Чер. 458.

Изъ квадратовъ можно составить только трегранный уголъ (ибо.

сумма четырехъ угловъ$=4d$); поэтому можетъ быть только одно правильное тѣло, ограниченное квадратами, а именно *прав. шестигранникъ* или *гексаэдръ*, иначе *кубъ* (чер. 459).

Изъ правильныхъ пятиугольниковъ можно составить только трегр. уголъ, ибо каждый уг. прав. 5—ка $=108°$, слѣд. сумма трехъ угловъ $=324° < 360°$; сумма же четырехъ такихъ угловъ будетъ больше $360°$. Поэтому можетъ быть только одинъ прав. многогран-

Чер. 459.



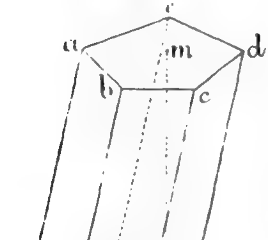
Чер. 460.

никъ, ограниченный пятиугольниками, именно *прав. двѣнадцатигранникъ* или *додекаэдръ* (чер. 460).

Изъ прав. 6—ковъ нельзя составить многогр. угла, ибо уг. прав. 6—ка$=120°$; слѣд. сумма трехъ такихъ угл.$=360°$. Съ увеличеніемъ числа сторонъ прав. мног—ка внутренній уголъ его увеличивается, слѣд. изъ прав. 7—ковъ, 8—ковъ.... многограннаго угла составить нельзя.

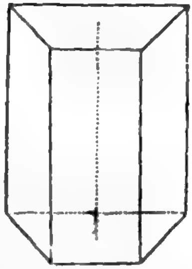
395. Призмы. Призмой (чер. 461) наз. многогранникъ, ограниченный двумя равными и параллельными многоугольниками $ABCDE$ и $abcde$ (многоуг. эти наз. *основаніями* призмы) и нѣсколькими параллелограммами Ab, Bc.... (эти параллелогр. наз. *боковыми гранями* призмы); прямыя Aa, Bb... наз. *боковыми ребрами* призмы; всѣ они параллельны и равны между собою. Прямыя AB, BC...., ab, bc.... суть ребра при основаніяхъ. Разстояніе между основаніями (т. е. перпендикуляръ Mm, возставленный къ плоскости одного изъ основаній до встрѣчи съ плоскостью другаго основанія) называется *высотой* призмы.

Чер. 461.



Если боковыя ребра (чер. 462) перпендикулярны къ основаніямъ, то призма наз. *прямою*; въ противномъ случаѣ (чер. 461) призма будетъ *наклонная*.

Чер. 462.



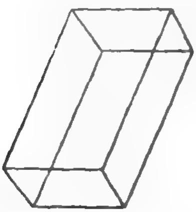
Въ каждой прямой призмѣ боковое ребро равно высотѣ призмы; боковыя грани ⊥ основанію и суть прямоугольники. Въ наклонной призмѣ высота меньше боковаго ребра.

Если въ основаніи прямой призмы будетъ прав. многоуг., то призма наз. *правильною*. Призмы получаютъ названія по своимъ основаніямъ, напр. треугольная, четыреугольная, пятиугольная.... призмы.

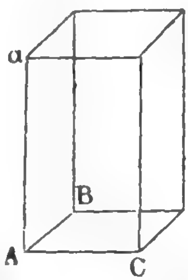
Чтобы показать возможность построенія призмы, вообразимъ многоуг. $ABCDE$ (чер. 462) и проведемъ внѣ плоскости этого многоуг. прямую Aa; черезъ какую нибудь точку a этой прямой вообразимъ плоскость || плос. $ABCDE$; затѣмъ черезъ вершины B, C, D, E проведемъ прямыя Bb, Cc... || Aa до встрѣчи съ плоскостью ad въ точкахъ b, c, d, e. Вообразивъ плоскости черезъ Aa и Bb, Bb и Cc..., получимъ призму, ибо фигуры Ab, Bc, Cd.... суть параллелограммы; сверхъ того и многоуг. $ABCDE = abcde$, ибо всѣ стороны и углы этихъ многоугольниковъ соотвѣтственно равны между собою.

396. Призма, имѣющая въ основаніи параллелограммъ (чер. 463), наз. *параллелипипедомъ*. Въ параллелипипедѣ всѣ грани суть параллелограммы. Параллелипипеды, какъ и вообще призмы, могутъ быть *прямые* и *наклонные*. Если прямой параллелипипедъ (чер. 464) имѣ-

Чер. 463.



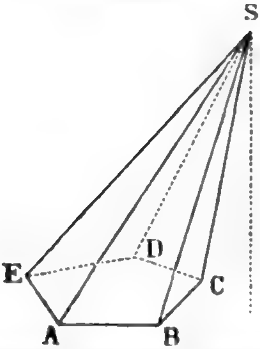
Чер. 464.



етъ въ основаніи прямоугольникъ, то онъ наз. *прямоугольнымъ*. Всѣ грани его суть прямоугольники. Прямоугольный параллелипипедъ, у котораго всѣ ребра равны между собою, иначе говоря, у котораго всѣ грани суть квадраты, есть *кубъ*. Ребра Aa, AB, AC прямоуг. пар—да (чер. 464), выходящія изъ одной вершины его, наз. *измѣреніями* параллелипипеда.

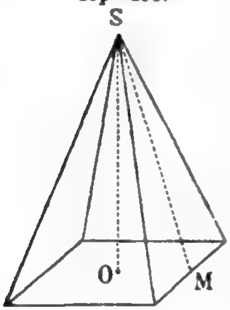
397. Пирамиды. На чер. 465 изображенъ многогранникъ, который съ одной стороны ограниченъ многоугольникомъ $ABCDE$; остальныя же его грани суть треугольники ASB, ASE..., имѣющіе общую вершину S, а основаніями ихъ служатъ стороны многоуг. Такой многогранникъ наз. *пирамидою*. Многоуг. $ABCDE$ наз. *основаніемъ* пирамиды; точка S—ея *вершиною*; перпендикуляръ опущенный изъ вершины S на плоскость основанія, наз. *высотой* пирамиды; прямыя SA, SB, SC... наз. *боковыми ребрами*; а треуг. SAE, SAB....—*боковыми гранями*. Пирамиду можно образовать, взявъ многоуг. $ABCDE$ и точку S внѣ плос. этого многоуг., проведя прямыя SA, SB.... и плоскости черезъ SA и SB, SB и SC....

Чер. 465.



Правильной пирамидой (чер. 466) наз. такая, у которой основаніемъ служитъ прав. многоуг., а высота упадаетъ въ центръ O этого многоуг. Боковыя ребра прав. пирамиды всѣ равны между собой (§ 355); боковыя грани ея суть равные между собой равнобедренные треуг. Высота SM каждаго изъ этихъ треуг. наз. *апоѳемой* пирамиды. Пирамиды получаютъ названія по ихъ основаніямъ, напр. шестиугольная, четыреугольная. . . . пирамиды.

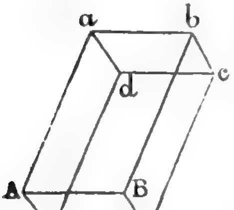
Чер. 466.



Разсмотримъ нѣкоторыя свойства призмъ и пирамидъ.

398. *Во всякомъ параллелипипедѣ противоположныя грани равны и параллельны.* Дѣйствительно, основанія DB и db (чер. 467) равны и параллельны, какъ основанія призмы; докажемъ. что напр. грань Ad= и || Bc. Такъ какъ AD = и || BC какъ противоположныя стороны параллелограмма DB; Dd=и || Cc, какъ стороны параллелогр. Dc, то уголъ ADd= =уг. BCc, и плоскости ихъ параллельны. А потому и параллелогр. Ad=и || Bc.

Чер. 467.



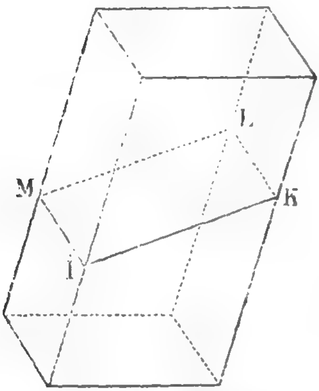
На основаніи этой теоремы можно за основаніе параллелипипеда принять какую угодно грань его.

399. *Всякая плоскость IL* (чер. 468), *пересѣкающая двѣ про-*

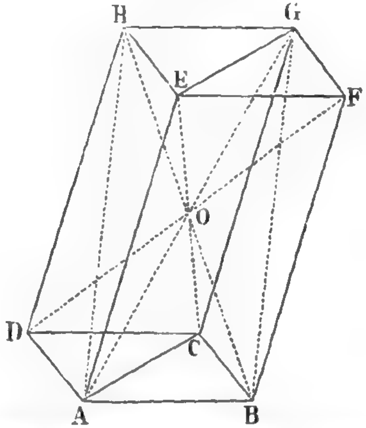
тивоположныя грани параллелипипеда, пересѣкаетъ его по параллелограмму. Дѣйствительно, $MI \parallel LK$ и $ML \parallel IK$, какъ сѣченія параллельныхъ плоскостей третьей.

400. Прямая линія, соединяющая вершины двухъ противоположныхъ угловъ параллелипипеда, наз. *діагональю.* Діагоналей въ параллелипипедѣ (чер. 469) можно провести четыре—HB, EC, GA, DF.

Чер. 468.



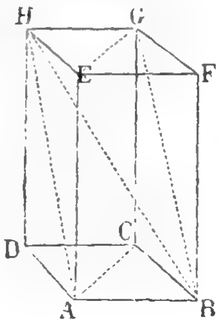
Чер. 469.



401. ***Всѣ четыре діагонали параллелипипеда пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся пополамъ.*** Прямая $AE =$ и $\parallel CG$ (чер. 469), слѣд. $AEGC$ есть параллелограммъ, а AG и CE діагонали этого параллелогр.; поэтому $AO = OG$. Четыреугольникъ $ABGH$ есть также параллелограммъ, ибо $AB =$ и $\parallel GH$; слѣд. діагонали его AG и BH тоже дѣлятъ другъ друга пополамъ; а потому и пересѣкаются въ точкѣ O, которая есть средина AG. Такъ же докажемъ теорему и относительно послѣдней діагонали DF.

402. Въ прямоуг. парал—дѣ (чер. 470) фиг. $ABGH$, $AEGC$... будутъ прямоугольниками, ибо тогда напр. въ $ABGH$ прямая $AB \perp BG$, такъ какъ $AB \perp$ плос. $BFGC$; поэтому ***въ прямоуг. пар—дѣ всѣ діагонали равны между собою.***

Чер. 470.



Изъ прямоуг. треуг. HAB имѣемъ

$$BH^2 = AB^2 + AH^2;$$

а изъ прямоуг. треуг. HDA получимъ

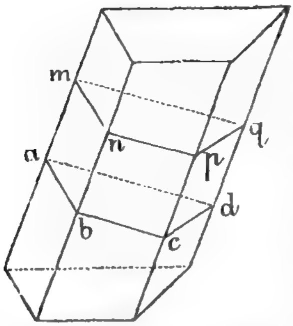
$$AH^2 = AD^2 + DH^2 = AD^2 + AE^2;$$ слѣд.

$$BH^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2$$ т. е.; ***квадратъ діагонали прямоуг. пар—да = суммѣ квадратовъ его измѣреній.***

Въ кубѣ всѣ измѣренія равны между собою; поэтому квадратъ діагонали куба = утроенному квадрату его ребра.

403. ***Если призму пересѣчемъ плоскостями, параллельными между собою, то въ сѣченіяхъ получимъ равные между собою многоугольники.*** Въ самомъ дѣлѣ (чер. 471), стороны сѣченій $abcd$ и $mnpq$ соотвѣтственно параллельны между собою какъ сѣченія параллельныхъ плоскостей третьею; притомъ эти стороны соотвѣтственно равны между собою, какъ параллели между параллелями; углы многоуг. $abcd$ и $mnpq$ также соотвѣтственно равны, какъ имѣющіе параллельныя стороны.

Чер. 471.



Точно такъ же можно доказать теорему и въ томъ случаѣ, когда плоскости пересѣкаютъ продолженія боковыхъ граней призмы.

Слѣдствіе. *Если пересѣчемъ призму плоскостью, параллельной ея основанію, то получимъ многоуг., равный основанію.*

404. ***Если пересѣчемъ пирамиду плоскостью, параллельной ея основанію, то***

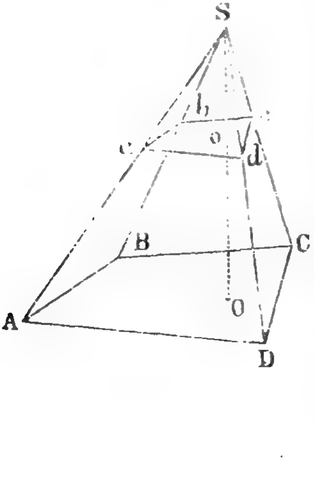
1) высота и боковыя ребра пирамиды дѣлятся на части пропорціональныя;

2) въ сѣченіи получится многоуг., подобный основанію;

3) площади сѣченія и основанія относятся между собой какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины.

1. Пусть (чер. 472) плос. $abcd \parallel$ плос. $ABCD$; тогда (слѣдствіе § 368) будемъ имѣть $\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \ldots\ldots = \frac{So}{SO}$.

Чер. 472.



2. Такъ какъ стороны мног. $ABCD$ и $abcd$ соотвѣтственно параллельны (§ 362), то углы ихъ равны, и чтобы доказать, что эти многоуг. подобны, надо доказать, что стороны ихъ пропорціональны. Вслѣдствіе параллельности сторонъ многоугольниковъ, треуг. $Sab \infty SAB$, треуг. $Sbc \infty SBC\ldots$, слѣд.

$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB}$, $\frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC}$, откуда

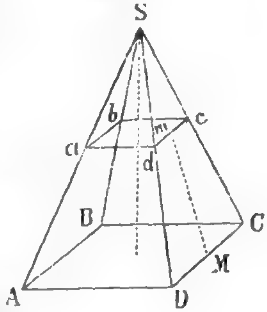
$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}$. Точно такъ же докажемъ пропорціональность и прочихъ сторонъ многоугольниковъ.

3. Такъ какъ $abcd \infty ABCD$, то (§ 289) $\frac{\text{площ. } abcd}{\text{площ. } ABCD}=\frac{ab^2}{AB^2}$;

но $\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA}=\frac{So}{SO}$, слѣд. $\frac{\text{пл. } abcd}{\text{пл. } ABCD}=\frac{So^2}{SO^2}$.

405. Плос. $abcd$ (чер. 472) дѣлитъ пирамиду на двѣ части: одна часть $Sabcd$ есть также пирамида; другая часть $ABCDabcd$ наз. *усѣченной* пирамидой; мног—ки $ABCD$ и $abcd$ наз. ея основаніями — *нижнимъ и верхнимъ*; боковыя грани ея суть трапеціи.

Чер. 473.



Если пирамида $SABCD$ (чер. 473) будетъ правильная, то и усѣченная пирамида наз. также *правильною*; оба ея основанія суть прав. одноименные многоугольники, а боковыя грани суть равнобедренныя трапеціи; высота mM каждой изъ этихъ трапецій наз. *апоѳемой* прав. усѣч. пирамиды.

406. *Если двѣ пирамиды одной высоты пересѣчемъ плоскостями, параллельными основаніямъ и проведенными въ одинакихъ разстояніяхъ отъ вершинъ, то площади полученныхъ сѣченій будутъ пропорціональны площадямъ основаній пирамидъ.* Пусть двѣ пирамиды имѣютъ высоту H; пересѣчемъ ихъ плоскостями, параллельными основаніямъ, въ разстояніи h отъ вершинъ. Означивъ площади сѣченій черезъ m и m_1, а площади основаній черезъ M и M_1, по предъидущей теоремѣ получимъ

$$\frac{m}{M}=\frac{h^2}{H^2},\ \frac{m_1}{M_1}=\frac{h^2}{H^2},\ \text{слѣд.}\ \frac{m}{M}=\frac{m_1}{M_1}.$$

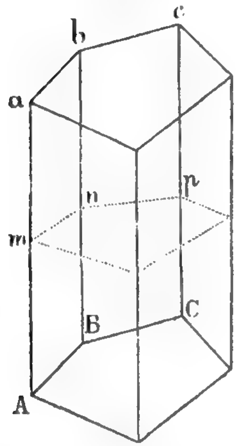
Слѣдствіе. Если въ предъидущей пропорціи положимъ $M=M_1$, то и $m=m_1$; т. е. *если двѣ пирамиды имѣютъ равныя высоты и равновеликія основанія, то сѣченія ихъ плоскостями, параллельными основаніямъ и проведенными въ одинакихъ разстояніяхъ отъ вершинъ, будутъ равновелики.*

407. Поверхности многогранниковъ. Чтобы опредѣлить поверхность многогранника, нужно опредѣлить сумму площадей его граней. Въ призмахъ и пирамидахъ различаютъ *боковую* и *полную* поверхность. Боковой поверхностью наз. сумма однихъ только боковыхъ граней призмы или пирамиды, не считая основаній.

408. Боковая повер. призмы (чер. 474) состоитъ изъ параллелограммовъ Ab, Bc....; основаніями этихъ параллелогр. служатъ ребра Aa, Bb...; а чтобы опредѣлить ихъ высоты, пересѣчемъ призму плоскостью, перпендикулярною къ ребрамъ; стороны mn, np... этого сѣченія и будутъ высотами параллелогр. Ab, Bc.... Поэтому

бок. пов. приз.$=Aa\,.\,mn+Bb\,.\,np+\ldots$; но $Aa=Bb=\ldots$, слѣд. бок. пов. приз. $=Aa.\,(mn+np+\ldots)$=*произведенію боковаго ребра на периметръ перпендикулярнаго сѣченія.*

Чер. 474.



409. Если призма будетъ **прямая**, то сѣченіе, перпендикулярное къ ребру, будетъ равно основанію, а боковое ребро= высотѣ призмы, и *слѣд. бок. пов. прямой призмы=произведенію периметра основанія на высоту.*

Вся поверхность призмы = боков. поверх. + удвоенная площадь основанія.

410. Боковая поверхность прав. пирамиды состоитъ изъ равныхъ равнобедр. треуг., которыхъ основаніями служатъ стороны основанія пирамиды, а высота ихъ есть апоѳема пирамиды; поэтому если число боковыхъ граней означимъ черезъ n, сторону основанія — b, апоѳему — a, то бок. пов. прав. пирамиды $=n.b.{}^1/_2\,a$=*произведенію периметра ея основанія на* $^1/_2$ *апоѳемы.*

Полная поверх. пирам. = бок. повер. + площадь основ.

411. Боковая повер. усѣч. прав. пир. состоитъ изъ равныхъ равнобедр. трапецій, параллельныя стороны которыхъ суть стороны верхняго и нижняго основаній, а высота—апоѳема пирамиды. Но площ. трап.=произведенію полсуммы параллельныхъ сторонъ на высоту, или произведенію средней линіи на высоту; поэтому *бок. пов. прав. усѣч. пир.=произведенію полсуммы периметровъ ея основаній на апоѳему* или *произведенію апоѳемы на периметръ сѣченія, параллельнаго основаніямъ и сдѣланнаго въ равныхъ отъ нихъ разстояніяхъ.*

Полная пов. прав. усѣч. пирам.=бок. повер. + сумма площадей основаній.

Для примѣра опредѣлимъ поверх. прав. усѣч. пирам., которая получится, если шестиугольную пирамиду, имѣющую высоту H, пересѣчь плоскостью на разстояніи h отъ вершины, полагая, что радіусъ круга, вписаннаго въ нижнее основаніе пирамиды, равенъ a.

Для опредѣленія поверхности надо опредѣлить стороны верхняго и нижняго основанія пирамиды и апоѳему ея. Назвавъ x сторону нижняго основанія и замѣтивъ, что радіусъ круга, описаннаго около этого основанія, будетъ$=x$, получимъ $a^2=x^2-\dfrac{x^2}{4}$, откуда $x=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; сторону z верхняго основанія опредѣлимъ изъ пропорціи $\dfrac{z}{x}=\dfrac{h}{H}$, откуда $x=\frac{2ah}{H\sqrt{3}}$; слѣд. периметръ нижняго основанія $=\frac{12a}{\sqrt{3}}$, а верхняго $=\frac{12ah}{H\sqrt{3}}$; апоѳема усѣч. пир. $=\sqrt{(H-h)^2+(a-y)^2}$, гдѣ y есть радіусъ круга, вписаннаго въ верхнее основаніе, который опредѣлится изъ пропорціи $\frac{y}{a}=\frac{h}{H}$; поэтому

$$\text{бок. пов. пир.}=\frac{6a}{H\sqrt{3}}(H+h)\sqrt{(H-h)^2+(a-y)^2}=$$

$=\frac{6a}{H\sqrt{3}}(H+h)\sqrt{(H-h)^2+a^2\left(1-\frac{h}{H}\right)^2}$. Такъ какъ площ. ниж. основ. $=6x\,.\,{}^1/_2\,a=\frac{6a^2}{\sqrt{3}}$, а площ. верх. основ. $=$ произведенію площ. ниж. осн. на $\frac{h^2}{H^2}$ (§ 404), то вся повер. усѣч. пир. $=$

$$=\frac{6a}{H\sqrt{3}}(H+h)\sqrt{(H-h)^2+a^2\left(1-\frac{h}{H}\right)^2}+\frac{6a^2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{h^2}{H^2}\right).$$

412. Чтобы опредѣлить поверх. прав. многогр., надо опредѣлить площ. одной его грани и умножить ее на число граней. Означая ребро прав. многогр. черезъ a, и замѣтивъ, что площ. прав. треуг., котораго сторона a, равна ${}^1/_4 a^2\sqrt{3}$, найдемъ

$$\text{поверх. тетраэдра}=a^2\sqrt{3};$$
$$\text{поверх. октаэдра}=2a^2\sqrt{3};$$
$$\text{поверх. икосаэдра}=5a^2\sqrt{3}.$$

Поверхность куба состоитъ изъ 6 равныхъ квадратовъ и $=6a^2$.

Для опредѣленія поверхн. прав. додекаэдра, надо опредѣлить площадь прав. 5—ка, котораго сторона$=a$. Въ § 260-мъ выведено, что $a=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, гдѣ r есть радіусъ описан. круга; отсюда $r^2=\frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}$; а потому апоѳема 5—ка $=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=$

$$=\sqrt{\frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{8a^2-5a^2+a^2\sqrt{5}}{4(5-\sqrt{5})}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}}=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{5}}=$$

$=\frac{a}{20}\sqrt{5(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}$; слѣд. площ. прав. 5—ка$=$

$$= 5a \cdot \frac{a}{40}\sqrt{5(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = {}^1/_8 a^2\sqrt{100+40\sqrt{5}} =$$

$$= {}^2/_8 a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = {}^1/_4 a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})};$$ а потому

поверхн. додекаэдра $= 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

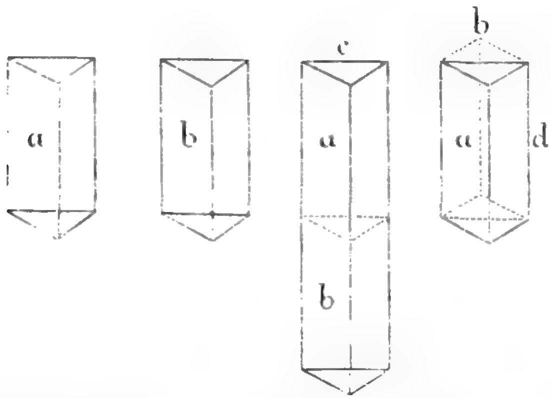
413. Объемы многогранниковъ. Объемомъ многогранника наз. величина части пространства, заключенной между его гранями.

Если два многогр. могутъ быть совмѣщены, то они равны между собою. Чтобы доказать, что два многогр. совмѣщаются, достаточно доказать совпаденіе всѣхъ вершинъ ихъ.

Когда многогранники не совмѣщаются, но объемы ихъ равны, то они наз. *равновеликими*.

Что дѣйствительно могутъ быть тѣла не равныя, но равновеликія, видно изъ того, что если взять напр. двѣ равныя треуг. приз. a и b (чер. 475), то ихъ можно сложить въ одно тѣло c—треугольн. призму, и въ тѣло d—четыреуг. призму. Очевидно, что призмы c и d не могутъ совмѣститься и слѣд. не равны между собою; между тѣмъ онѣ равновелики, ибо объемъ ихъ одинаковъ.

Чер. 475.



414. Измѣрить объемъ какого нибудь тѣла значитъ найти его отношеніе къ объему другаго тѣла, принятому за единицу. За такую единицу принимаютъ объемъ куба, котораго ребро равно какой либо линейной единицѣ, напр. 1 футу, 1 саж., 1 дюйму.; самый же кубъ наз. кубическимъ фут., куб. саж. и т. под.

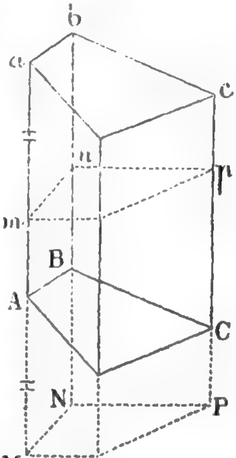
Опредѣленіе объемовъ призмъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

415. *Прямыя призмы, имѣющія равныя основанія и высо-*

ты, равны между собою. Дѣйствительно, если мы совмѣстимъ нижнія основанія такихъ призмъ, то всѣ боковыя ребра ихъ совмѣстятся, ибо они перпендикулярны къ основаніямъ и равны между собою; слѣд. и всѣ вершины призмъ совпадутъ.

416. *Всякая наклонная призма равновелика такой прямой призмѣ, которой высота=боковому ребру наклонной призмы, а основан. служитъ сѣченіе наклонной призмы плоскостью, перпендикулярной къ боковому ребру ея.* Возьмемъ (чер. 476) наклон. призму Ac и проведемъ перпендикулярное сѣченіе mp; продолжимъ aA на разстояніе $AM=am$ и черезъ точку M проведемъ плоскость $\perp aA$ до пересѣченія съ продолженіями всѣхъ боковыхъ граней призмы; эти пересѣченія составятъ многоуг. $MP=mp$; поэтому многогран. Mp будетъ прямая призма и высота Mm этой призмы будетъ равна ребру накл. призмы Aa (ибо $am=AM$ по отложенію, слѣдоват. $am+mA=AM+mA$), а основ. прямой призмы служитъ сѣченіе наклонной призмы плоскостью $\perp$ ребру ея. Чтобъ доказать, что накл. призма Ac равновелика прям. приз. Mp, замѣтимъ, что оба эти тѣла имѣютъ общую часть, именно многогр. Ap; чтобъ получить прямую призму, нужно къ Ap придать многогр. MC; а чтобы получить накл. призму, надо къ Ap придать многогр. mc; поэтому надо доказать, что $MC=mc$. Если вложить MC въ mc, такъ чтобы грани MP и mp совмѣстились (эти грани равны), то ребра MA, NB... пойдутъ по ma, nb ..., ибо они перпендикулярны къ плоскостямъ MP и mp; но $MA=ma$, $NB=nb$ ... (ибо $Nn=Mm$, $Bb=Aa$, слѣд. $Nn=Bb$, или $NB+Bn=Bn+nb$, слѣд. $NB=nb$); поэтому точки A, B, C.... упадутъ въ a, b, c... и всѣ вершины многогр. MC совпадутъ съ вершинами многогр. mc.

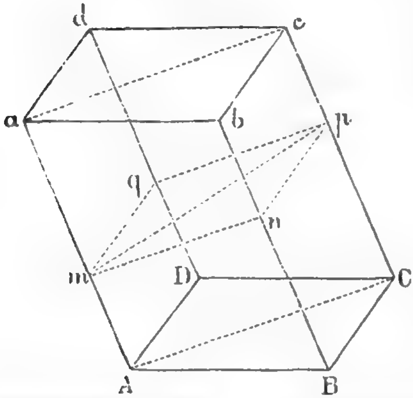
Чер. 476.



417. Плоскость, проходящая черезъ два несмежныя ребра многогранника, наз. *діагональною*.

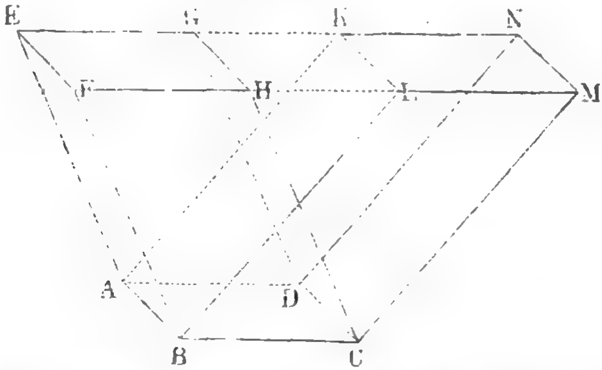
Всякій параллелипипедъ разсѣкается діагональной плоскостью на двѣ равновеликія треугольныя призмы. Проведемъ плоскость (чер. 477) черезъ ребра Aa и Cc; тогда получимъ двѣ треуг. призмы $ABCabc$ и $ADCadc$; чтобы доказать, что эти призмы равновелики, пересѣчемъ параллелипипедъ Ac плоскостью перпендикулярною къ его ребрамъ; тогда получимъ въ сѣченіи параллелограммъ $mnpq$; этотъ параллелогр. пересѣчется съ діагональной плоскостью $AaCc$ по своей діагонали mp и слѣд. раздѣлится на два равныхъ треуг. mnp и mqp. По предъид. теоремѣ призма $ABCabc$ равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніемъ служитъ треуг. *mnp*, а высотой ребро *Cc*; а призма *ACDacd* равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніе есть *mqp*, а высота также *Cc*. Но эти прямыя призмы равны между собою (§ 415), а потому наклонныя призмы *ABCabc* и *ACDacd* равновелики.

Чер. 477.



418. ***Параллелипипеды съ равными основаніями и высотами равновелики.*** Если совмѣстить нижнія основанія такихъ параллелипипедовъ, то верхнія ихъ основанія помѣстятся въ одной плоскости, и при этомъ могутъ 1) расположиться такъ, что двѣ стороны одного основанія будутъ находиться на продолженіи сторонъ другаго, такъ что (чер. 478) оба параллелипипеда будутъ заключены между параллельными плоскостями *FBCM* и *EADN*, или 2) верхнія основанія не будутъ заключаться между параллельными линіями (чер. 479).

Чер. 478.



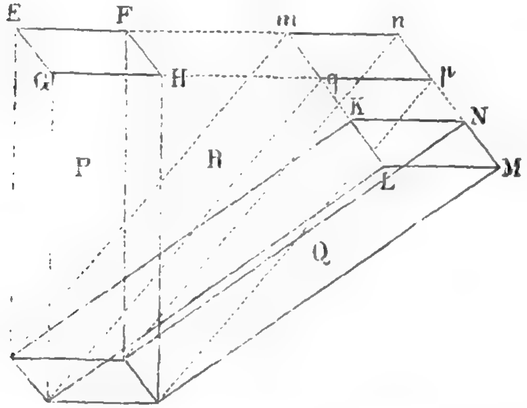
1. Треуг. призмы *FBLEAK* и *HCMGDN* равны между собою; дѣйствительно, у нихъ грань *ABFE*=*DCHG*, грань *ABLK*= =*DCMN* и заключенные между этими гранями двугр. углы *AB* и *DC* также равны, ибо стороны этихъ двугранныхъ угловъ взаимно параллельны и слѣд. линейные ихъ углы будутъ также имѣть взаимно-параллельныя стороны и будутъ равны между собою. Поэтому если мы призму *HCMGDN* вложимъ въ призму *FBLEAK*, такъ

чтобы равныя грани $ABFE$ и $DCHG$ совпали, то плоскости AL и DM совмѣстятся по равенству двугран. угловъ AB и DC, и самые параллелограммы $ABLK$ и $DCMN$ совмѣстятся, такъ какъ двѣ стороны ихъ AB и DC совмѣстились и притомъ параллелограммы эти равны; а въ такомъ случаѣ всѣ вершины призмъ совпадутъ.

Но если отъ всего многогр. AN отнять лѣвую призму, то получимъ правый параллелипипедъ BN; а отнявъ правую призму, получимъ лѣвый параллелип. AH; слѣд. эти пар—ды равновелики.

2. Если верхнія основанія парал—довъ P и Q (чер. 479) не

Чер. 479.



находятся между одними параллельными линіями, то продолжимъ стороны EF и GH, LK и MN; линіи эти пересѣкутся (ибо верхнія основанія вслѣдствіе равенства высотъ пар—довъ лежатъ въ одной плоскости) и образуютъ параллелограммъ $mnpq$; построимъ теперь пар—дъ R, котораго основаніе $mnpq$ будетъ находиться между параллельными линіями съ основаніями пар—довъ P и Q; по предъидущему R равновеликъ параллелипипедамъ P и Q; слѣд. P и Q равновелики между собою.

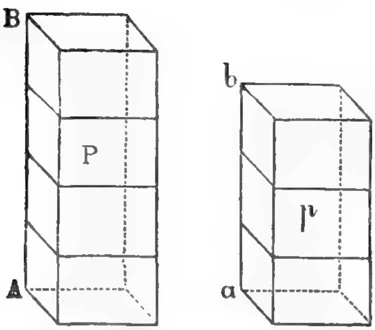
Прямые (а слѣд. *и прямоугольные*) *параллелипипеды съ равными основаніями и высотами равны между собою* (§ 415).

419. *Объемы прямоугольныхъ параллелипипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.*

1. Положимъ (чер. 480), что высоты AB и ab пар—довъ P и p соизмѣримы, и пусть общая мѣра повторяется m разъ въ AB и n разъ въ ab; тогда $\frac{AB}{ab}=\frac{m}{n}$. Проведя черезъ точки, которыя получатся при отложеніи общей мѣры по линіямъ AB и ab, пло-

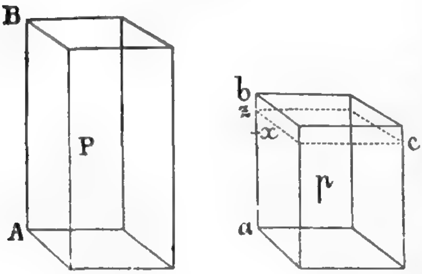
скости, параллельныя основаніямъ, мы раздѣлимъ P на m, а p на n равныхъ пар—довъ; слѣд. $\frac{P}{p}=\frac{m}{n}$. Итакъ $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab}$.

Чер. 480.



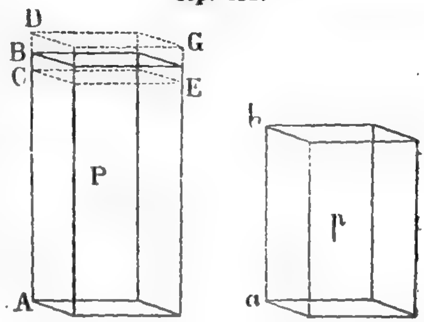
2. Положимъ, что высоты AB и ab (чер. 481) не соизмѣримы. Для доказательства, что и въ этомъ случаѣ отношеніе объемовъ пар-довъ равно отношенію ихъ высотъ, употребимъ способъ приведенія къ нелѣпости. Положимъ, что $\frac{P}{p}>\frac{AB}{ab}$; тогда, чтобъ уравнять эти отношенія, надо второе отношеніе увеличить, взявъ вмѣсто ab меньшую линію, напр. ax; пусть $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ax}$. Раздѣлимъ высоту AB на равныя части, которыя были бы меньше xb, и будемъ одну такую часть откладывать по ab, начиная отъ a; тогда одна изъ точекъ дѣленія упадетъ между x и b, напр. въ z. Проведя черезъ z плоскость || основанію, получимъ пар-дъ ac, котораго высота az соизмѣрима съ AB; слѣд. по предъидущему будемъ имѣть $\frac{P}{ac}=\frac{AB}{az}$. Сравнивая эту пропорцію съ допущенной нами пропорціей $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ax}$, замѣчаемъ, что у нихъ предъидущіе члены равны; слѣд. послѣдующіе члены должны быть пропорціональны, т. е. $\frac{ac}{p}=\frac{az}{ax}$. Но эта пропорція не вѣрна, ибо $ac<p$, а $az>ax$; поэтому $\frac{P}{p}$ не можетъ быть больше $\frac{AB}{ab}$. Легко доказать, что $\frac{P}{p}$ не можетъ быть и меньше $\frac{AB}{ab}$; для этого надо только взять вмѣсто ab линію, бо̀льшую ab, и повторить предъидущія разсужденія. Такимъ образомъ $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab}$ и въ случаѣ несоизмѣримости высотъ.

Чер. 481.



Приведемъ еще доказательство теоремы въ случаѣ несоизмѣримости высотъ. Покажемъ, что отношеніе объемовъ пар—довъ P и p (чер. 482) равно отношенію ихъ высотъ AB и ab при всякой степени точности $\frac{1}{n}$. Раздѣлимъ ab на n равныхъ частей и положимъ, что одна такая часть въ линіи AB отъ A до C уложится m разъ и отъ C до D еще одинъ разъ; тогда $\frac{AB}{ab}=\frac{m}{n}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$.

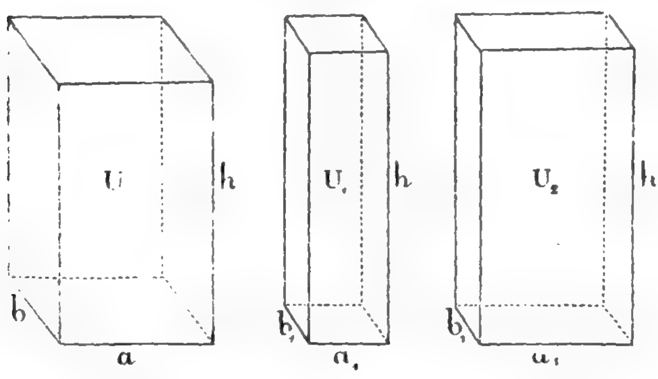
Чер. 482.



Вообразивъ черезъ точки C и D плоскости, параллельныя основанію, мы получимъ пар—дъ $AE<P$ и $AG>P$, и такъ какъ $\frac{AE}{p}=\frac{m}{n}$, а $\frac{AG}{p}=\frac{m+1}{n}$, то $\frac{P}{p}=\frac{m}{n}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, какъ бы мала ни была эта дробь. А потому на основаніи способа предѣловъ заключаемъ, что отношеніе $\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab}$ и въ случаѣ несоизмѣримости высотъ.

420. *Объемы прямоуг. параллелипипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ основанія.* Означимъ (чер. 483) объемы

Чер. 483.



пар—довъ черезъ v и v_1, высоту ихъ—h, стороны основаній — a, b и a_1, b_1. Построимъ третій пар—дъ v_2, который имѣлъ бы туже высоту h, а основаніемъ его служилъ бы прямоугольникъ, у котораго одна сторона a, а другая b_1. Пар—ды v и v_2, если принять за основанія ихъ переднія грани, будутъ имѣть равныя основанія; высотами же ихъ будутъ b и b_1. Пар—ды же v_2 и v_1 будутъ имѣть равныя основанія, если принять за основанія боковыя грани; высотами же ихъ будутъ a и a_1. Поэтому, на основаніи предъид. теоремы, будемъ имѣть

$\frac{v}{v_2}=\frac{b}{b_1}$; $\frac{v_2}{v_1}=\frac{a}{a_1}$. Перемноживъ эти пропорціи, получимъ $\frac{v}{v_1}=\frac{ab}{a_1b_1}$, гдѣ произведенія ab и a_1b_1 выражаютъ площади основаній пар—довъ.

421. *Объемы всякихъ прямоугольныхъ пар—довъ относятся какъ произведенія ихъ высотъ на основанія.*

Пусть v и v_1 будутъ объемы двухъ прямоуг. пар-довъ, которыхъ основанія суть b и b_1, а высоты h и h_1. Построимъ такой третій пар—дъ v_2, котораго основаніе было бы b_1, а высота h; тогда $\frac{v}{v_2}=\frac{b}{b_1}$; $\frac{v_2}{v_1}=\frac{h}{h_1}$. Перемноживъ эти пропорціи, получимъ $\frac{v}{v_1}=\frac{bh}{b_1h_1}$.

Если напр. $b=8$ кв. фут., $h=12$ фут., $b_1=3$ кв. фут., $h_1=16$ фут., то $\frac{v}{v_1}=\frac{8.12}{3.16}=2$; т. е. объемъ перваго параллелипипеда вдвое больше втораго.

422. Если въ пропорціи $\frac{v}{v_1}=\frac{bh}{b_1h_1}$ положимъ, что $v_1=$ кубической единицѣ, то b_1 будетъ $=$ соотвѣтствующей квадр. единицѣ, а $h_1=$ соотвѣтствующей линейной единицѣ (если напр. $v_1=1$ куб. фут., то $b_1=1$ кв. ф., $h_1=1$ ф.), и тогда пропорція приметъ видъ $v=bh$. Это выраженіе показываетъ, что для того, чтобы узнать, сколько кубич. единицъ заключается въ объемѣ какого нибудь прямоуг. пар—да, надо число квадр. единицъ, заключающихся въ площади его основанія, умножить на число соотвѣтствующихъ линейныхъ единицъ, заключающихся въ его высотѣ. Короче эта теорема выражается такъ:

объемъ прямоуг. пар-да $=$ произведенію площади его основанія на высоту.

Если напр. площ. основанія $=17$ кв. фут., а высота $=5$ фут., то объемъ пар-да $=17.5=85$ куб. фут,

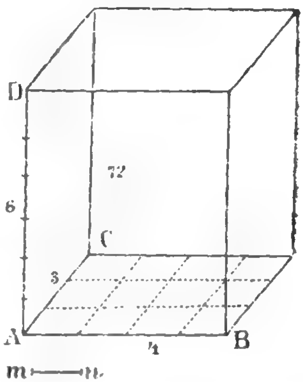
Если стороны основанія пар-да означимъ a и c, то площ. основ. $=ac$, слѣд. $v=ach$; т. е.

объемъ прямоуг. пар-да $=$ произведенію его измѣреній.

Положимъ, что линія mn (чер. 484) есть какая нибудь линейная единица, напр. футъ, и что mn повторяется 4 раза въ AB, 3 раза въ AC и 6 разъ въ AD; тогда площ. основанія параллелипипеда $=12$

кв. фут.; слѣд. на эту площадь можно поставить 12 кубовъ, изъ которыхъ каждый $=$ 1 куб. футу; но какъ высота пар-да $=$ 6 фут., то поставленный слой кубовъ займетъ только $^1/_6$ часть объема пар-да; а чтобъ наполнить весь пар-дъ, надо 6 такихъ слоевъ; такимъ образомъ объемъ пар-да $= 12.6 = 72$ куб. фут.

Чер. 484.



Если величина измѣреній пар-да будетъ выражена числами разныхъ наименованій, то для опредѣленія его объема, надо всѣ числа привести въ одно наименованіе и затѣмъ перемножить. Пусть напр. измѣренія пар-да будутъ 15 дюйм., 3 вершка и $1^1/_2$ фута; если хотимъ опредѣлить объемъ пар-да въ куб. дюйм., то обращаемъ данныя числа въ дюймы; 3 верш. $= {}^3/_{16}$ арш. $= {}^3/_{16} \cdot 28$ дюйм.; $1^1/_2$ фут. $= 1^1/_2 \cdot 12$ дюйм., и объемъ пар-да $= 15 \cdot {}^3/_{16} \cdot 28 \cdot 1^1/_2 \cdot 12 = 1417^1/_2$ куб. дюйм.

423. Въ кубѣ всѣ измѣренія равны между собою, и называя ребро куба a, а объемъ v, получимъ $v = a^3$, т. е.

объемъ куба $=$ кубу его ребра.

Такъ если ребро куба $=$ 3 фут., то объемъ его $= 3^3 = 27$ куб. ф.; точно также 1 куб. саж. $= 7^3 = 343$ куб. ф.; 1 куб. арш. $= 16^3$ куб. верш. и т. п.; вообще, если единичное отношеніе двухъ линейныхъ мѣръ есть n, то единичное отношеніе соотвѣтствующихъ кубическихъ мѣръ будетъ n^3.

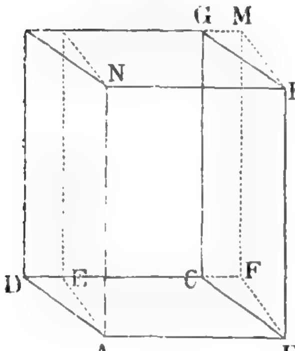
424. Въ планиметріи мы видѣли, какимъ образомъ можно увеличивать или уменьшать квадратъ въ нѣсколько разъ, т. е какъ, имѣя квадратъ, котораго сторона a, и слѣд. площадь a^2, опредѣлить сторону такого квадрата, котораго площадь была бы na^2. Означивъ эту сторону черезъ x, будемъ имѣть $x^2 = na^2$, откуда $x = a\sqrt{n}$; если число n есть точный квадратъ, то величину x можно вычислить точно. Но каково бы ни было n, лишь бы оно было числомъ раціональнымъ, всегда можно построить x, ибо изъ урав. $x^2 = na^2$ находимъ $na : x = x : a$; т. е. x есть средняя пропорц. между a и na.

Совершенно другое представляетъ задача объ увеличеніи или уменьшеніи куба. Пусть имѣемъ кубъ, котораго ребро $= a$, и слѣд. объемъ $= a^3$, и требуются опредѣлить ребро куба, котораго объемъ былъ бы na^3. Означивъ это ребро черезъ x, получимъ $x^3 = na^3$, откуда $x = a\sqrt[3]{n}$. Если n будетъ точный кубъ, то величину x можно опредѣлить точно; напр. если $n = 8, 64, {}^{27}/_{512} \ldots$, то $x = 2a$, $4a$,

$^3/_8a$ .. Если же n не есть точный кубъ, то величина x можетъ быть вычислена только приблизительно. По способамъ начальной геометріи, т. е. *съ помощью циркуля и линейки*, нельзя также и построить x. Еще древніе Греки занимались рѣшеніемъ задачи *объ удвоеніи куба*; изъ предъидущаго видно, что геометрическое рѣшеніе этой задачи невозможно.

425. Чтобъ показать, какъ опредѣляется объемъ прямаго параллелипипеда, возьмемъ (чер. 485) прямой пар-дъ AG и изъ точекъ A и B проведемъ $AE \perp CD$ и $BF \perp CD$; затѣмъ построимъ прямоуг. параллелипипедъ AM, который съ пар-домъ AG будетъ имѣть одну высоту—AN, а основаніемъ его будетъ прямоугольникъ AF. Но если у пар-довъ AG и AM принять за основаніе переднюю грань AK, то они будутъ также имѣть и общую высоту AE и слѣд. они равновелики. Но объемъ прямоуг. пар-да $AM = AB \,.\, AE \,.\, AN$; слѣд. и объемъ пар-да $AG = AB \,.\, AE \,.\, AN$; а такъ какъ $AB \,.\, AE$ выражаетъ площадь основанія прямаго пар-да AG, а AN есть его высота, то слѣд. *объемъ прямаго параллелипипеда = площади его основанія, умноженной на высоту.*

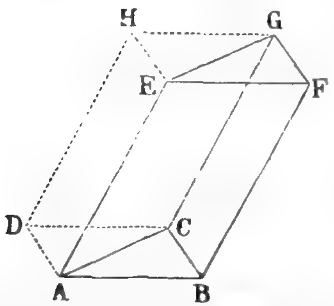
Чер. 485.



426. Пусть имѣемъ наклонный параллелипипедъ P, котораго основаніе есть b, а высота h. Построимъ на основ ніи b прямой пар-дъ P_1 такой же высоты h. Тогда P_1 будетъ равновеликъ P; а $P_1 = bh$, слѣд. и $P = bh$; т. е. *объемъ всякаго пар-да = произведенію площади его основанія на высоту.*

427. Возьмемъ треуг. призму $ABCEFG$ (чер. 486); продолжимъ плоскости обоихъ основаній призмы и проведемъ черезъ точку A плоскость $\parallel$ грани $BFGC$ призмы, а черезъ C плоскость $\parallel$ грани $AEFB$; эти плоскости пересѣкутся съ плоскостями основаній призмы, и мы получимъ пар—дъ AG, для котораго грань призмы $AEGC$ будетъ діагональной плоскостью; поэтому (§ 417) треугольн. призмы $ABCEFG$ и $ACDEGH$ будутъ равновелики; слѣдовательно об. $ABCEFG = {}^1/_2$ об. пар—да $AG = {}^1/_2$ площ. $ABCD \,.\, h$, гдѣ h есть

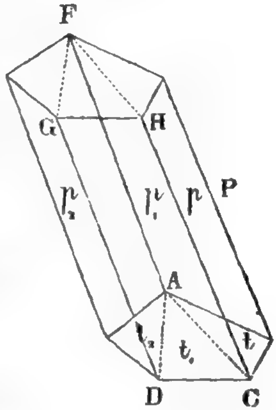
Чер. 486.



высота пар—да и высота призмы. Но $^1/_2$ $ABCD=ABC$; слѣдоват. об. приз. $ABCEFG=$пл. $ABC.h$; т. е. *объемъ треуг. призмы= произведенію площ. ея основанія на высоту.*

428. Многоуг. призму P (чер. 487) можно плоскостями, проведенными черезъ ребро AF и ребра CH, DG раздѣлить на треуг. призмы p, p_1, p_2, которыя будутъ имѣть высотой высоту h призмы P, а основаніями треуг. t, t_1, t_2. Такимъ образомъ объемъ $P=p+p_1+p_2=th+t_1h+t_2h=$ $=(t+t_1+t_2)h=Mh$, гдѣ M есть основаніе призмы P. Итакъ *объемъ всякой призмы= произведенію площади ея основанія на высоту.*

Чер. 487.



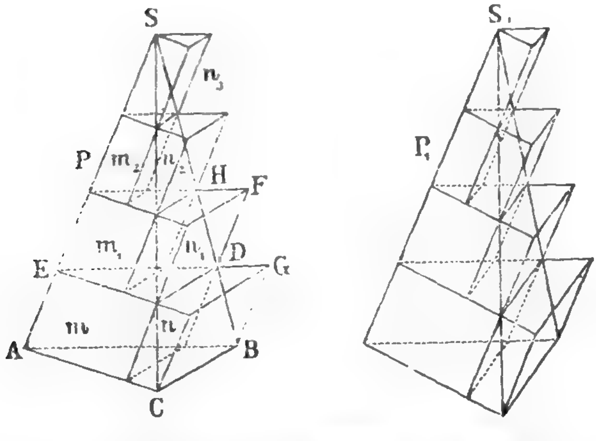
Слѣдствія. 1. Призмы, имѣющія равныя высоты и равновеликія основанія, равновелики.

2. Объемы призмъ относятся какъ произведенія основаній на высоты.

3. Объемы призмъ съ равными основаніями относятся какъ высоты; а съ равными высотами—какъ площади основаній.

429. Опредѣленіе объема пирамиды основывается на слѣд. теоремѣ: *треугольныя пирамиды, имѣющія равныя высоты и равновеликія основанія, равновелики.* Положимъ (чер. 488), что пирамиды

Чер. 488.



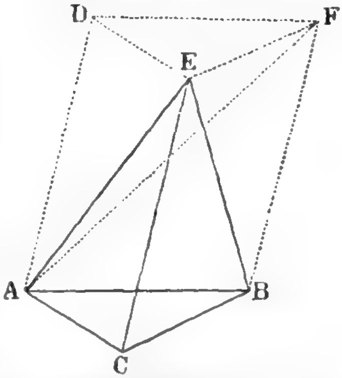
P и P_1 имѣютъ равныя высоты и равновеликія основанія; представимъ себѣ, что основанія ихъ помѣщены въ одной плоскости; тогда ихъ вершины S и S_1 будутъ находиться въ одинакомъ разстояніи отъ этой плоскости. Раздѣлимъ ребро SA на n равныхъ частей и проведемъ черезъ точки дѣленія плоскости || плоскости основаній пирамидъ; тогда эти параллельныя плоскости пересѣкутъ пирамиды по треугольникамъ, соотвѣтственно равновеликимъ (§ 406). Построимъ въ пирамидѣ P рядъ внутреннихъ призмъ AD, EH... или m, m_1... и рядъ *внѣшнихъ* призмъ AG, EF.. или $m+n$, m_1+n_1... Тоже построеніе сдѣлаемъ и въ пирамидѣ P_1. Тогда каждая призма пирамиды P будетъ равновелика соотвѣтствующей ей призмѣ другой пирамиды, ибо эти призмы имѣютъ равновеликія основанія и равныя высоты. Такимъ образомъ сумма объемовъ всѣхъ внутреннихъ призмъ пирамиды P будетъ равна суммѣ объемовъ внутреннихъ призмъ пирамиды P_1; также и суммы объемовъ внѣшнихъ призмъ въ обѣихъ пирамидахъ будутъ равны между собою. Съ увеличеніемъ числа дѣленій ребра SA, суммы объемовъ внутреннихъ и внѣшнихъ призмъ будутъ приближаться къ объему пирамиды — первая увеличиваясь, а вторая — уменьшаясь, и если мы докажемъ, что разность между обѣими суммами можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, то разность между пирамидой и каждой изъ суммъ будетъ и подавно безконечно мала; а потому пирамида будетъ служить предѣломъ для обѣихъ суммъ, и такъ какъ суммы внутреннихъ и внѣшнихъ призмъ въ обѣихъ пирамидахъ соотвѣтственно равны; то по способу предѣловъ (теор. 2 § 310) заключимъ, что и предѣлы ихъ, т. е. пирамиды, равновелики.

Сумма внѣшнихъ призмъ пирамиды $P=m+n+m_1+n_1+m_2+n_2+n_3$; сумма внутреннихъ призмъ той же пирамиды$=m+m_1+m_2$; разность между этими суммами$=n_3+n_2+n_1+n$. Но $n_3=m_2$; слѣд. $n_2+n_3=n_2+m_2=m_1$; $n_3+n_2+n_1=m_1+n_1=m$; итакъ разность $=$ призмѣ $m+n$; объемъ этой призмы$=$площ. $ABC.\ h$, гдѣ h, т. е. высота призмы, есть n—я часть высоты пирамиды; такъ какъ h можно сдѣлать меньше всякой, произвольно взятой, величины, то и произведеніе площ. ABC на h есть также величина безконечно малая, что и требовалось доказать.

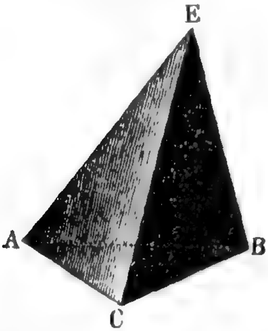
430. *Объемъ треугольной пирамиды есть одна треть объема призмы, имѣющей съ ней одно основаніе и одну высоту.* Возьмемъ пирамиду $EABC$ (чер. 489) и построимъ на ея основаніи призму $ABCDEF$ (для чего проведемъ черезъ E плоскость || ABC, а изъ A и B проведемъ прямыя AD и BF || CE до встрѣчи съ проведенной плоскостью; затѣмъ черезъ прямыя CE и AD, CE и BF, BF и AD проведемъ плоскости). Если проведемъ теперь плоскость черезъ A, E и F, то призма разобьется на три пирамиды: данную $EABC$ и двѣ новыхъ $EADF$ и $EABF$. (Пирамиды эти представлены отдѣльно на чер. 490—492). Для доказательства тео-

ремы надо доказать равновеликость всѣхъ этихъ пирамидъ. Двѣ новыя пирамиды $EADF$ и $EABF$ равновелики, ибо основанія ихъ AFD и AFB равны какъ половины параллелограмма $ADFB$, и высоты равны, такъ какъ основанія пирамидъ лежатъ въ одной плоскости, вершина же у нихъ общая. Но если въ пирамидѣ $EADF$ примемъ за вершину точку A, то основаніе ея EDF будетъ=основанію ABC данной пирамиды, и высоты этихъ пирамидъ будутъ одинаковы; стало быть пирамида $ADEF$ равновелика $EABC$. И такъ всѣ пирамиды равновелики, и слѣд. объемъ каждой изъ нихъ $=\frac{1}{3}$ объема призмы. Но объемъ призмы=произведенію основанія

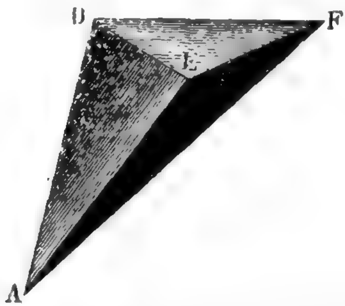
Чер. 489.



Чер. 490.



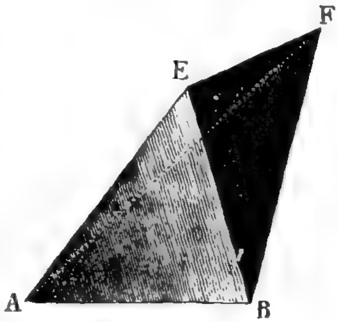
Чер. 491.



на высоту; слѣд. *объемъ пирамиды=площади основанія, умноженной на* $\frac{1}{3}$ *высоты.*

431. Всякую многоугольную пирамиду можно діагональными плоскостями раздѣлить на треугольныя пирамиды, которыя будутъ имѣть съ ней одну высоту; сумма же основаній этихъ пирамидъ будетъ=основанію многоугольной пирамиды; поэтому *объемъ всякой пирамиды равенъ площади ея основанія, умноженной на* $\frac{1}{3}$ *высоты.*

Чер. 492.



Слѣдствія. 1. Всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней равновеликое основаніе и равную высоту.

2. Пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелики.

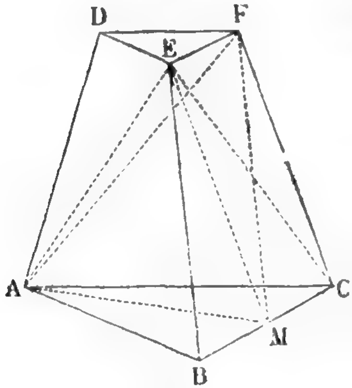
3. Объемы пирамидъ относятся какъ произведенія площадей ихъ основаній на высоты.

4. Объемы пирамидъ съ равновеликими основаніями относятся какъ высоты; а съ равными высотами относятся какъ площади основаній.

432. Опредѣлимъ объемъ правильнаго тетраэдра, котораго ребро$=a$. Площ. основанія тетраэдра$=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; высота же тетраэдра $=h=\sqrt{a^2-r^2}$, гдѣ r есть радіусъ круга, описаннаго около основанія тетраэдра; такъ какъ $r=\frac{a}{\sqrt{3}}$, то $h=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$; слѣд. объемъ тетраэдра $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.

433. Опредѣлимъ объемъ усѣченной треуг. пирамиды AF (чер 493). Проведя плоскости черезъ A,E,C и черезъ A,E,F, разобьемъ данную пирамиду на три треуг. пирамиды—$EABC$, $EADF$ и $EACF$.

Чер. 493.

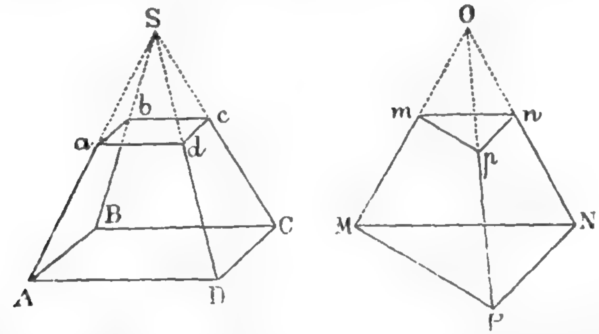


Пирамида $EABC$ имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе данной пирамиды, а высоту общую съ данной; если въ пирамидѣ $EADF$ возьмемъ за вершину точку A, то основаніемъ ея будетъ DEF, т. е. верхнее основаніе данной пирамиды, а высота ея будетъ общая съ данной. Разсмотримъ теперь третью пирамиду $EACF$. Проведемъ по плоскости EC прямую $EM \parallel FC$ до пересѣченія съ CB и построимъ пирамиду $MACF$; эта пирамида будетъ равновелика пирам. $EACF$, ибо онѣ имѣютъ общее основаніе ACF и высоты ихъ равны, такъ какъ вершины ихъ M и E лежатъ на прямой $EM \parallel$ основанію пирамиды ($EM \parallel$ плос. ACF, потому что $EM \parallel$ прямой FC, лежащей въ этой плоскости). Если же въ пирамидѣ $MACF$ примемъ за вершину точку F, то пирамида будетъ имѣть такую же высоту, какъ и данная, а основаніемъ треуг. ACM. Чтобы опредѣлить этотъ треуг., замѣтимъ, что тр—ки ACB и ACM имѣютъ общій уг. C; а тр—ки ACM и DFE имѣютъ равные углы C и F; но площади тр—ковъ, имѣющихъ общій уголъ или по равному углу, относятся какъ произведенія сторонъ, содержащихъ эти углы; слѣд. $\frac{ACB}{ACM}=\frac{AC\cdot CB}{AC\cdot CM}=$

$=\frac{CB}{FE}$, ибо $CM=FE$ какъ параллельныя между параллельными; $\frac{ACM}{DFE}=\frac{AC \,.\, CM}{DF \,.\, FE}=\frac{AC}{DF}$. Но треуг. $ACB \infty DFE$, слѣд. $\frac{AC}{DF}=$ $=\frac{CB}{FE}$; поэтому и $\frac{ACB}{ACM}=\frac{ACM}{DFE}$; т. е. основаніе третьей пирамиды $FACM$ есть среднее пропорціональное между основаніями данной пирамиды. Итакъ *объемъ усѣченной треугольной пирамиды = суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, которыя имѣютъ высоту общую съ усѣченной пирамидой, а основанія—одна нижнее основаніе усѣченной пирамиды, другая—верхнее, третья—среднее пропорціональное между верхнимъ и нижнимъ.*

434. Возьмемъ многоуг. усѣч. пирамиду Ac (чер. 494); продолживъ ея ребра до пересѣченія въ S, получимъ пирамиды $SABCD$ и $Sabcd$; усѣч. пирамида будетъ представлять разность этихъ пирамидъ. Построимъ теперь въ плоскости основанія $ABCD$ треуг. MNP, равновеликій $ABCD$; возьмемъ точку O въ такомъ же раз-

Чер. 494.



стояніи отъ плоскости $ABCD$, какъ и S, и построимъ пирамиду $OMNP$; продолживъ плоскость $abcd$, пересѣчемъ пирамиду $OMNP$ и получимъ въ сѣченіи треур. mnp, равновеликій $abcd$ (§ 406). Объемъ $SABCD$=об. $OMNP$; об. $Sabcd$=об. $Omnp$; слѣд. и об. Ac=об. Mn. Но об. треуг. усѣч. пир. Mn=суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту общую съ Mn, а основанія—одна нижнее основаніе, другая—верхнее, третья—среднее пропорціональное между ними; слѣд. тому же равенъ и объемъ усѣч. многоуг. пир. Ac; а такъ какъ основанія этой послѣдней соотвѣтственно равновелики основаніямъ усѣч. треуг. пир. и высоты обѣихъ пирамидъ равны, то *объемъ всякой усѣч. пир=суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту, общую съ данной, а основанія—одна нижнее основаніе данной пирамиды, другая верхнее, третья — среднее пропорціональное между ними.*

Назвавъ v объемъ усѣч. пир., h—высоту ея, B и b — площади ея основаній, x—площадь, среднюю пропорц. между ними, и замѣтивъ, что изъ пропорціи $B : x = x : b$ имѣемъ $x^2 = Bb$ или $x = \sqrt{Bb}$, получимъ $v = {}^1/_3\, Bh + {}^1/_3\, bh + {}^1/_3 \sqrt{Bb}.\, h =$
$$= {}^1/_3\, h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

435. Для примѣра опредѣлимъ объемъ правильной усѣченной шестиугольной пирамиды, которой боковое ребро$=b$, сторона нижняго основанія $= a$, а отношеніе площадей нижняго и верхняго основаній$=n$.

Площ. нижняго основанія$=6a.\, {}^1/_2 \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = {}^3/_2\, a^2 \sqrt{3}$; площ. верхняго основ.$= \frac{3\, a^2 \sqrt{3}}{2\, n}$; площадь, средняя пропорціональная между основаніями,$= \sqrt{\frac{3\, a^2 \sqrt{3}.\, 3\, a^2 \sqrt{3}}{2 \qquad 2n}} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \sqrt{n}}$; высота пирамидъ есть катетъ треугольника, котораго гипотенузой служитъ ребро b, а другимъ катетомъ разность радіусовъ круговъ, описанныхъ около нижняго и около верхняго основанія. Первый радіусъ $= a$; радіусъ же верхняго основанія опредѣлимъ на основаніи того, что площади правильныхъ подобныхъ мног—ковъ относятся какъ квадраты радіусовъ; такъ какъ отношеніе площ. верхняго основанія къ площ. нижняго по условію$= \frac{1}{n}$, то отношеніе ихъ радіусовъ$= \sqrt{\frac{1}{n}}$, и слѣд. рад. верх. осн.$= \frac{a}{\sqrt{n}}$. Такимъ образомъ высота пирамиды $= \sqrt{b^2 - \left(a - \frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2}$, а объемъ пирамиды $=$
$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).\ \sqrt{b^2 - a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

436. Выраженіе объема усѣч. пирамиды можно вывести также путемъ алгебраическимъ.

Пусть будетъ V объемъ пирамиды, которой высота$=H$, а площ. основанія$=B$; пересѣчемъ эту пирамиду плоскостью на разстояніи h отъ вершины; площ. сѣченія означимъ b; а объемъ пирамиды, которой основ. b, а высота h, назовемъ v; объемъ полученной усѣченной пир. назовемъ v_1, высоту ея означимъ h_1. Такъ какъ $V = {}^1/_3 BH$, $v = {}^1/_3 bh$, то $v_1 = V - v = {}^1/_3 BH - {}^1/_3 bh$. Но $H = h + h_1$, слѣд. $v_1 = {}^1/_3.\ [B(h + h_1) - bh] = {}^1/_3 [Bh_1 + h(B - b)]$.......(1).

По § 404 имѣемъ $\frac{b}{B} = \frac{h^2}{(h + h_1)^2}$, откуда

$bh^2 + 2bhh_1 + bh_1^2 - Bh^2 = 0$, или $h^2(B - b) - 2bh_1 h - bh_1^2 = 0$,

$$\text{откуда } h=\frac{bh_1\pm\sqrt{b^2h_1^2+(B-b)bh_1^2}}{(B-b)},$$

$$\text{или } h=\frac{bh_1\pm h_1\sqrt{Bb}}{B-b}=\frac{h_1(b\pm\sqrt{Bb})}{B-b}.$$

Въ этой формулѣ надо передъ $\sqrt{Bb}$ удержать только знакъ $+$, ибо взявъ $\sqrt{Bb}$ съ знакомъ—, получили бы для h величину отрицательную, такъ какъ $B>b$, слѣд. $\sqrt{Bb}>\sqrt{bb}>b$; между тѣмъ h не можетъ быть отрицательнымъ. Вставивъ величину h въ урав. (1), получимъ об. усѣч. пирам.

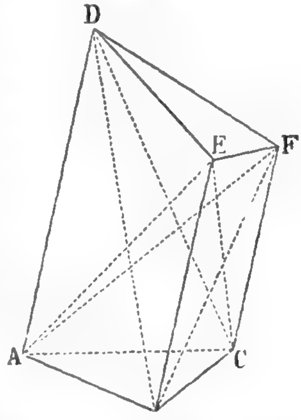
$$v_1={}^1/_3\left[Bh_1+\frac{h_1(b+\sqrt{Bb})(B-b)}{B-b}\right]$$

$$\text{или } v_1={}^1/_3\,h_1(B+b+\sqrt{Bb}).$$

437. Опредѣлимъ объемъ усѣченной треугольной призмы (т. е. такой призмы, которой основанія непараллельны между собою).

Проведя (чер. 495) плоскости черезъ A, E и C, а также черезъ A, E и F, разсѣчемъ призму на три пирамиды: $EABC$, $EACF$ и $EADF$. Первая пирамида имѣетъ основаніемъ основаніе ABC призмы, а вершину въ одной изъ вершинъ E другаго основанія призмы. Пирамиду $EACF$ можно замѣнить равновеликой ей пирамидой $BACF$ (у этихъ пирамидъ основаніе общее, именно треуг, ACF; вершины ихъ лежатъ на линіи $BE\,||$ плоскости основанія ACF, слѣд. и высоты пирамидъ равны); въ пир. $BACF$ можно принять за вершину точку F; тогда ея основаніемъ будетъ ABC, а вершина ея будетъ въ другой вершинѣ F верхняго основанія призмы.

Чер. 495.

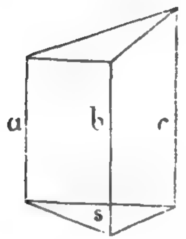


Третью пирамиду $EADF$ можно замѣнить такой, которая, какъ и первыя двѣ, будетъ имѣть основаніемъ также треуг. ABC, вершину же въ точкѣ D—третьей вершинѣ другаго основанія призмы. Дѣйствительно, пир. $EADF$ равновелика пир. $EADC$ (основанія ихъ ADF и ADC равновелики какъ треугольники, имѣющіе общее основаніе AD, а вершины на линіи $FC\,||\,AD$; высоты пирамидъ равны, ибо у нихъ общая вершина E, а основанія въ одной плоскости; затѣмъ пирамиду $EADC$ можно замѣнить равновеликой ей $BADC$ (у этихъ пирамидъ основаніе общее—ADC; а высоты равны, ибо вершины E и B лежатъ на прямой $BE\,||$ плоскости основанія); въ пирамидѣ же $BADC$ можно за вершину принять D—тогда основаніемъ будетъ треуг. ABC. Итакъ *объемъ усѣченной треуг. призмы=суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ основаніемъ одно изъ основаній призмы, а вершины—въ вершинахъ другаго основанія*

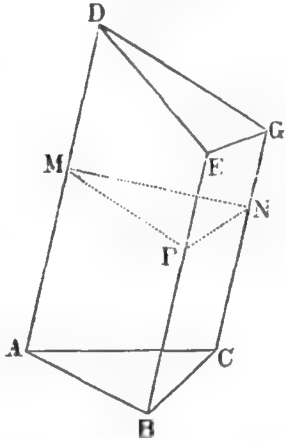
438. Если усѣч. призма (чер. 496) будетъ прямая, то ребра ея a, b, c будутъ высотами пирамидъ, и назвавъ v объемъ призмы, а s площ. ея основанія, перпендикулярнаго къ ребрамъ, получимъ $v = s.\frac{a+b+c}{3}$; т. е. *объемъ прямой усѣч. призмы=площ. ея основанія, перпендикулярнаго къ ребрамъ, умноженной на ариѳметическое среднее изъ ея боковыхъ реберъ.*

439. Возьмемъ наклонную усѣч. треуг. призму AG (чер. 497); пе-

Чер. 496.



Чер. 497.



ресѣчемъ ее плоскостью, перпендикулярною къ ребрамъ; тогда призма раздѣлится на 2 прямыхъ усѣч. призмы MG и MC. По предъидущ.

объемъ MG=площ. $MNP.\frac{MD+PE+NG}{3}$;

об. MC=пл. $MNP.\frac{MA+PB+NC}{3}$; слѣд.

об. AG=пл. $MNP.\frac{AD+BE+CG}{3}$.

Итакъ *объемъ наклон. усѣч. треуг. призмы=площ. сѣченія, перпендикулярнаго къ ребру, умноженной на ариѳметическое среднее боковыхъ ея реберъ.*

440. Для опредѣленія объема какого бы то ни было многогранника надо разбить его на пирамиды или вообще на такія тѣла, объемы которыхъ мы умѣемъ опредѣлять, и затѣмъ взять сумму всѣхъ этихъ объемовъ.

Чтобы разложить многогранникъ на пирамиды, можно взять точку внутри его и провести плоскости черезъ эту точку и черезъ каждое ребро; основаніями пирамидъ будутъ грани многогранника, а высотами—перпендикуляры, опущенные изъ взятой точки на грани многогранника.

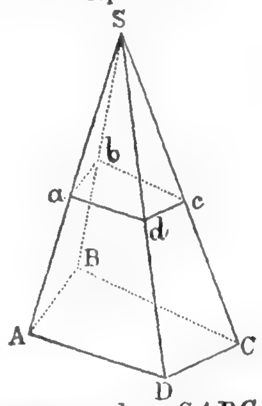
441. Подобіе многогранниковъ. Подобными многогранниками наз. такіе, у которыхъ многогранные углы соотвѣтственно равны и которые ограничены одинакимъ числомъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ. Вслѣдствіе равенства многогр. угловъ, и двугранные углы также будутъ равны между собою.

Всѣ одноименные правильные многогранники подобны между собою.

442. *Въ подобныхъ многогранникахъ сходственныя ребра пропорціональны.* Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сходственныя грани подобны между собою, то отношеніе ихъ площадей (§ 289)=квадрату отношенія реберъ; но каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ; поэтому отношеніе площадей каждыхъ двухъ сходственныхъ граней= отношенію площадей каждыхъ двухъ другихъ сходственныхъ граней, и стало быть квадраты отношеній сходственныхъ реберъ равны между собою, а потому ребра пропорціональны.

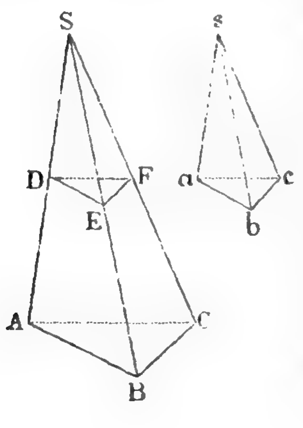
443. *Плоскость, параллельная основанію пирамиды, отсѣкаетъ пирамиду, подобную данной.* Пусть (чер. 498) плос. $abcd \parallel ABCD$. Такъ какъ (§ 404) $abcd \infty ABCD$ и $Sab \infty SAB$, $Sbc \infty SBC$...., то всѣ грани пирамиды $Sabcd$ подобны гранямъ пир. $SABCD$. Кромѣ того обѣ пирамиды имѣютъ общій многогр. уг. S; а трегр. уг. a=уг. A, ибо они имѣютъ по равному двугр. углу (уг. Sa=SA), заключенному между равными плоскими углами ($Sab = SAB$, $Sad = SAD$); по такой же причинѣ равны и остальные трегр. углы. Стало быть $Sabcd \infty SABCD$.

Чер. 498.



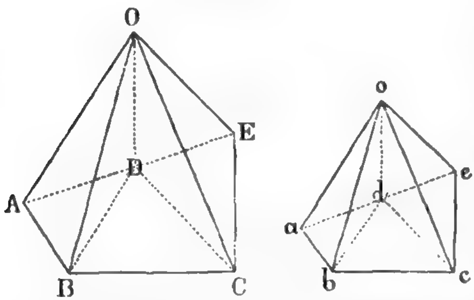
444. *Треугольныя пирамиды подобны, если имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными гранями.* Пусть (чер. 499) двугр. уг. SA =уг. sa, $SAB \infty sab$, $SAC \infty sac$. Вложимъ пирамиду $sabc$ въ $SABC$, такъ чтобы s упала въ S и чтобы грань sab пошла по SAB; тогда по равенству двугр. уг. SA и sa и грань sac пойдетъ по SAC. Вслѣдствіе подобія треуг. SAB и sab точка a упадетъ въ какую нибудь точку D ребра SA, а точка b упадетъ въ такую точку E ребра SB, что прямая DE будетъ $\parallel AB$. Подобнымъ образомъ и треуг. sac займетъ въ треуг. SAC такое положеніе SDF, что DF будетъ $\parallel AC$. Наконецъ основаніе abc приметъ положеніе DEF, и плоскость его будетъ $\parallel$ плос. ABC, вслѣдствіе чего пирамида $SDEF$ будетъ $\infty SABC$, а слѣд. и $sabc \infty SABC$.

Чер. 499.



445. *Два многогранника, составленные изъ одинакаго числа соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ четырегранниковъ* (т. е. треугольныхъ пирамидъ), *подобны между собою.* Пусть (чер. 500) $OABD \infty oabd, OBCD \infty obcd$... Соотвѣтственныя грани многогранниковъ $OABCDE$ и $oabcde$ будутъ подобны или какъ сходственныя грани подобныхъ четырегранниковъ или какъ составленныя изъ одинакаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ. Напр. грань $ABCD \infty abcd$, ибо треуг. $ABD \infty abd$ какъ сходственныя грани подобныхъ четырегранниковъ $OABD$ и $oabd$, а треуг. $BDC \infty bdc$ какъ сходственныя грани подобныхъ четырегранниковъ $OBDC$ и $obdc$; и кромѣ того, если треуг. ABD и BDC находятся въ одной плоскости, то двугр. углы $OBDA$ и $OBDC$ четырегранниковъ $OABD$ и $OBCD$ составляютъ два прямыхъ; а потому и двугр. углы $obda$ и $obdc$ подобныхъ имъ четырегранниковъ $oabd$ и $obcd$ также должны составлять два прямыхъ, и слѣд. треуг. abd и bdc должны также быть въ одной плоскости.

Чер. 500.



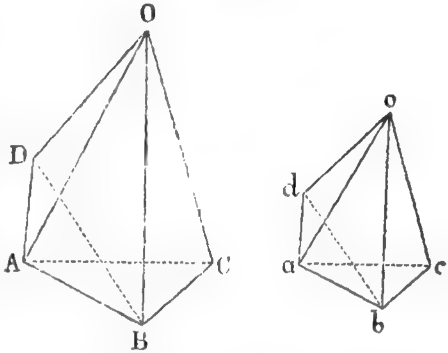
Многогранные углы обоихъ многогранниковъ будутъ соотвѣтственно равны, ибо всѣ ихъ плоскіе и двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены. Дѣйствительно, такъ какъ грани многогранниковъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены, то слѣд. всѣ плоскіе углы обоихъ многогранниковъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены.

Двугранные же углы будутъ равны или какъ сходственные двугр. углы подобныхъ четырегранниковъ или какъ суммы такихъ угловъ. Напр. двугр. уг. $BCDE$, образованный гранями BCD и CDE, есть сумма двугр. угл. $BCDO$ и $ECDO$, принадлежащихъ четырегранникамъ $OBCD$ и $OCDE$; а двугр. уг. $bcde$, образованный гранями bcd и cde, есть сумма сходственныхъ двугр. уг. $bcdo$ и $ecdo$, принадлежащихъ четырегранникамъ $obcd$ и $ocde$; а эти четырегранники соотвѣтственно подобны $OBCD$ и $OCDE$.

446. Обратно: *подобные многогранники могутъ быть раздѣлены на одинакое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ четырегранниковъ.* Возьмемъ внутри перваго многогранника точку O (на чер. 501 представлены только части обоихъ многогранниковъ) и разложимъ его на четырегранники, принявъ O за общую вершину этихъ треугольныхъ пирамидъ; пусть $OABC$ будетъ одна изъ такихъ пирамидъ. Точкамъ A, B, C... перваго многогр. соотвѣтствуютъ точки a, b, c втораго; проведемъ плоскость oab такъ, чтобы она съ гранью abc по верхнюю сторону этой грани составила двугр. уг. $oabc = OABC$, и въ этой плоскости oab построимъ на ab треуг. $oab \infty OAB$.

Потомъ, принявъ точку o за общую вершину, разложимъ второй многогранникъ на четырегранники, соотвѣтствующіе четырегранникамъ перваго многогранника, и докажемъ, что они соотвѣтственно подобны четырегранникамъ перваго.

Чер. 501.



Четыр. $OABC \infty oabc$, ибо двугр. уг. $OABC = oabc$, грань $OAB \infty oab$ и $ABC \infty abc$ (грани эти подобны или какъ сходственныя грани подобныхъ многогранниковъ или какъ сходственныя части этихъ граней).

Пусть D будетъ четвертая вершина перваго многогранника, притомъ такая, что треугольники ABC и ABD имѣютъ общую сторону AB и расположены или въ одной плоскости или въ двухъ смежныхъ плоскостяхъ. Разсмотримъ четырегранники $OABD$ и $oabd$. Грань $OAB \infty oab$ какъ сходственныя грани подобныхъ четырегранниковъ $OABC$ и $oabc$; грань $ABD \infty abd$ какъ сходственные треугольники подобныхъ граней данныхъ многогранниковъ. Кромѣ того, если треуг. ABC и ABD расположены въ одной плоскости, то двугр. уг. $OABD =$ уг. $oabd$, какъ дополненія до двухъ прямыхъ къ равнымъ угламъ $OABC$ и $oabc$. Если же треуг. ABC и ABD лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ, то двугр. уг. $OABD =$ уг. $oabd$ какъ разности равныхъ двугр. угловъ; именно $OABD = DABC - OABC$, а $oabd = dabc - oabc$. Въ обоихъ случаяхъ четырегранникъ $OABD \infty oabd$.

Подобнымъ образомъ докажемъ послѣдовательно подобіе и слѣдующихъ четырегранниковъ.

447. *Поверхности подобныхъ многогранниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ реберъ.* Дѣйствительно, такъ какъ грани подобныхъ многогранниковъ соотвѣтственно подобны, то отношеніе каждыхъ двухъ сходственныхъ граней = отношенію квадратовъ сходственныхъ реберъ; но сходственныя ребра пропорціональны; поэтому, означивъ M, M_1, M_2... грани одного многогр., L — какое нибудь ребро его; m, m_1, m_2.... и l сходственныя имъ грани и ребро другаго, получимъ

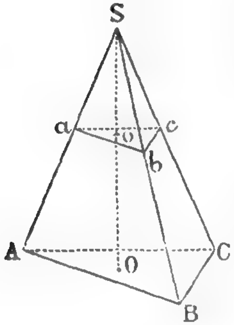
$$\frac{M}{m} = \frac{L^2}{l^2},\ \frac{M_1}{m_1} = \frac{L^2}{l^2},\ \frac{M_2}{m_2} = \frac{L^2}{l^2}\ \ldots., \text{ откуда}$$

$$\frac{M + M_1 + M_2 + \ldots.}{m + m_1 + m_2 + \ldots.} = \frac{L^2}{l^2}.$$

448. *Объемы подобныхъ многогранниковъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ реберъ.* 1. Возьмемъ сперва два подобныхъ четырегранника и расположимъ ихъ какъ указано на чертежѣ 502,

т. е. одинъ вложимъ въ другой. Объемъ $SABC = {}^1/_3 ABC \,.\, SO$; об. $Sabc = {}^1/_3 abc \,.\, So$, слѣд. $\frac{\text{об.}SABC}{\text{об.}Sabc} = \frac{ABC \,.\, SO}{abc \,.\, So}$. Но плоскость abc $\parallel ABC$, слѣд. (§ 404) $\frac{ABC}{abc} = \frac{SO^2}{So^2}$ и

Чер. 502.



$$\frac{SO}{So} = \frac{SA}{Sa} = \frac{AB}{ab};$$ поэтому

$$\frac{\text{об.}SABC}{\text{об.}Sabc} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{AB^3}{ab^3}.$$

2. Возьмемъ теперь два подобныхъ многогранника P и p, и пусть L и l будутъ ихъ сходственныя ребра. Разложимъ ихъ на подобные и одинаково расположенные четырегранники—первый на M, M_1, M_2...., второй на m, m_1, m_2....; тогда

$$\frac{M}{m} = \frac{L^3}{l^3}; \quad \frac{M_1}{m_1} = \frac{L^3}{l^3}; \quad \frac{M_2}{m_2} = \frac{L^3}{l^3} \ldots,$$

отвуда $\frac{M + M_1 + M_2 + \ldots}{m + m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{L^3}{l^3}$, или $\frac{P}{p} = \frac{L^3}{l^3}$.

449. Задачи. 1. Опредѣлить діагональ прямоугольнаго параллелипипеда, котораго измѣренія 96, 28 и 75?

2. Ребра прямоуг. параллелипипеда суть $a=5$; $b=9$; $c=12$; опредѣлить площади сѣченій, образуемыхъ діагональными плоскостями?

3. Опредѣлить измѣренія прямоуг. пар—да, если периметръ его основанія$=2p$, площ. основ.$=s$, діагональ$=d$?

4. Въ прав. треуг. призмѣ, площ. основ. которой $= s = \sqrt{50}$, сдѣлано сѣченіе, проходящее черезъ одно изъ реберъ основанія подъ угл. 45° къ основанію; опредѣлить площ. этого сѣченія?

5. Прямоуг. пар—дъ, котораго основаніе есть квадратъ периметра u, пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ одно изъ реберъ нижняго основанія и пересѣкающей линію, соединяющую центры основаній, въ разстояніи p отъ нижняго основанія. Опредѣлить площадь сѣченія, если 1) $u=12$, $p=2$; 2) $u=2$, $p=0{,}6$?

6. Черезъ конечныя точки реберъ куба, выходящихъ изъ одной вершины, проведена плоскость; то же сдѣлано съ ребрами, выходящими изъ прямопротивоположной вершины. Какую фигуру будетъ имѣть третье сѣченіе куба, параллельное двумъ первымъ и находящееся отъ нихъ въ одинакихъ разстояніяхъ, и какъ будетъ относиться его площадь къ площади перваго сѣченія?

7. По высотѣ $h = 5{,}7$ и ребру a основанія прав. треуг. пирамиды, равному 17,1 вычислить боковое ребро?

8. По высотѣ $h=0{,}17$ и боковому ребру прав. треуг. пирамиды $b=0{,}33$ вычислить ребро основанія?

9. По боковому ребру b и ребру a основанія прав. треуг. пирамиды вычислить высоту, если $b=3{,}17$; $a=0{,}75$?

10. Прав. шестиуг. пирамида, ребро основанія которой$=a$, пере-

сѣчена плоскостью || основанію и дѣлящей высоту пополамъ. Опредѣлить площ. сѣченія?

11. Въ какомъ разстояніи отъ меньшаго основанія надо разсѣчь усѣченную пирамиду плоскостью || основаніямъ, чтобы площ. сѣченія была средней ариѳметической площ. основаній, если площ. большаго основ. $=B=10{,}24$; площ. меньшаго осн. $=b=5{,}76$; высота $h=13{,}566$?

12. Рѣшить предъид. зад., полагая, что площ. сѣченія есть сред. геометр. между площадями основаній, и что $B=32{,}08$; $b=2{,}005$; $h=2^4/_7$.

13. Въ прав. четыреуг. пирамидѣ, которой ребро основанія есть $a=4^1/_3$, а высота $h=5^3/_5$, вписанъ кубъ такъ, что четыре его вершины лежатъ внутри основанія пирамиды, а другія четыре соотвѣтственно на четырехъ боковыхъ ребрахъ. Вычислить ребро куба?

14. Вычислить ребро куба (см. зад. 13), если его верхнія вершины лежатъ на апоѳемахъ пирамиды?

15. На равностороннемъ треугольникѣ построены прав. призма и прав. пирамида одинакой высоты, и отношеніе площадей боковой грани призмы и пирамиды$=n$. Опредѣлить отношеніе высоты къ ребру основанія, если $n=1$?

16. Опредѣлить въ предъид. задачѣ величину n, если боковое ребро пирамиды$=$ребру основанія?

17. Стороны основаній прав. усѣч. четыреуг. пирамиды суть $a=2{,}5$ и $b=7{,}5$; опредѣлить высоту ея, если сумма площадей основаній$=$суммѣ площадей боковыхъ граней?

18. Площади основаній усѣч. пирамиды суть $B=32{,}4$ и $b=14{,}4$; высота ея двумя, параллельными основаніямъ, плоскостями разсѣчена на 3 равныя части. Опредѣлить площади сѣченій?

Примѣч. Въ задачахъ 19—26 включительно означено черезъ a ребро основанія *прав. треуг. призмы*, h — высота ея, B — площ. основ., S_1—боковая поверхность, S—полная поверхность.

19. Дано $a=27$; $h=32$; найти B, S_1, S?
20. Дано $a=84$ и $S_1=13608_1$: найти h, B и S?
21. Дано $a=8$ и $S=800$; найти h, B и S_1?
22. Дано $h=15$ и $B=66$; найти a, S_1 и S?
23. Дано $h=7$ и $S_1=168$; найти a, S и B?
24. Дано $h=9$ и $S=270$; найти a, B и S_1?
25. Дано $B=42$ и $S_1=378$; найти a, h и S?
26. Дано $S_1=2880$ и $S=3480$; найти a, h и B?

27. Въ прямой призмѣ, основаніе которой есть равнобедр. треуг., даны: сторона основанія $c=6{,}5$; площадь основанія $B=20{,}28$ и полная поверхность $S=269{,}36$; опредѣлить высоту призмы h, основаніе b равнобедр. тр—ка и боковую поверх. S_1?

28. Стороны основанія прямой треуг. призмы суть $a=13$; $b=19$; $c=24$; боков. поверх. призмы$=S_1=1950$; опредѣлить высоту h призмы, площ. B основанія и полную поверх. S?

29. Двѣ стороны основанія прямой треуг. призмы суть $a=11$; $b=14$; площ. B основанія$=77$; полная поверх. $S=954$; опредѣлить

третью сторону c основанія, высоту h призмы и боковую поверх. S_1 ея?

30. Высота прямоуг. параллелипипеда$=h=16$; бок. поверх. его $=S_1=768$; основаніемъ его служитъ квадратъ; опредѣлить площ. B основанія, полную поверх. S и ребро a основанія?

31. Сторона основ. прямоуг. пар—да $=a=8$; высота пар—да $=h=9$; полная поверх.$=S=314$; опредѣлить другую сторону b основанія, площ. B его и боков. поверхн. S_1?

32. Высота прямоуг. пар—да$=h=20,4$; площ. основ.$=B=600$; бок. поверх.$=S_1=2040$; опредѣлить стороны a и b основанія и полную поверх. S?

33. Прямой пар—дъ имѣетъ основаніемъ ромбъ, котораго сторона $a=13$, а меньшая діагональ $d=10$; бок. поверх. пар—да$=S_1=728$; опредѣлить высоту h пар—да, площ. основ. B, площ. сѣченія D, образуемаго діагональной плоскостью, проходящей черезъ d, и полную поверх. S?

34. По даннымъ (см. предъид. задачу) $a=20$, $B=348$, $D=648$ опредѣлить d, h, S_1 и S?

35. Стороны основ. прямаго пар—да суть $a=24$ и $b=10$; меньшая діагональ основанія $d=26$; бок. поверх. пар—да $S_1=1224$; опредѣлить высоту пар—да h, площ. основ. B, площ. сѣченія D, образуемаго діагональной плоскостью, проходящей черезъ d?

36. По даннымъ (см. предъид. задачу) $a=10,8$; $b=4,5$; $h=8$; $B=48,6$ опредѣлить d, D, S_1 и S?

37. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедр. трапеція, которой параллельныя стороны $a=34$ и $b=16$, а непараллельная сторона $c=15$; высота призмы $h=36$. Опредѣлить разстояніе k между параллельными сторонами основанія, площ. B основ., бок. поверх. S_1 и полную поверх. S?

38. По даннымъ (см. предъид. задачу) $a=13,2$; $b=9$; $k=2,8$; $S=266,56$ опредѣлить c, h, B и S_1?

39. Прав. призма имѣетъ въ основаніи шестиугольникъ, котораго сторона $a=0,56$; высота призмы $h=3,21$; опредѣлить бок. поверх. S_1 и полную поверх. S призмы?

40. Опредѣлить полную поверх. прямоуг. пар—да съ квадратнымъ основаніемъ, если периметръ сѣченія діагональной плоскости$=u=21$, а діагональ этого сѣченія$=d=7^1/_2$?

41. Опредѣлить полную поверх. прямоуг. пар—да, ребра котораго относятся какъ $a:b:c=3:4:5$, если діагональ его основанія $d=15$, а ребра основанія относятся какъ $a:b$?

42. Прямоуг. пар—дъ имѣетъ въ основаніи квадратъ, котораго сторона $a=5$; высота h пар—да $=12$; пар—дъ пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ одно изъ реберъ верхняго основанія и образующей съ этимъ основаніемъ уголъ 45^0. Опредѣлить полную поверхность усѣченной призмы, полученной отъ этого?

43. Полная поверх. прав. десятиуг. призмы, которой всѣ ребра равны между собою, есть S; опредѣлить длину a ребра призмы?

44. Въ прав. четыреуг. призму, которой высота h, а ребро основ.

a, вписана другая призма такъ, что ея вершины дѣлятъ пополамъ ребра основаній первой призмы. Опредѣлить поверх. второй призмы?

Примѣч Въ задачахъ 45—59 включительно означено черезъ k боковое ребро *прав. пирамиды*, h—высота ея, b—апоѳема, B—площ. основ., C — площ. боковой грани, S_1 — бок. поверхн., S — полная поверх.; притомъ задачи 45—54 включительно относятся къ *четыреугольной* пирамидѣ.

45. По даннымъ $a=58$ и $k=64$ найти h, b, B, S_1 и S?

46. По даннымъ $a=14$ и $h=12$ найти k, b, B, S_1 и S?

47. По даннымъ $a=16$ и $C=96$ найти k, h, b, B. S_1 и S?

48. По даннымъ $a=18$ и $S=900$ найти k, h, b, B, S_1?

49. По даннымъ $k=9$ и $h=6$ найти a, b, B. S_1 и S?

50. По даннымъ $k=20$ и $B=576$ найти a, h, b, S_1 и S?

51. По даннымъ $k=30$ и $S=3024$ найти a, h, b, B и S_1?

52. По даннымъ $h=15$ и $B=196$ найти a, k, b, S_1 и S?

53. По даннымъ $b=35$ и $S=4704$ найти a, k, h, B, S_1?

54. По даннымъ $B=324$ и $C=180$ найти a, k, h, b, S_1 и S?

55. Въ пятиуг. пирамидѣ дано $a=12$; $b=17{,}5$; найти k, h, B, S_1 и S?

56. Въ пятиуг. пирам. дано $k=39$; $b=36$; найти S_1, S и h?

57. Въ шестиуг. пирамидѣ дано $a=24$; $h=32$; найти k, b, S_1 и S?

58. Въ шестиуг. пирам. дано $k=17$; $C=120$; найти a, h, b, S_1 и S?

59. Въ шестиуг. пирамидѣ даны h и b; найти S?

60. Въ прав. усѣч. треуг. пирамидѣ даны: сторона нижняго основанія $= a = 18$, сторона верхняго основ.$=a=12$, апоѳема$=l=14$; высота $= h = 10$. Опредѣлить боковое ребро k, бок. поверхн. S_1 и всю поверх. S?

61. Прав. четыреуг. пирамида разсѣчена плоскостью || основанію; опредѣлить полную поверх. усѣч. пирамиды, если площ. сѣченія$=$ 5625, высота полной пир.$=100$, высота усѣченной$=66^2/_3$?

62. Трегранный уголъ, всѣ плоскіе углы котораго прямые, пересѣченъ плоскостью такъ, что въ сѣченіи получился правильный треуг., котораго сторона $=a$; вычислить бок. поверх. пирамиды?

63. Грани трегранняго угла, всѣ плоскіе углы котораго прямые, пересѣчены двумя параллельными плокостями такъ, что каждое сѣченіе есть прав. треуг. Опредѣлить бок. поверх. усѣченной пирамиды, если сторона нижняго треуг.$=b$; а сторона верхняго $= a$?

Примѣч. Въ задачахъ 64—68 включительно означена черезъ S_1 боковая поверх. прямоуг. пар—да, имѣющаго основаніемъ квадратъ; S—полная повер. пар—да, V—объемъ его, a—сторона основанія, B—площ. его, h—высота пар—да.

64. По даннымъ $a=6, 4$; $S_1=512$ найти V?

65. По даннымъ $a=9$ и $V=1053$ найти S_1 и S?

66. По даннымъ $h=16$, $S_1=768$ найти V?

67. По даннымъ $h=17$ и $V=2873$ найти S_1 и S?

68. По даннымъ $B=112{,}36$ и $V=1460{,}68$ найти S_1?

Примѣч. Въ задачахъ 69—75 включительно означены черезъ a и b стороны основанія прямоуг. пар—да, h—высота его, S_1—бок. поверх., S—полная поверх., V—объемъ, B—площ. основ.

69. $a=5$; $b=8$; $S_1=156$. Найти V?

70. $a=14$; $b=12$; $V=3192$. Найти S_1?

71. $a=13,4$; $h=10,5$; $V=1772,82$ Найти S?

72. $a=14,5$; $B=369,75$; $S_1=1464$. Найти V?

73. $a=19$; $S=2238$; $V=7182$. Найти S_1?

74. $h=25$; $S_1=3000$; $V=22275$. Найти a и b?

75. $S_1=728$; $S=1112$; $V=2496$. Найти a, b, h?

Примѣч. Въ задачахъ 76—81 включительно означены черезъ S_1 и S—боковая и полная поверхн., V— объемъ, h—высота *прямаго параллелипипеда, основаніе котораго есть ромбъ*; a—сторона основанія, d—меньшая діагональ основанія, D—площ. сѣченія, образуемаго діагональной плоскостью, проходящей черезъ d.

76. $a=10$, $d=12$, $h=15$; найти V?

77. $a=15$, $d=18$, $D=216$; найти V и S?

78. $a=5$, $d=6$, $V=216$; найти S?

79. $a=12,5$; $h=10$; $D=88$. Найти V и S?

80. $a=11,6$; $D=288$; $V=2419,2$. Найти d, S?

81. $d=10$, $h=9$, $S_1=468$; найти V, S?

82. Въ прямомъ пар—дѣ стороны основ. a и b равны 21 и 28; меньшая діаг. основ. $d=35$; площ. сѣченія, образованнаго діагональной плоскостью, проходящей черезъ d, равная $D=700$. Опредѣлить об. V и пол. пов. S?

83. $a=45$, $b=28$, $d=53$, $V=32760$ (см. зад. 82); найти S?

84. $a=17,6$; $b=5,7$; $S=759,84$; высота $h=12$ (см. зад. 82); найти V и D?

85. Въ прав. треуг. призмѣ сторона основ.$=a=10$; объемъ $V=$ $=720$; опредѣлить полн. поверх. S?

86. Об. V прав. треуг. призмы$=1152$; бок. поверх. $S_1=576$; найти стор. основ. a, площ. его B и высоту призмы h?

87. Въ прямой призмѣ, которой основаніе есть равнобедр. треуголь., основаніе b этого треуг.$=48$; сторона c треуг.$=26$; об. приз. $V=$ 4080; найти пов. S призмы?

88. Основ. прям. призмы есть равнобедр. треуг., котораго основ. $=b=12$; высота призмы$=h=18$; об. ея$=V=864$; опредѣлить поверхн. S?

89. Основ. прям. призмы есть равнобедр. треуг., котораго площ. $B=192$, а основ. $b=32$; полн. поверхн. $S=3552$ найти; об. V?

90. Прямая призма имѣетъ основ. треуг., котораго стороны $a=$ $=18$, $b=14$, $c=28$; об. ея $V=2560$; опредѣлить пов. S?

91. Площ. основ. B прямой треуг. призмы$=77$; стороны a и b основанія равны 11 и 14; полн. поверхн. $S=954$; найти об. V?

92. Высота прям. треуг. призмы$=h=15$; бок. поверх. $S_1=570$; об. $V=720$; сторона a основанія$=11$. Опредѣлить стороны b и c основанія и площ. B его?

93, Основ. прям. призмы есть равнобедр. трапеція, которой нараллельныя стороны a и b равны 48 и 18, а непарал. сторона $c=$ $=25$: боков. поверхн. призмы$=S_1=2784$; определить об. V?

94. $a=46, b=22, c=37, V=23800$ (см. зад. 93); найти поверх. S?

95. $a=51$, $b=19$, $h=13$, $S_1=1794$ (см. зад. 93): определить V?

96. $a=13,2$; $b=9$; $S=266,56$ (см. зад. 93); разстояніе k между a и b равно 2,8; определить V?

Примѣч. Въ задачахъ 97—111 включительно означены: a—сторона основ. *прав. пирамиды*, k—боков. ребро ея, b—апоѳема, h—высота, S_1 и S—бок. и полная поверх., V—объемъ, B—площ. основ.

Въ прав. треуг. пирамидѣ дано:

97. $a=18$, $k=15$; найти S и V?

98. $a=12$, $h=18$; найти S и V?

99. $a=36$, $b=24$; найти S и V?

100. $a=9$, $S=480$; найти V?

101. $k=18$, $h=15$; найти S и V?

102. $h=5$, $S=360$; найти V?

103. $B=72$, $V=432$; найти S_1 и k?

Въ прав. четыреуг. пирамидѣ дано:

104. $a=84$, $V=188160$; найти S_1 и k?

105. $k=15$, $b=12$; найти S и V?

106. $h=16$, $S=1536$; найти V и k?

107. Въ прав. пятиугол. пирамидѣ дано a и h; найти S и V?

Въ прав. шестиуг. пирамидѣ дано:

108. $a=18$, $k=30$; найти S и V?

109. $a=20$, $b=24$; найти S_1 и V?

110. $a=10$, $V=900$; найти S?

111. $h=18$, $V=3072$; найти S и k?

112. Сторона нижняго основ. прав. усѣч. треуг. пирамиды$=a=$ $=24$; стор. верх. основ.$=a=12$, апоѳема $l=20$, высота $h=15$; определить об. пир. V?

113. Сторона a нижняго основ. прав. усѣч. четыреуг. пирам.$=$ $=17$; сторона a верх. основ.$=13$; апоѳема $l=20$; высота $h=18$; определить полную поверхн. S и об. V?

114. Опредѣлить полную поверхн. S и об. V куба, котораго діагональ d основанія$=22$?

115. Опредѣлить поверх. S и об. V куба, если площ. діагональнаго сѣченія$=D=480$?

116. Опредѣлить об. V куба, котораго поверх. $S=2166$?

117. Опредѣлить поверх. S куба, котораго об. $V=4096$?

118. Въ прав. тетраэдрѣ ребро $a=24$; опредѣлить поверх. S и об. V?

119. Опредѣлить поверх. S и объемъ V прав. тетраэдра, если радіусъ круга, описаннаго около грани,$=r$?

120. Опредѣлить поверх. S и об. V прав. тетраэдра, котораго высота $=h$?

121. Опредѣлить поверх. прав. тетраэдра, котораго об.$=V$?

122. Опредѣлить объемъ V прямой усѣч. треуг. призмы, которой боковыя ребра суть $h=28$, $k=32$, $l=36$; а стороны основанія $a=$ $=6$, $b=8$, $c=10$?

123. Опредѣлить ребро куба, равновеликаго суммѣ трехъ кубовъ, которыхъ ребра $a=0{,}3$; $b=0{,}4$; $c=0{,}5$?

124. Отношеніе объемовъ двухъ кубовъ $=a^3:b^3$; а сумма ихъ $=$ объему куба, котораго поверх. $=S$. Опредѣлить ихъ ребра?

125. Ребра x, y, z прямоуг. пар—да относятся какъ $2:3:4$; если ихъ увеличить соотвѣтственно на 4, 3 и 2, то объемъ пар—да увеличится на 2544. Опредѣлить x, y, z?

126. Три призмы имѣютъ общую высоту; а основанія ихъ суть прав. 6—къ, 4—къ и 10—къ, вписанные въ одинъ кругъ. Опредѣлить отношеніе объемовъ призмъ?

127. Прямая треуг. призма съ равными ребрами вписана въ прав. тетраэдръ, котораго ребро a, такъ, что одно ея основаніе лежитъ въ грани тетраэдра, а другое представляетъ сѣченіе этого тетраэдра. Опредѣлить объемъ призмы?

128. Основаніе пирамиды есть прямоуг. треуг., котораго катеты a и b; боковое ребро, идущее черезъ вершину прямаго угла, перпендикулярно къ основанію; боковое ребро, идущее черезъ другую конечную точку катета a, равно c. Опредѣлить об. V пирамиды?

129. Въ кубѣ, котораго ребро $=a$, проведены плоскости черезъ средины каждыхъ трехъ реберъ, выходящихъ изъ общей вершины. Опредѣлить объемъ полученнаго тѣла?

130. Пирамида, которой площ. основ. $=B=1{,}089$, пересѣчена плоскостью $\|$ основанію въ разстояніи $p=0{,}5$ отъ вершины; площ. сѣченія $b=0{,}9$. Опредѣлить об. V усѣченной пирамиды?

131. Об. V усѣч. пирам. $=375$; площ. B одного основ. $=192$; высота $h=5$; опредѣлить площ. b другаго основ.?

132. Усѣч. пирамида имѣетъ основаніями прямоугольники, и пересѣченія діагоналей основаній находятся на линіи $\perp$ къ основаніямъ; об. пир. $V=630$; высота $h=15$; периметры основ. нижняго и верхняго $=40$ и 10. Опредѣлить ребра?

133. Об. усѣч. пир. $V=2{,}52$; площадь большаго основ. $=B=1{,}8$; высота $h=2{,}4$. Опредѣлить объемъ V_1 пирамиды, дополняющей данную до полной?

134. Опредѣлить объемъ полной пирамиды, если об. усѣч. пир. $=V$, а площ. ея основаній суть B и b?

135. Пирамида пересѣчена плоскостью $\|$ основанію, и отношеніе площ. сѣченія къ площ. основ. $=m^2:n^2$. Опредѣлить отношеніе объемовъ частей, на которыя раздѣлена пирамида?

136. Въ какомъ отношеніи надо раздѣлить высоту пирамиды плоскостью $\|$ основанію, чтобы объемъ полученной усѣч. пирамиды $=$ n—й части об. полной пирамиды?

137. Пирамида имѣетъ въ основаніи прямоугольникъ, котораго стороны a и b; боковое ребро ея $=l$; высота пересѣкаетъ основаніе въ точкѣ пересѣченія его діагоналей. Въ какомъ разстояніи отъ вершины надо провести плоскость $\|$ основанію, чтобы раздѣлить пирамиду на двѣ равновеликія части?

138. Пирамида, которой высота $h=7$, раздѣлена двумя плоскостями, параллельными основанію, на равновеликія части. Опредѣлить высоты ихъ?

139. Прав. усѣч. пирамида имѣетъ основ. 6—ки, которыхъ стороны $a=4$ и $b=5$; она разсѣчена || основанію плоскостью, дѣлящей высоту пополамъ. Опредѣлить отношеніе объемовъ ея частей?

140. Прав. тетраэдръ раздѣленъ двумя плоскостями, параллельными одной изъ его граней, на 3 равновеликія части. Опредѣлить отношеніе ихъ поверхностей?

141. Прав. тетраэдръ, котораго ребро$=a$, раздѣленъ на двѣ части плоскостью, проведенной черезъ его вершину перпендикулярно къ одной изъ граней и притомъ такъ, что линія сѣченія плоскости съ этой гранью параллельна одной изъ сторонъ грани. Опредѣлить объемы обѣихъ частей?

142. Кусокъ льда, имѣющій форму прямоуг. пар—да, плаваетъ въ морѣ. Вертикальное ребро пар—да$=10,5$ метр.: другія два измѣренія 15,75 и 20,45 метр.; плотность льда$=0,93$; плотность морской воды$=1,026$. Насколько кусокъ льда погруженъ въ воду?

143. На водѣ плаваетъ брусъ, имѣющій форму прямоуг. пар—да; удѣл. вѣсъ бруса$=d$; горизонтальныя его измѣренія суть a и b; длина части вертикальнаго ребра, погруженной въ воду,$=c$; вѣсъ куб. единицы воды$=q$. Опредѣлить длину вертикальнаго ребра?

144. Воздухъ содержитъ 21% кислорода; сколько куб. метр. кислорода содержится въ прямоугольной комнатѣ, которой длина 9, ширина $6^2/_3$, высота 4,5 метр.?

145. Что будетъ стоить пирамида, отлитая изъ золота, если высота пирамиды$=4$ центиметр., а основаніе ея есть треуг., котораго высота 1,5 центим., а основаніе 0,4 центим.; удѣл. вѣсъ золота$=19,325$; килограммъ золота (съ работой) стоитъ 900 руб.?

146. Пирамида изъ чугуна (удѣл. вѣсъ 7,5) вѣситъ 1012,5 килогр.; основаніе ея есть квадратъ, котораго сторона$=45$ центиметр. Опредѣлить высоту пирамиды?

147. Пирамида, въ которой одна изъ сторонъ основанія$=a$, раздѣлена на n равновеликихъ частей плоскостями || основанію. Опредѣлить стороны сѣченій, сходственныя a?

148. Высота прав. пирамиды$=8$ фут: пирамида двумя плоскостями, || основанію, разсѣчена на части, относящіяся какъ $8:19:37$. Опредѣлить разстоянія этихъ плоскостей отъ вершины пирамиды?

149. Разность сторонъ квадратовъ, служащихъ основаніями прав. усѣч. пирамиды,$=6$ ф.; высота пир.$=4$ фут.; поверхность ея$=168$ кв. фут.; опредѣлить объемъ ея?

150. По высотѣ h усѣченной пирамиды и площадямъ B и b ея основаній опредѣлить объемъ полной пирамиды и объемъ дополнительной части ея?

151. Въ сосудъ, имѣющій видъ прямоуг. пар—да, котораго длина$=3$ вершк., ширина$=7$ дюй., вышина$=^3/_8$ арш., положено тѣло и потомъ влито столько воды, что тѣло все погрузилось въ нее: высота воды$=4$ вершк.; когда вынули тѣло, то высота воды стала$=3$ вершк.; опредѣлить въ куб. вершк. объемъ тѣла?

152. Вырытъ прямой горизонтальный ровъ длиной 24 саж., глубиной 1 саж.; верхняя ширина рва$=1,35$ саж., а нижняя$=0,65$ саж. Что стоитъ работа, если за 1 куб. саж. платили $1^1/_2$ руб.?

153. Основаніе пар—да есть прямоугольникъ, периметръ котораго$=14$ фут., а разность сторонъ$=3$ фут.; высота пар—да$=0,8$ фут.; опредѣлить поверхность куба, равновеликаго этому пар—ду?

154. Вѣсъ желѣзнаго прямоуг. пар—да$=2$ пуд. $29^{19}/_{23}$ фун.; основаніемъ его служитъ квадратъ$=49$ кв. дюй.; вѣсъ 1 куб. дюй. воды$=^{1}/_{23}$ фун., удѣл. вѣсъ желѣза$=8$. Опредѣлить измѣренія пар—да?

155. Опредѣлить ребро куба, равновеликаго прямоуг. пар—ду, котораго измѣренія 6, 4, 9 дюйм.?

156. Пирамида изъ мѣди стоитъ 241 руб. 92 коп.; ея основаніе есть прямоуг. треуг., котораго катетъ$=1$ футу, а уголъ$=45°$; мѣдь въ 9 разъ тяжеле воды; вѣсъ 1 куб. фута воды$=69$, 12 фун.; фунтъ мѣди (съ работой) стоитъ 50 коп. Опредѣлить высоту пирамиды?

157. Поверхность прямоуг. пар—да$=90$ кв. вершк. и на 18 кв. вершк. больше боковой его поверх.; въ основаніи пар—да находится квадратъ. Опредѣлить измѣренія пар—да?

158. Въ больницѣ на каждаго больнаго полагается 1,666... куб. саж. воздуха; сколько больныхъ можно помѣстить въ прямоугольной комнатѣ, которой длина 12, ширина 6, вышина 5 арш.?

159. Черезъ средину высоты пирамиды проведена плоскость || основанію; восколько разъ отрѣзанная пирамида меньше цѣлой пирамиды?

160. Сарай покрытъ двускатной крышею, ограниченной съ боковъ равными и параллельными треугольниками; на чердакѣ сарая устроенъ сѣноваль. Сколько пудовъ сѣна помѣстится на сѣновалѣ, если длина его$=12$ саж., основаніе каждаго треуг.$=3$ саж., высота$=1^{1}/_{2}$ арш., и каждый пудъ сѣна занимаетъ 14 куб. фут.?

161. Сколько нужно телѣгъ для перевозки 200 желѣзныхъ полосъ въ 2 саж. $2^{2}/_{3}$ фута длины, 2 верш. ширины и 3 дюй. толщины, если на каждую телѣгу положить $31^{1}/_{2}$ пудъ? Вѣсъ 1 куб. дюй. воды$=3,84$ золотника; удѣл. вѣсъ желѣза$=7,8$.

162. Сколько нужно кирпичей для кладки 18 столбовъ въ 5 арш. вышины, 14 вершк. длины и 14 вершк. ширины, если кирпичи имѣютъ по 6 вершк. въ длину, 3 верш. въ ширину и 2 верш. въ толщину и если на изломъ полагается 5%?

163. Основаніе пар—да есть ромбъ, котораго діагонали 5 вершк и 14 дюйм.; объемъ его$=315$ куб. вершк; найти высоту его?

164. Основаніе пирамиды есть прямоугольникъ, котораго периметръ $=26$ дюйм., а разность сторонъ $=5$ дюйм.; объемъ пирамиды$=81$ куб. дюй. Опредѣлить высоту ея?

165. Опредѣлить поверхность и объемъ прямоуг. пар—да, имѣющаго въ основаніи квадратъ $=121$ кв. дюй., а высоту вдвое болѣе ребра основанія?

166. У мѣдника было три кубическихъ куска мѣди: объемъ одного$=27$ куб. дюйм., ребро другаго$=4$ дюйм., третій вѣсилъ 45 фун.; ему нужно вылить изъ всѣхъ этихъ кусковъ одинъ кубъ; какой величины форму онъ долженъ взять для этого? Вѣсъ 1 куб. дюй. воды$=^{1}/_{23}$ фун.; удѣл. вѣсъ мѣди$=9$.

167. Опредѣлить объемъ призмы, которой высота $=3,7$ арш., а основаніемъ служитъ прямоуг. треуг., котораго одинъ катетъ $=8$ вершк., а уголъ$=45°$?

168. Поверхность куба=384; найти объемъ его?

169. Въ ящикъ съ водою, котораго длина 3, а ширина $2^1/_2$ фута, погрузили камень, вслѣдствіе чего вода въ ящикѣ стала на высотѣ 4 дюйм. и совершенно покрыла камень. Опредѣлить въ куб. фут. объемъ камня?

170. Опредѣлить вѣсъ призмы, сдѣланной изъ желѣза, если высота ея = 16 децим., а основаніе есть прав. треуг., котораго сторона=25,36 центим.; удѣл. вѣсъ=7,8.

171. Ребро прав. октаэдра=a; опредѣлить объемъ V его?

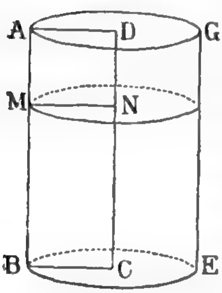
ГЛАВА IV.

Тѣла круглыя.

450. Изъ тѣлъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, въ начальной геометріи разсматриваютъ только три: *прямой цилиндръ*, *прямой конусъ* и *шаръ*. Всѣ эти тѣла могутъ быть образованы вращеніемъ фигуръ около неподвижныхъ прямыхъ линій; поэтому они наз. также *тѣлами вращенія*.

451. Возьмемъ прямоугольникъ $ABCD$ (чер. 503); если вообразимъ, что онъ вращается около стороны DC, такъ чтобы DC оставалась неподвижной, то образуется тѣло $ABEG$, наз. *прямымъ цилиндромъ*. При этомъ стороны DA и CB прямоугольника опишутъ круги AG и BE, плоскости которыхъ будутъ параллельны между собою, ибо линія DA во все время вращенія остается параллельной линіи CB; конечныя точки A и B сторонъ DA и CB опишутъ окружности; а сторона AB опишетъ кривую поверхность. Неподвижная сторона DC наз. *осью* цилиндра; круги BE и AG — его *основаніями*; поверхность, образованная вращеніемъ прямой AB, наз. *боковой* поверхностью цилиндра; а линія AB — *образующей* цилиндра. Ось DC $\perp$ къ обоимъ основаніямъ цилиндра, ибо она $\perp$ къ линіямъ CB и DA, отъ вращенія которыхъ образуются основанія; поэтому длина оси выражаетъ также разстояніе между основаніями цилиндра и ось наз. также *высотой* цилиндра. Образующая цилиндра также=высотѣ его. Каждая точка M образующей AB цилиндра описываетъ окружность, ибо во все время вращенія перпендикуляръ MN, опущенный изъ M на ось CD, остается $\perp$ къ оси и слѣд. остается въ плоскости, перпендикуляр-

Чер. 503.

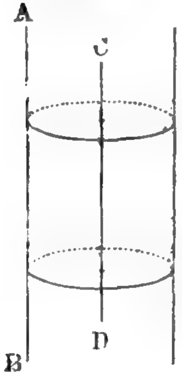


ной къ CD, притомъ сохраняетъ одну и туже длину. Всѣ окружности, описанныя разными точками образующей, равны между собою, ибо радiусы ихъ равны разстоянiю между осью и образующей.

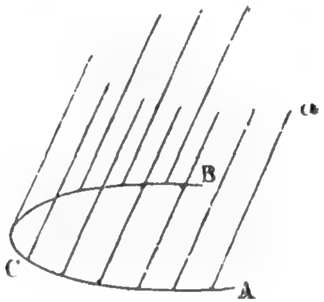
452. Если неограниченная прямая AB (чер. 504) будетъ вращаться около параллельной ей прямой CD, такъ чтобы во все время вращенiя AB оставалась параллельной CD и находилась отъ нея въ одномъ и томъ же разстоянiи, то AB образуетъ неограниченную цилиндрическую поверхность.

453. Въ болѣе общемъ смыслѣ цилиндрической поверхностью наз. такая, которая происходитъ отъ движенiя прямой Aa (чер. 505),

Чер. 504.



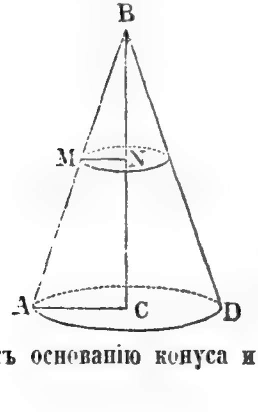
Чер. 505.



перемѣщающейся параллельно первоначальному своему положенiю, притомъ такъ, что одна изъ точекъ ея все время движется по нѣкоторой кривой линiи ACB. Прямая Aa наз. *образующей*, а линiя ACB—*направляющей*.

454. Отъ обращенiя прямоугольнаго треуг. BAC (чер. 506) около одного изъ своихъ катетовъ BC образуется тѣло BAD, наз. *прямымъ конусомъ*. При этомъ другой катетъ AC опишетъ кругъ, наз. *основанiемъ конуса*; гипотенуза AB опишетъ кривую *боковую* поверхность конуса; а точка A опишетъ окружность, разграничивающую боковую поверхность конуса отъ его основанiя. Катетъ BC, около котораго происходитъ вращенiе, наз. *осью* конуса: гипотенуза BA—*образующей*, а точка B—*вершиной* конуса. Ось конуса во все время вращенiя остается $\perp$ къ катету AC, слѣд. она $\perp$ къ основанiю конуса и потому представляетъ *высоту* конуса. Каж-

Чер. 506.

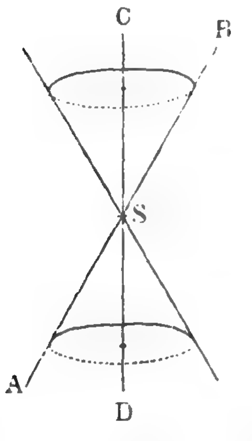


дая точка M образующей конуса опишетъ во время вращенія окружность, ибо перпендикуляръ MN, опущенный изъ M на ось BC, во все время вращенія будетъ $\perp$ къ оси, слѣд. будетъ находиться постоянно въ плоскости, перпендикулярной къ оси, и притомъ будетъ сохранять одну и туже длину.

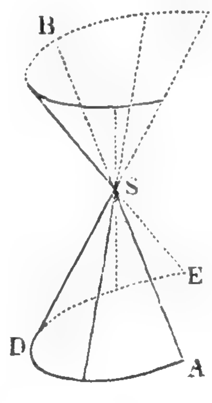
455. Окружности, описанныя разными точками образующей, уменьшаются по мѣрѣ приближенія къ вершинѣ конуса, ибо изъ подобія треуг. BMN и BAC имѣемъ $\frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC}$, или $MN=BN.\ \frac{AC}{BC}$, гдѣ отношеніе $\frac{AC}{BC}$ остается безъ перемѣны, а BN уменьшается съ приближеніемъ къ вершинѣ конуса.

456. Если двѣ прямыя AB и CD (чер. 507) пересѣкаются въ точкѣ S и одна изъ нихъ, напр. AB, будетъ вращаться около CD, такъ чтобы уголъ между этими прямыми неизмѣнялся и чтобы точка S оставалась неподвижной, то AB опишетъ неограниченную коническую поверхность. Поверхность эта состоитъ изъ двухъ частей (или изъ двухъ *полостей*), имѣющихъ общую точку S.

Чер. 507.



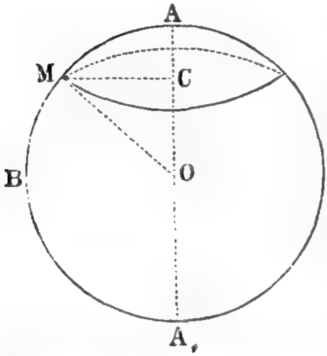
Чер. 508.



457. Въ болѣе общемъ смыслѣ коничесвой поверхностью наз. такая, которая образуется (чер. 508) отъ движенія прямой AB, перемѣщающейся такъ, что точка S ея остается неподвижной, а одна изъ другихъ ея точекъ находится во все время вращенія на нѣкоторой кривой линіи ADE. Прямая AB наз. *образующей*, а линія ADE—*направляющей*.

458. Отъ вращенія полукруга ABA_1 (чер. 509) около его діаметра AA_1 образуется тѣло, наз. ***шаромъ***. При этомъ полуокружность ABA_1 опишетъ шаровую или *сферическую* поверхность. Очевидно, что всѣ точки шаровой поверхности находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра O полукруга; точка O наз. ***центромъ шара***. Прямая линія, соединяющая какую нибудь точку поверхности шара съ центромъ, наз. ***радіусомъ*** шара; а прямая линія, соединяющая двѣ точки поверхности шара и проходящая черезъ центръ (какъ напр. AA_1) наз. ***діаметромъ*** шара. Каждая точка M полуокружности ABA_1 описываетъ окружность. Дѣйствительно, если изъ M опустимъ перпендикуляръ MC на діаметръ AA_1, то этотъ перпендикуляръ во все время вращенія будетъ оставаться въ одной плоскости, перпендикулярной къ AA_1, и будетъ сохранять одну и туже длину. Окружности, описанныя различными точками полуокружности ABA_1, будуть увеличиваться по мѣрѣ приближенія къ центру шара. Дѣйствительно, проведя радіусъ шара OM, изъ прямоуг. треуг. MCO имѣемъ $MC=\sqrt{\overline{MO}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{R^2-\overline{CO}^2}$. Такъ какъ R для каждаго шара есть величина постоянная, а CO съ приближеніемъ къ центру уменьшается, то MC при этомъ увеличивается.

Чер. 509.

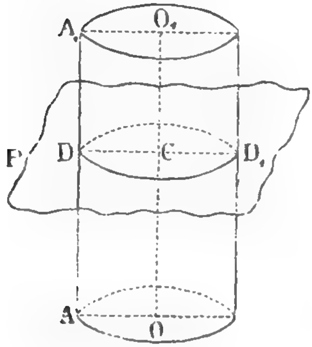


459. ***Если пересѣчь цилиндръ плоскостью, перпендикулярною къ оси, то получимъ въ сѣченіи кругъ, равный основанію.*** Пусть плоскость P (чер. 510) $\perp$ къ оси OO_1; такъ какъ эта плоскость пересѣкаетъ цилиндръ, то она пересѣчетъ и прямоугольникъ AA_1O_1O, отъ вращенія котораго происходитъ цилиндръ; сѣченіе этой плоскости съ прямоугольникомъ AA_1O_1O будетъ прямая $DC\perp OO_1$ и равная AO. При вращеніи прямоугольника точка D образующей будетъ все время оставаться въ плоскости P, ибо и линія CD, перпендикулярная къ оси, будетъ оставаться въ этой плоскости; точка D опишетъ окружность DD_1, и такъ какъ эта окружность принадлежитъ въ одно время и плоскости P и боковой поверхности цилиндра, то она и будетъ линіей ихъ пересѣченія; стало быть кругъ DD_1 будетъ сѣченіе цилиндра плоскостью P, этотъ кругъ$=$основанію цилиндра, ибо $DC=AO$.

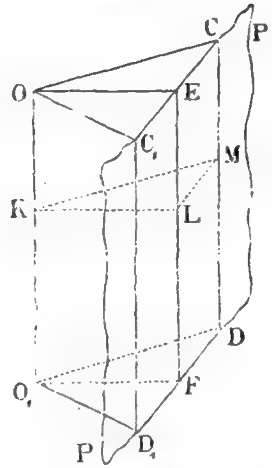
Слѣдствіе. Боковая поверхность цилиндра есть геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ одинакомъ разстояніи отъ оси цилиндра; разстояніе это$=$радіусу основанія.

460. *Если пересѣчь цилиндръ плоскостью, параллельной оси, то въ сѣченіи получимъ прямоугольникъ.* Пусть OO_1 (чер. 511)

Чер. 510.

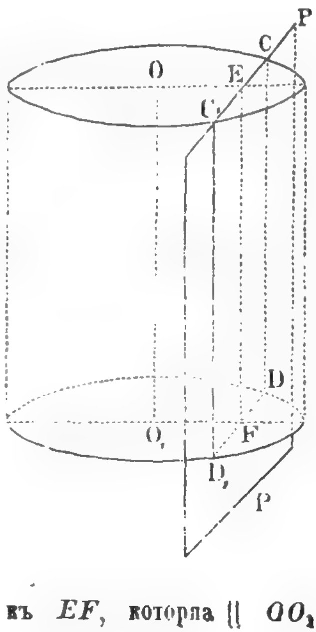


Чер. 511.



будетъ ось цилиндра, а P—плоскость || OO_1 и находящаяся отъ OO_1 въ разстояніи OE, которое меньше радіуса основанія цилиндра. Проведемъ черезъ OO_1 плоскость $\perp P$; эта плоскость пересѣчется съ P по линіи $EF \parallel OO_1$ и находящейся отъ OO_1 въ разстояніи OE. Проведемъ изъ O въ плоскости P наклонныя OC и OC_1, равныя радіусу основанія цилиндра; тогда точки C и C_1 будутъ лежать и на плоскости P и на боковой поверхности цилиндра. Если изъ C и C_1 проведемъ CD и C_1D_1 параллельно OO_1, то всѣ точки линій CD и C_1D_1 будутъ общими точками плоскости P и боковой поверхности цилиндра. Дѣйствительно, взявъ напр. на CD точку M, проведемъ черезъ нее плоскость $\perp OO_1$; эта плоскость пересѣчетъ прямую OO_1 въ точкѣ K, а прямую EF въ L; соединивъ точки K, L, M, получимъ треуг. KLM, въ которомъ уг. L прямой, ибо плос. $KLM \perp OO_1$, слѣд. эта плос. $\perp$ и въ EF, которая || OO_1.

Чер. 512.



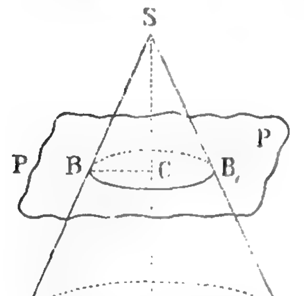
Треуг. $KLM = OEC$, ибо катетъ $KL = OE$ какъ разстоянія между параллелями OO_1 и EF; катетъ $ML = CE$ какъ разстоянія между параллелями CD и EF; слѣд. и $KM = OC =$ радіусу основанія цилиндра; т. е. точка M находится на боковой поверхности цилиндра. Очевидно, что всѣ точки, не лежащія на линіяхъ CD и C_1D_1, не находятся на боковой поверхности цилиндра. Такимъ образомъ плоскость P пересѣкаетъ боковую поверхность цилиндра (чер. 511 и 512) по линіямъ CD и C_1D_1, которыя параллельны оси и слѣд. перпендикулярны къ основаніямъ цилиндра. Съ основаніями же цилиндра плоскость P пересѣкается по прямымъ CC_1 и DD_1, которыя перпендикулярны къ CD и C_1D_1. Поэтому сѣченіе цилиндра съ плоскостью P есть прямоугольникъ CC_1D_1D.

Если разстояніе OE сѣкущей плоскости отъ оси цилиндра будетъ = радіусу основанія цилиндра, то линіи CD и C_1D_1 сольются въ одну—и плоскость P въ этомъ случаѣ будетъ *касаться* боковой поверхности цилиндра.

Если разстояніе $OE =$ нулю, т. е. плоскость P проходитъ черезъ ось, то въ сѣченіи получится прямоугольникъ, вдвое бо́льшій того прямоуг., отъ вращенія котораго происходитъ цилиндръ.

461. *Если пересѣчь конусъ плоскостью, перпендикулярной къ оси, то въ сѣченіи получимъ кругъ.* Пусть (чер. 513) B будетъ точка пересѣченія образующей SA съ плоскостью P, перпендикулярной къ оси SO. Опустимъ изъ B перпендикуляръ BC на SO; этотъ перпендикуляръ будетъ заключаться въ плоскости P и во все время вращенія не выйдетъ изъ этой плоскости; поэтому точка B опишетъ на этой плоскости окружность BB_1, которая и будетъ представлять сѣченіе плоскости P съ боковой поверхностью конуса; а потому кругъ BB_1 будетъ сѣченіемъ конуса плоскостью P.

Чер. 513.

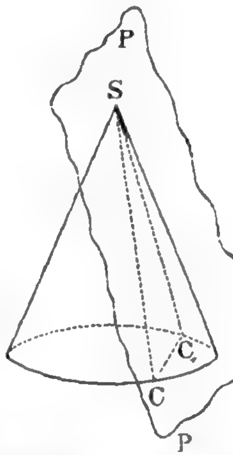


462. Площади круговъ относятся какъ квадраты радіусовъ; слѣд. (чер. 513) $\frac{\text{площ. } BB_1}{\text{площ. } AA_1} = \frac{BC^2}{AO^2}$; а изъ подобія треуг. SBC и SAO имѣемъ $\frac{BC}{AO} = \frac{SC}{SO}$, слѣд. $\frac{\text{площ. } BB_1}{\text{площ. } AA_1} = \frac{SC^2}{SO^2}$; т. е. *площадь сѣченія относится къ площади основанія какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины.* Такое же отношеніе мы вывели и для пирамиды.

463. Сѣченіе BB_1 (чер. 513) дѣлитъ конусъ на двѣ части: одна изъ нихъ SBB_1 есть конусъ; другая BB_1A_1A, заключенная между двумя параллельными кругами AA_1 и BB_1 и частью конической поверхности, наз. *усѣченнымъ конусомъ*. Круги AA_1 и BB_1 наз. его *основаніями*—нижнимъ и верхнимъ; прямая OC—*осью* (а также *высотою*), прямая AB—*образующей*. Усѣченный конусъ можетъ произойти отъ вращенія трапеціи $BCOA$, которой одна изъ сторонъ $OC \perp$ къ основаніямъ, около этой перпендикулярной стороны.

464. *Если пересѣчь конусъ плоскостью, проходящей черезъ его вершину, то получимъ равнобедренный треугольникъ.* Пусть (чер. 514) плоскость P, проходящая черезъ вершину конуса S, пересѣкаетъ его основаніе по прямой CC_1. Соединивъ C и C_1 съ S, мы получимъ двѣ образующія конуса SC и SC_1; эти образующія, находясь и на плоскости P и на конической поверхности, представятъ пересѣченіе плос. P съ боковой поверхностью конуса. Такъ какъ $SC=SC_1$, то треуг. SCC_1, представляющій сѣченіе конуса плоскостью P, будетъ равнобедренный.

Чер. 514.



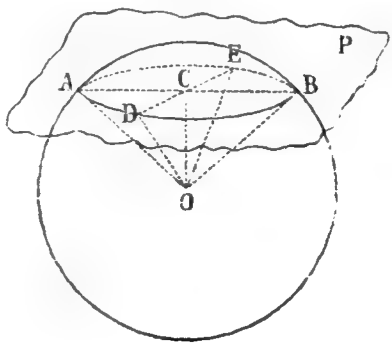
Если мы будемъ вращать плос. P около образующей SC вправо, то SC_1 будетъ приближаться къ SC и точка C_1 къ C. Когда SC_1 сольется съ SC и точка C_1 съ C, то плос. P будетъ *касаться* къ боковой поверхности конуса.

Слѣдствіе. Сѣченіе конуса плоскостью, проходящей черезъ его ось, есть равнобедренный треугольникъ, вдвое больший того прямоуг. треуг., отъ вращенія котораго получается конусъ.

Сѣченія конуса плоскостями въ другихъ направленіяхъ мы разсмотримъ ниже.

465. *Всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ*. Пусть $ADBE$ (чер. 515) есть сѣченіе шара плоскостью P. Опустимъ изъ центра O шара перпендикуляръ OC на плоскость P и соединимъ точки A, D, B, E... съ центромъ; тогда прямыя OA, OD, OB... будутъ равны между собою какъ радіусы шара; слѣд. всѣ эти линіи, наклонныя къ плоскости P, должны равно отстоять отъ основанія C перпендикуляра OC; т. е. прямыя AC, DC, BC... должны быть равны между собою; стало быть $ADBE$ есть кругъ, котораго центръ въ C.

Чер. 515.



466. Означивъ радіусъ шара R, радіусъ сѣченія r, разстояніе CO (чер. 515) сѣкущей плоскости P отъ центра шара—d, изъ прямоуг. треуг. OCA или OCD.... получимъ $r^2=R^2-d^2$.

Эта формула показываетъ, что

1) радіусъ сѣченія вообще меньше радіуса шара;

2) радіусъ сѣченія обратится въ нуль и сѣченіе обратится въ точку, когда разстояніе d сѣкущей плоскости отъ центра шара сдѣлается равнымъ радіусу шара; плоскость P будетъ тогда касаться шара;

3) радіусъ сѣченія сдѣлается равнымъ радіусу шара, когда $d=0$, т. е. плоскость будетъ проходить черезъ центръ шара; сѣченія, проходящія черезъ центръ, наз. *большими кругами*; *всѣ большіе круги равны между собою и дѣлятъ шаръ на двѣ равныхъ части* (на два полушарія), въ чемъ легко удостовѣриться, представивъ, что одна половина шара вложена въ другую; сѣченія, не проходящія черезъ центръ шара, наз. *малыми кругами*;

4) малые круги, находящіеся въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара, равны между собою.

467. *Плоскость, перпендикулярная къ радіусу шара въ его конечной точкѣ, касается шара въ этой точкѣ* — и обратно *плоскость, касательная къ шару, перпендикулярна къ радіусу, проведенному въ точку прикосновенія.*

1. Пусть (чер. 516) плос. $P\perp$ радіусу OA въ конечной его точкѣ A. Точка A лежитъ и на поверхности шара и на плоскости P; всѣ же прочія точки плоскости P, напр. B, C..., не лежатъ на поверхности шара, ибо OB, OC... суть линіи, наклонныя къ плос. P, и потому всѣ эти линіи больше радіуса OA, который по условію $\perp P$.

Чер. 516.

2. Обратно — если плос. P касается шара въ точкѣ A, то только одна точка A этой плоскости лежитъ на поверхности шара; всѣ же прочія точки плоскости P находятся внѣ поверхности шара и потому отстоятъ отъ центра дальше, чѣмъ точка A; поэтому радіусъ OA есть кратчайшее разстояніе между точкой O и плоск. P, и слѣд. $OA\perp P$.

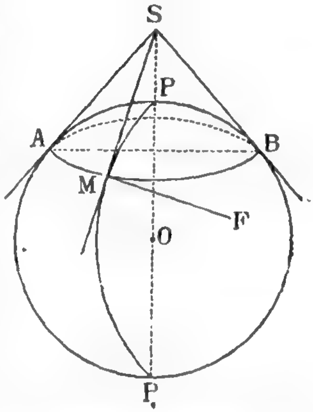
Слѣдствіе. *Черезъ точку, взятую на поверхности шара, можно провести къ нему только одну касательную плоскость,*

Всѣ прямыя, проведенныя въ плоскости P (чер. 516) черезъ точку

A, имѣютъ съ поверхностью шара только одну общую точку и наз. *касательными* къ шару.

468. Возьмемъ шаръ O (чер. 517) и точку S внѣ его. Черезъ прямую OS и черезъ какую нибудь точку A поверхности шара проведемъ плоскость OSA, которая пересѣчетъ шаръ по большому кругу PAP_1, и черезъ точку S проведемъ къ этому кругу касательную SA, которая будетъ также касательная и къ шару. Въ то время, какъ полукругъ PAP_1, вращаясь около SO, опишетъ поверхность шара, линія SA, оставаясь касательной къ шару, опишетъ коническую поверхность, которая съ поверхностью шара будетъ имѣть общую окружность AB, которую опишетъ точка A. Кромѣ того въ каждой точкѣ M этой окружности и коническая и сферическая поверхности будутъ имѣть общую касательную плоскость SMF (плоскость эта проходитъ черезъ линію SM, касательную къ шару, и черезъ линію MF, касательную къ окружности AB). Такой конусъ наз. *описаннымъ* около шара.

Чер. 517.



Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что 1) *изъ точки, данной внѣ шара, можно провести къ нему безчисленное множество касательныхъ плоскостей и касательныхъ линій*, и 2) *что касательныя линіи, проведенныя къ шару изъ одной внѣшней точки, равны между собою.*

469. Опредѣленіе поверхностей и объемовъ цилиндра, конуса и шара основывается на способѣ предѣловъ. Если мы въ основаніе цилиндра впишемъ прав. многоуг. и на этомъ многоуг. построимъ призму такой же высоты, какъ цилиндръ, то такая призма наз. *вписанною* въ цилиндръ; точно также, описавъ прав. мног. около основанія цилиндра, можемъ получить правильную *описанную* призму. Если будемъ увеличивать число сторонъ мног., вписаннаго въ основаніе цилиндра, то периметръ его будетъ приближаться къ своему предѣлу, именно къ окружности основанія; а такъ какъ боковая поверхность прямой призмы=периметру ея основанія; умноженному на высоту, то слѣд. и боковая пов. вписан. призмы будетъ также приближаться къ нѣкоторому предѣлу. Тоже самое можно оказать и относительно бок. поверх. описанной призмы. Притомъ предѣлъ этихъ поверхностей будетъ одинъ и тотъ же, ибо, какъ сейчасъ докажемъ, разность между боковыми поверхностями описанной и вписанной призмъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой, произвольно взятой, величины. Дѣйствительно, если черезъ p означимъ периметръ вписан.

многоугольника, p_1—перим. опис. многоугольника, h—общую высоту призмъ и цилиндра, то бок. пов. опис. призмы$=p_1h$, а вписанной$=ph$, и слѣд. разность между поверхностями$=(p_1-p)h$, гдѣ p_1-p (§ 315) есть величина безконечно малая. Этотъ *общій предѣлъ боковыхъ поверхностей вписанной и описанной призмы и принимаютъ за боковую поверхность цилиндра.*

470. Подобнымъ образомъ, если въ основаніе конуса впишемъ и около него опишемъ прав. многоугольникъ, то можемъ построить вписанную и описанную пирамиды, которыя будутъ имѣть вершину въ вершинѣ конуса и слѣд. высоту, общую съ конусомъ. *Общій предѣлъ, къ которому стремятся боковыя поверхности правильныхъ впис. и опис. пирамидъ, принимаютъ за боковую поверхность конуса.*

Легко видѣть, что *боковая поверх. усѣченнаго конуса будетъ предѣломъ боковыхъ поверхностей прав. впис. и опис. усѣч. пирамидъ.*

471. Разность между объемами описанной и вписанной призмъ, при увеличеніи числа ихъ граней, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой, произвольно взятой, величины. Дѣйствительно, если площадь основанія описанной призмы означимъ b_1, вписанной b, а общую высоту ихъ, равную высотѣ цилиндра, назовемъ h, то объемъ опис. призмы$=b_1h$, а вписанной$=bh$; слѣд. разность ихъ$=(b_1-b)h$, гдѣ b_1-b, какъ доказано въ § 323, можетъ быть произвольно мало. Но объемъ цилиндра, очевидно, меньше объема опис. призмы и больше объема вписанной; поэтому разность между объемомъ какой нибудь изъ этихъ призмъ и объемомъ цилиндра и подавно можетъ быть сдѣлана произвольно малою; слѣд. *объемъ цилиндра есть предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ.*

Точно также *объемъ конуса* (полнаго или усѣченнаго) *есть предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ* (полныхъ или усѣченныхъ).

Предъидущія теоремы выражаютъ короче, говоря, что *цилиндръ есть правильная призма, а конусъ—правильная пирамида съ безчисленнымъ множествомъ граней.*

472. Боковая поверхность прямой призмы, какъ мы видѣли,$=$периметру основанія, умноженному на высоту; боковая поверхность правильной пирамиды $=$ периметру основанія, умноженному на $^1/_2$ апоѳемы; боковая поверхность прав. усѣч. пирамиды $=$ полсуммѣ периметровъ ея основаній, умноженной на апоѳему, или $=$ периметру средняго сѣченія, умноженному на апоѳему. Но предѣломъ для периметровъ основаній служитъ окружность цилиндра или конуса; предѣломъ для апоѳемы прав. пирамиды служитъ образующая конуса; поэтому на основаніи способа предѣловъ (§ 310, теор. 2) заключаемъ:

1. *Боковая пов. цилиндра = окружности основанія, умноженной на высоту.*

2. *Бок. пов. конуса = окружности основанія, умноженной на $^1/_2$ образующей.*

3. *Бок. пов. усѣченнаго конуса = полусуммѣ окружностей основаній, умноженной на образующую, или = окружности средняго сѣченія* (т. е. сдѣланнаго въ равныхъ разстояніяхъ отъ обоихъ основаній), *умноженной на образующую.*

Означивъ черезъ r радіусъ основанія цилиндра, а высоту его черезъ h, найдемъ, что бок. пов. цил. $= 2\pi rh$;

вся пов. цил. = бок. пов. + 2 площ. основ. $= 2\pi rh + 2\pi r^2 =$
$= 2\pi r(r+h)$.

Если r будетъ радіусъ основанія конуса, а l—образующая, то
бок. пов. кон. $= 2\pi r \cdot {}^1/_2\, l = \pi rl$;

вся пов. кон. = бок. пов. + площ. основ. $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r)$.

Означивъ черезъ r и r_1 радіусы основаній усѣч. конуса, а черезъ l его образующую, получимъ

$$\text{бок. пов. усѣч. кон.} = \frac{2\pi r + 2\pi r_1}{2} \cdot l = \pi l(r+r_1);$$

вся пов. усѣч. кон. $= \pi l(r+r_1) + \pi r^2 + \pi r_1^2 = \pi[l(r+r_1) + r^2 + r_1^2] =$
$= \pi[r(l+r) + r_1(l+r_1)]$.

473. Зная, какъ выражаются объемы призмы и пирамиды, полной и усѣченной, на основаніи способа предѣловъ заключаемъ:

1) *объемъ цилиндра = площади его основанія, умноженной на высоту;*

2) *объемъ конуса = площади его основанія, умноженной на $^1/_3$ высоты;*

3) *объемъ усѣченнаго конуса = суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ высоту, общую съ усѣченнымъ конусомъ, а основанія— одинъ нижнее основаніе усѣч. конуса, другой—верхнее, третій— среднее пропорціональное между ними.*

Означивъ радіусъ основанія цилиндра r, а высоту—h, найдемъ, что объемъ цилиндра $= \pi r^2 h$.

Если рад. основ. конуса будетъ r, а высота h, то объемъ конуса $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Означимъ черезъ r и r_1 радіусы основаній усѣченнаго конуса, а черезъ h высоту его; называя площадь, среднюю пропорціональную между обоими основаніями, черезъ x, будемъ имѣть $\dfrac{\pi r^2}{x} = \dfrac{x}{\pi r_1^2}$, откуда $x^2 = \pi^2 r^2 r_1^2$, а $x = \pi r r_1$, и слѣд.

$$\text{об. усѣч. кон.} = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi r_1^2 h}{3} + \frac{\pi r r_1 h}{3} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

474. Изъ выраженій поверхностей и объемовъ цилиндра и конуса слѣдуетъ:

1. Боковыя поверхности всякихъ цилиндровъ относятся какъ произведенія радіусовъ основаній на высоты.

2. Боковыя поверхности цилиндровъ съ равными высотами относятся какъ радіусы основаній, а съ равными основаніями—относятся какъ высоты.

3. Боковыя поверхности всякихъ конусовъ относятся какъ произведенія радіусовъ основаній на образующія.

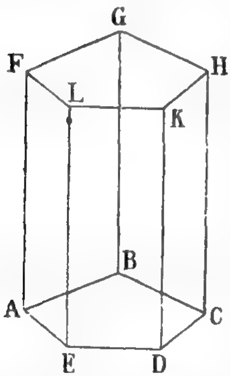
4. Боковыя поверхности конусовъ съ равными образующими относятся какъ радіусы основаній; а съ равными основаніями—какъ образующія.

5. Объемы цилиндровъ (а также и полныхъ конусовъ) относятся какъ произведенія ихъ высотъ на квадраты радіусовъ.

6. Объемы цилиндровъ (а также полныхъ конусовъ) съ равными основаніями относятся какъ высоты; а съ равными высотами—какъ квадраты радіусовъ основаній.

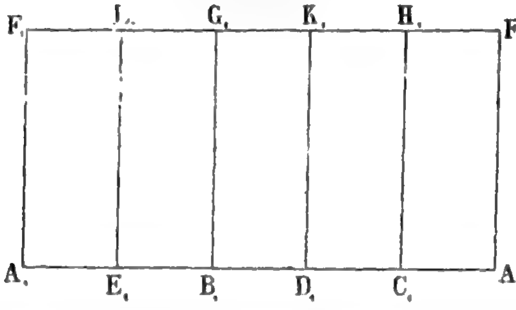
475. *Боковую поверхность цилиндра можно развернуть въ плоскость, причемъ получится прямоугольникъ, котораго одна сторона = выпрямленной окружности цилиндра, а другая = высотѣ цилиндра.* Чтобы показать это, возьмемъ сперва правильную призму AH (чер. 518); вообразимъ, что грань EF повертывается влѣво около прямой EL, пока плоскость ея совпадетъ съ плоскостью грани EK; потомъ посредствомъ вращенія около ребра KD приведемъ двѣ грани, уже совмѣщенныя въ одну плоскость, въ плоскость слѣдующей грани DH и т. д. до тѣхъ поръ, пока всѣ боковыя грани призмы будутъ приведены въ плоскость послѣдней грани AG. Во время вращенія около ребра EL, сторона AE остается перпендикулярной къ этому ребру; слѣд. при совмѣщеніи грани AL съ EK сторона AE пойдетъ по продолженію ED; точно такъ же сторона AED, образовавшаяся отъ сложенія AE и ED, пойдетъ по продолженію DC и т. д.

Чер. 518.



Такимъ образомъ въ плоскости послѣдней грани AG мы получимъ (чер. 519) прямоуг. A_1F_2, котораго высота A_1F_1 = высотѣ призмы, а основаніе A_1A_2 = периметру основанія призмы. Положимъ теперь, что призма AH (чер. 518) вписана въ цилиндръ, и что число граней ея постепенно увеличивается; тогда высота прямоугольника A_1F_1 будетъ оставаться безъ перемѣны, а основаніе будетъ увеличиваться, приближаясь къ длинѣ окружности основанія цилиндра, и слѣд. боковая поверхность цилиндра можетъ быть развернута въ прямоугольникъ, котораго высота $=$ образующей, а основаніе $=$ выпрямленной окружности основанія цилиндра.

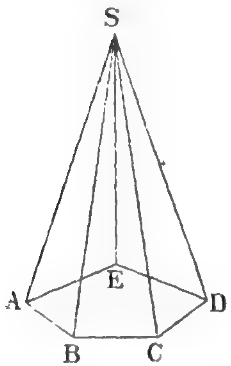
Чер. 519.



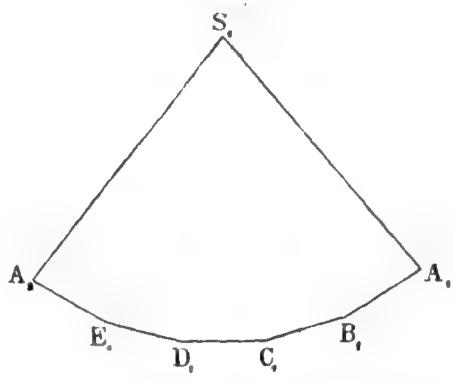
476. ***Боковую поверхность конуса можно развернуть въ секторъ, котораго радіусъ $=$ образующей конуса, а длина дуги $=$ окружности основанія конуса.***

Для доказательства этого возьмемъ прав. пирамиду $SABCDE$ (чер. 520) и посредствомъ вращенія около ребра SB приведемъ

Чер. 520.

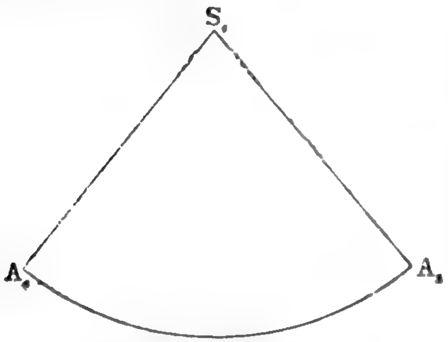


Чер. 521.



грань SAB въ плоскость грани SBC, такъ чтобы она расположилась на продолженіи грани SBC; за тѣмъ вращеніемъ около ребра SC эти двѣ грани приведемъ въ плоскость грани SCD и т. д. до тѣхъ поръ, пока всѣ боковыя грани пирамиды будутъ соединены въ плоскости послѣдней изъ нихъ SEA. Тогда мы получимъ фигуру $S_1A_1B_1C_1D_1E_1A_2$ (чер. 521), имѣющую видъ части прав. многоугольника, котораго радіусъ есть S_1A_1. Если вообразимъ, что пирамида $SABCDE$ вписана въ конусъ и что число граней ея увеличивается, то фигура $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ будетъ сохранять свой радіусъ, а ломаная линія $A_1B_1C_1\ldots$ будетъ приближаться къ дугѣ, которой радіусъ = образующей конуса, а длина = окружности его основанія. Такимъ образомъ боковая поверхность конуса можетъ быть развернута въ круговой секторъ $S_1A_1A_2$ (чер. 522), котораго радіусъ S_1A_1 = образующей конуса, а длина дуги A_1A_2 = окружности основанія конуса.

Чер. 522.



Зная величину образующей конуса и радіуса его основанія, легко вычислить уголъ S_1 этого сектора. Этотъ уголъ будетъ во столько разъ меньше 360°, во сколько длина дуги A_1A_2 меньше длины цѣлой окружности, которой радіусъ S_1A_1, т. е. образующая конуса; поэтому, означивъ число градусовъ угла S_1 черезъ n, радіусъ основанія конуса — r, образующую — l, и замѣтивъ, что длина дуги A_1A_2 = длинѣ окружности основанія конуса $= 2\pi r$, изъ пропорціи $\frac{n}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$ найдемъ $n = 360 \cdot \frac{r}{l}$.

Такъ если образующая вдвое больше радіуса основанія, что будетъ въ томъ случаѣ, когда конусъ происходитъ отъ обращенія прямоуг. треуг., имѣющаго углы въ 30° и 60°, около бо́льшаго катета, то $n = 180°$.

Сѣченіе такого конуса плоскостью, проходящею черезъ ось, есть равносторонній треуг., и самый конусъ наз. поэтому *равностороннимъ*; такимъ образомъ равностор. конусъ развертывается въ полукругъ.

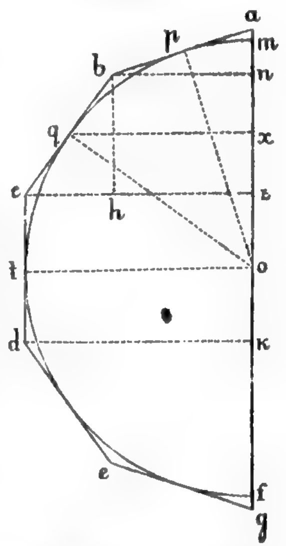
477. *Подобными цилиндрами или подобными конусами наз. такіе, которые происходятъ отъ вращенія подобныхъ прямоугольниковъ или подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ около сходственныхъ сторонъ.* Пусть s и s_1 будутъ боковыя поверхности, t и t_1 полныя поверхности, v и v_1 объемы, r и r_1 радіусы основаній, а h и h_1 высоты двухъ подобныхъ цилиндровъ; тогда $\frac{s}{s_1} = \frac{rh}{r_1h_1}$; $\frac{t}{t_1} = \frac{r(r+h)}{r_1(r_1+h_1)}$; $\frac{v}{v_1} = \frac{r^2h}{r_1^2h_1}$. Но по опредѣленію подобныхъ цилиндровъ радіусы ихъ основаній пропорціональны высотамъ, т. е. $\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1}$ и слѣд. $\frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1}$; поэтому $\frac{s}{s_1} = \frac{rh}{r_1h_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2}$; $\frac{t}{t_1} = \frac{r(r+h)}{r_1(r_1+h_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2}$;

$\frac{v}{v_1}=\frac{r^2h}{r_1{}^2h_1}=\frac{r^2}{r_1{}^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1{}^3}=\frac{h^3}{h_1{}^3}$; т. е. *боковыя и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ относятся какъ квадраты, а объемы какъ кубы высотъ или радіусовъ основаній.*

Оставивъ предъидущія обозначенія для конуса и назвавъ еще l и l_1 образующія двухъ подобныхъ конусовъ, найдемъ, что *боковыя и полныя поверхности подобныхъ полныхъ конусовъ относятся какъ квадраты, а объемы какъ кубы высотъ, образующихъ и радіусовъ оснований.*

478. Опишемъ (чер. 523) около полукр. половину прав. многоуг. $abcd$.., имѣющаго четное число сторонъ; при обращеніи полукруга вмѣстѣ съ многоуг. около діаметра mf, полукругъ опишетъ шаръ, а полумногоугольникъ опишетъ тѣло, поверхность котораго будетъ состоять 1) изъ боковыхъ поверхностей двухъ полныхъ конусовъ, образованныхъ линіями ab и eg; 2) изъ бок. поверхн. усѣченныхъ конусовъ, образованныхъ линіями bc и de, и 3) изъ бок. повер. цилиндра, образованнаго линіей cd. Докажемъ, что бок. пов. каждаго изъ этихъ тѣлъ = окружности большаго круга (т. е. круга op), умноженной на высоту тѣла.

Чер. 523.



Опустимъ изъ точекъ b, q, c, t... перпендикуляры bn, qx, cz... на діаметръ mf; тогда

бок. пов. конуса $ab=2\pi.\,bn.{}^1/_2\,ab=2\pi.bn.\,ap$... (1).

Соединивъ точку p съ центромъ шара o, получимъ подобные треуг. abn и apo (уг. a общій, p и n прямые), слѣд. $\frac{bn}{an}=\frac{op}{ap}$, откуда $bn.ap=op.\,an=R.\,an$, гдѣ R есть радіусъ шара. Подставивъ въ выраженіе (1) $R.\,an$ вмѣсто $bn.\,ap$, найдемъ

бок. пов. кон. $ab=2\pi R.\,an$ = окружности большаго круга, умноженной на высоту конуса.

Бок. пов. усѣч. кон. $bc=2\pi\,.\,xq\,.\,bc$ (см. § 472).

Проведя $bh \parallel cz$ и соединивъ q съ o, получимъ треуг. $oxq \sim chb$ (стороны этихъ треугольниковъ взаимно перпендикулярны); слѣд. $\frac{xq}{oq}=\frac{bh}{bc}$, откуда $xq\,.\,bc=oq\,.\,bh=R\,.\,nz$; слѣд.

бок. пов. $bc=2\pi R\,.\,nz$.

Бок. пов. $cd=2\pi\,.\,kd.\ zk=2\pi\,.\,ot\,.\,zk=2\pi R\,.\,zk$.

Подобнымъ образомъ выразятся бок. поверх. de, eg, и слѣд.

поверхность $abcd... = 2\pi R\,.\,(an + nz + zk + ...) = 2\pi R\,.\,ag =$ $=$ окружности большаго круга, умноженной на ось вращенія.

Если въ полукругъ $mpqt...$ (чер. 523) впишемъ прав. полумногоуг. того же числа сторонъ, какъ $abc...$, и вообразимъ, что этотъ многоуг. будетъ обращаться около ag, то онъ опишетъ тѣло вращенія, котораго поверхность по предъидущему будетъ равна окружности такого круга, котораго радіусъ есть апоѳема многоугольника, умноженной на ось mf, т. е. на діаметръ круга $mpq...$ или на $2R$. Назвавъ эту поверхность S_1, апоѳему α, получимъ $S_1 = 2\pi\alpha\,.\,2R$; поверхность же S, образованная полупериметромъ описаннаго многоуг. $abc... = 2\pi R\,.\,ag$; поэтому $S - S_1 = 2\pi R.\ ag - 2\pi\alpha\,.\,2R =$ $= 2\pi R.\ 2oa - 2\pi\alpha.\ 2R = 4\pi R\,(oa - \alpha)$. Съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольника разность $R - \alpha$, какъ доказано въ § 315, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой, произвольно взятой, величины; но разность между oa и R также можетъ уменьшаться произвольно, слѣд. и разность между oa и α можетъ быть сдѣлана произвольно малою; а такъ какъ $4\pi R$ есть величина конечная, то произведеніе $4\pi R\,(oa - \alpha)$ или разность $S - S_1$ можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины; т. е. съ увеличеніемъ числа сторонъ обѣ поверхности, вписанная въ шаръ и описанная около него, сближаются между собою и стремятся къ общему предѣлу. Если мы примемъ, что поверхность шара больше вписанной поверхности и меньше описанной, то она и будетъ предѣломъ обѣихъ поверхностей, такъ какъ разность между каждой изъ этихъ поверхностей и поверхностью шара можетъ быть сдѣлана произвольно малою.

479. Такъ какъ (чер. 523) поверх. $abcd... = 2\pi R.\ ag$, а предѣломъ для ag служитъ діаметръ шара, то на основаніи способа предѣловъ заключаемъ, что *поверхность шара* $=$ *окружности большаго круга, умноженной на діаметръ* $= 2\pi R.\ 2R = 4\pi R^2 =$ *учетверенной площади большаго круга.*

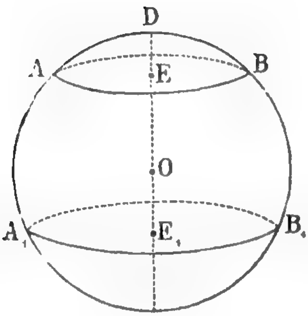
Слѣдствіе. *Поверхности шаровъ относятся между собою какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.*

480. Если пересѣчь шаръ плоскостью, то часть ADB (чер. 524) шара наз. *сферическимъ сегментомъ*. Проведемъ радіусъ, перпендикулярный къ плоскости круга AB; часть DE этого радіуса, заключенная между поверхностью шара и площадью круга AB, наз. *высотой* сегмента. Такъ какъ поверхность сегмента ADB есть предѣлъ поверхности конуса ab (чер. 523), то *поверхность сегмента* $=$ *окружности большаго круга, умноженной на высоту сегмента* $= 2\pi Rh$, гдѣ $h = DE$ (чер. 524).

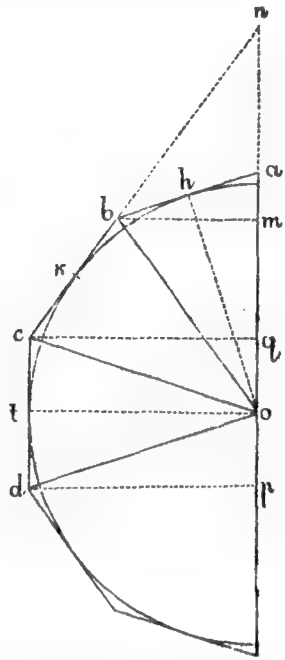
481. Часть AA_1B_1B (чер. 524) поверхности шара, заключающаяся между двумя кругами, плоскости которыхъ параллельны, наз. шаровымъ *поясомъ* или *зоною;* разстояніе EE_1 между кругами наз.

высотою пояса. Такъ какъ поверхность пояса есть предѣлъ поверхностей, образуемыхъ линіями bc, cd, de (чер. 523), то ***поверх. пояса = окружности большаго круга, умноженной на высоту пояса.***

Чер. 524.



Чер. 525.



482. Чтобъ вывести выраженіе объема шара, опредѣлимъ сперва объемъ тѣла, происходящаго отъ обращенія прав. полумногоугольника $abcd$... (чер. 525), описаннаго около полукруга.

Объемъ этого тѣла будетъ равенъ суммѣ объемовъ тѣлъ, описанныхъ треугольниками aob, boc, cod... Докажемъ, что объемъ каждаго изъ этихъ тѣлъ = его поверхности, умноженной на $1/3$ радіуса шара, образованнаго полукругомъ, около котораго описанъ полумногоуг. abc... Проведемъ изъ точекъ b и c перпендикуляры bm и cq къ оси ao; тогда объемъ тѣла aob будетъ = суммѣ объемовъ двухъ конусовъ abm и obm, имѣющихъ общее основаніе bm; слѣд. об. $aob = 1/3\ \pi .\ bm^2 .\ am + 1/3\ \pi .\ bm^2 .\ mo = 1/3 \pi .\ bm^2 .\ ao$.

Соединивъ точку h съ центромъ, получимъ треуг. $aho \backsim abm$, слѣд. $\frac{bm}{ab} = \frac{oh}{ao}$, или $bm .\ ao = ab .\ oh$; а потому об. $aob = 1/3\ \pi .\ bm^2 .\ ao = 1/3\ \pi .\ bm .\ bm .\ ao = 1/3\ \pi .\ bm .\ ab .\ oh$. Здѣсь $\pi .\ bm .\ ab$ выражаетъ боковую поверхность конуса, описаннаго линіей ab, а oh есть радіусъ шара, слѣд.

об. aob = пов. $ab \cdot {}^1/_3 R$.

Чтобъ опредѣлить объемъ, полученный отъ вращенія треуг. boc, продолжимъ cb до пересѣченія съ продолженіемъ oa въ точкѣ n; тогда

об. obc = об onc — об. onb = пов. $nc \cdot {}^1/_3 R$ — пов. $nb \cdot {}^1/_3 R$ = = (пов. nc — пов. nb) ${}^1/_3 R$ = пов. $bc \cdot {}^1/_3 R$.

Для опредѣленія объема тѣла, полученнаго отъ вращенія треуг. cod, проведемъ $cq \perp ao$ и $dp \perp ao$; тогда

об. cod = об. цил. $cdpq$ — об. кон. ocq — об. кон. odp; слѣд.

об. $cod = \pi \cdot ot^2 \cdot cd - {}^1/_3 \pi \cdot qc^2 \cdot oq - {}^1/_3 \pi \cdot pd^2 \cdot op$.

Но $ot = qc = dp$; $oq = ct = op$; слѣд.

об. $cod = \pi . ot^2 (cd - {}^1/_3 ct - {}^1/_3 ct) =$

$= \pi . ot^2 (cd - {}^1/_6 cd - {}^1/_6 cd) =$

$= \pi . ot^2 (cd - {}^1/_3 cd) = \pi . ot^2 . {}^2/_3 cd$.

Это послѣднее выраженіе можно представить въ такомъ видѣ. $2\pi \cdot ot \cdot ot \cdot {}^1/_3 cd = 2\pi \cdot ot \cdot cd \cdot {}^1/_3 ot = 2\pi \cdot ot \cdot cd \cdot {}^1/_3 R$.

Но $2\pi \cdot ot \cdot cd$ = бок. пов. цил. cd; слѣд. об. cod = пов. $cd \cdot {}^1/_3 R$.

Точно такъ же опредѣлятся и объемы прочихъ тѣлъ, и такимъ образомъ объемъ всего тѣла вращенія $abc\ldots$ = поверхности его, умноженной на ${}^1/_3$ радіуса шара, около котораго описано это тѣло.

483. Если бы мы вписали въ полукругъ (чер. 525) половину прав. мног. того же числа сторонъ, какъ $abc\ldots$, и заставили его вращаться около ao, то получили бы тѣло, вписанное въ шаръ, и объемъ этого тѣла по предъидущему равнялся бы его поверхности, умноженной на ${}^1/_3$ апоѳемы вписаннаго многоугольника.

Такъ какъ разность между поверхностями тѣлъ, описаннаго и вписаннаго, а также и разность между радіусомъ и апоѳемою прав. многоугольника, могутъ быть сдѣланы произвольно малыми, то слѣд. и разность между объемами этихъ тѣлъ, а тѣмъ болѣе между объемомъ шара и объемомъ каждаго изъ этихъ тѣлъ, можетъ быть сдѣлана произвольно малой, такъ что объемъ шара есть предѣлъ объемовъ обоихъ тѣлъ, и потому *объемъ шара = его поверхности, умноженной на ${}^1/_3$ радіуса* $= 4\pi R^2 . {}^1/_3 R = {}^4/_3 \pi R^3$, гдѣ R есть радіусъ шара.

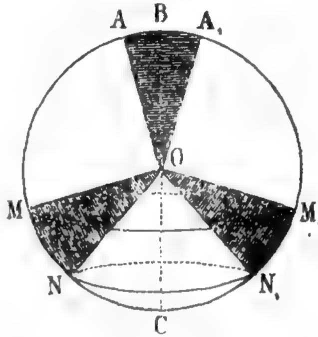
484. Выраженіе для объема шара можно вывести проще, именно слѣдующимъ образомъ.

Весьма малую часть поверхности шара можно принять за плоскость, и поверхность шара можно считать состоящею изъ множества весьма малыхъ плоскихъ фигуръ, напр. треугольниковъ; если соединить вершины этихъ треуг. съ центромъ шара и вообразить плоскости черезъ каждую изъ сторонъ тр—ковъ и радіусъ шара, то получимъ множество пирамидъ, сумма объемовъ которыхъ и будетъ равна объему шара. Всѣ эти пирамиды имѣютъ высоту, равную радіусу шара; поэтому мы опредѣлимъ сумму ихъ объемовъ, т. е. объемъ шара, если умножимъ сумму ихъ основаній, т. е. поверхность шара, на $^1/_3$ радіуса. Итакъ объемъ шара = его поверхности, умноженной на треть радіуса, $= 4\pi R^2 \cdot {}^1/_3 R = {}^4/_3\ \pi R^3$, гдѣ R есть радіусъ шара.

Слѣдствіе. *Объемы шаровъ относятся какъ кубы радіусовъ или діаметровъ.*

485. Часть AOA_1 (чер. 526) объема шара, происходящая отъ вращенія круговаго сектора AOB около діаметра BC, совпадающаго съ однимъ изъ радіусовъ сектора, наз. *сферическимъ секторомъ.*

Чер. 526.



Такъ же наз. и часть $MNOM_1N_1$ объема шара, происходящая отъ вращенія сектора MON около діаметра AC, лежащаго внѣ этого сектора.

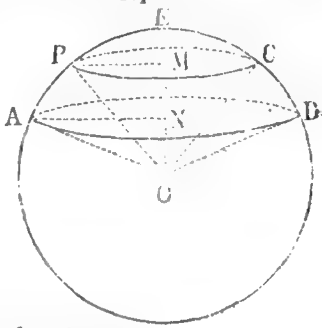
Соотвѣтствующая сектору AOB дуга AB описываетъ поверхность шароваго сегмента, а дуга MN—поверхность пояса MNN_1M_1.

Поверхность сегмента ABA_1 наз. *основаніемъ* сектора AOA_1; поверхн. пояса MNN_1M_1 будетъ основаніемъ сектора $MNOM_1N_1$.

Изъ сказаннаго при опредѣленіи объема шара слѣдуетъ что *объемъ сферическаго сектора = поверхности его основанія* (т. е. соотвѣтствующаго ему сегмента или пояса), *умноженной на $^1/_3$ радіуса*. Если высота основанія сектора $= h$, а радіусъ сектора $= R$, то объемъ сектора $= 2\pi Rh \cdot {}^1/_3\ R = {}^2/_3\pi R^2 h$.

486. Часть $APCD$ (чер. 527) объема шара, заключенная между двумя параллельными кругами, наз. шаровымъ *слоемъ*. Круги AD и PC наз. *основаніями слоя*, а разстояніе MN между ними наз. *высотой* слоя. Объемъ слоя $APCD =$ об. сект. $APODC +$ об. кон. POC — об. кон. AOD.

Чер. 527.



Об. кон. $POC = \pi PM^2 \cdot {}^1/_3\ OM$;
об. кон. $AOD = \pi AN^2 \cdot {}^1/_3\ ON$.
Полагая рад. шара $= R$, $OM = a$, $MN = h$ получимъ $PM^2 = R^2 - a^2$; $AN^2 = R^2 - (a-h)^2$; слѣд.

об. кон $POC = \pi(R^2 - a^2) \cdot {}^1/_3\ a$;

об. кон. $AOD = \pi[R^2 - (a-h)^2] \cdot {}^1/_3(a-h)$.

А такъ какъ об. сект. $APOCD = {}^2/_3\ \pi R^2 h$, то об. слоя $=$

$$= \frac{2\pi R^2 h + \pi(R^2 - a^2)a - \pi[R^2 - (a-h)^2]\ (a-h)}{3},$$

что, по сокращеніи, $= \pi h(R^2 - a^2 + ah) - {}^1/_3\pi h^3$.. .. (1). Этому выраженію можно дать другой видъ, введя вмѣсто R и a радіусы основаній слоя.

Пусть $PM=r$, $AN=r_1$; тогда

$R^2=r^2+a^2$ и $R^2=r_1^2+(a-h)^2$, слѣд.

$r^2+a^2=r_1^2+a^2+h^2-2ah$, откуда

$ah=\frac{r_1^2-r^2+h^2}{2}$. Подставивъ эту величину вмѣсто ah въ формулу (1), а вмѣсто R^2-a^2 подставивъ въ ту же формулу r^2, получимъ об. слоя $=\pi h\left(r^2+\frac{r_1^2-r^2+h^2}{2}\right)-{}^1/_3\,\pi h^3=$

$$=\pi h\left(\frac{r^2+r_1^2+h^2}{2}\right)-\frac{\pi h^3}{3}=\frac{\pi r^2+\pi r_1^2}{2}.\,h+\frac{\pi h^3}{6}=$$

$$=\frac{\pi r^2+\pi r_1^2}{2}.\,h+{}^4/_3\,\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3; \text{ т. е.}$$

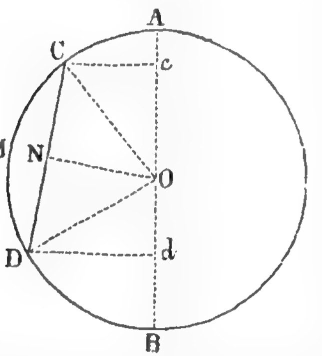
объемъ слоя = объему цилиндра, котораго основаніе есть ариѳметическое среднее основаній слоя, а высотой служитъ высота слоя, + объемъ шара, котораго діаметръ = высотѣ слоя.

487. Если въ предъидущемъ выраженіи объема слоя положимъ $r=0$, то получимъ объемъ сфер. сегмента $=\frac{\pi r_1^2h}{2}+{}^4/_3\,\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$; т. е.

объемъ сфер. сегм. = ${}^1/_2$ объема цилиндра, имѣющаго съ сегментомъ одинакое основаніе и одинакую высоту, + объемъ шара, имѣющаго діаметромъ высоту сегмента.

488. Опредѣлимъ еще объемъ части шара, происходящей отъ вращенія сегмента круга CMD (чер. 528) около діаметра AB, находящагося внѣ этого сегмента. Объемъ этого тѣла = об. сфер. сект., происходящаго отъ обращенія круговаго сектора COD около діам. AB, безъ об. тѣла, происходящаго отъ вращенія треуг. COD около тогоже діаметра.

Чер. 528.



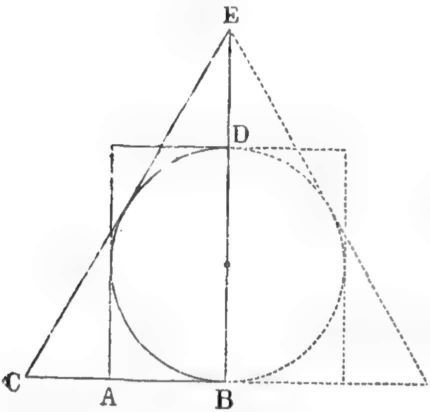
Об. сфер. сект. = пов. пояса CD, умноженной на треть радіуса $=$ $={}^2/_3\pi R^2.cd$; об. тѣла, образованнаго треуг. COD, какъ доказано въ §482-мъ, = поверхн. $CD.\,{}^1/_3 ON$, гдѣ $ON\perp$ хордѣ CD. Поверхность же $CD=2\pi.ON.\,cd$; слѣд. об. $CMD=$ $={}^2/_3\pi(R^2-ON^2)\,cd$.

Но изъ прямоуг. треуг. ONC имѣемъ $OC^2-ON^2=CN^2$, или $R^2-ON^2=$ $=CN^2=({}^1/_2 CD)^2={}^1/_4\,CD^2$; слѣд.

об. $CMD={}^1/_6\,\pi CD^2.\,cd$; т. е. *объемъ тѣла, получаемаго отъ вращенія круговаго сегмента около діаметра, находящагося внѣ этого сегмента, равенъ ${}^1/_6$ объема цилиндра, который радіусомъ основанія имѣетъ хорду круговаго сегмента, а высотой — линію* cd, *т. е. разстояніе между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ конечныхъ точекъ хорды на ось вращенія.*

489. Возьмемъ полукругъ (чер. 529) и опишемъ около него половину квадрата и половину прав. треуг.; если эту фигуру обернемъ около оси BE, то получимъ шаръ, около котораго описанъ равносторонній цилиндръ и равносторонній конусъ. Опредѣлимъ поверхности и объемы этихъ тѣлъ, полагая радіусъ круга $=r$.

Чер. 529.



Пов. шара $=4\pi r^2$; бок. пов цил. $=2\pi.AB.BD=$ $=2\pi r.2r=4\pi r^2=$ пов. шара.

Вся пов. цил. $=$ бок. пов. $+$ 2 площ. основ. $=4\pi r^2+$ $+2\pi r^2=6\pi r^2$.

Бок. пов. кон. $=$ $=2\pi.BC.{}^1/_2CE=2\pi BC^2$; такъ какъ сторона прав. опис. треуг. $=2r\sqrt{3}$, то $BC=r\sqrt{3}$, и бок. пов. кон. $=2\pi r^2.3=$ $=6\pi r^2=$ всей пов. цилиндра.

Вся поверхн. конуса $=$ $=$ бок. пов. $+$ площ. основ. $=$ $=6\pi r^2+\pi(r\sqrt{3})^2=9\pi r^2$.

Об. шара $={}^4/_3\pi r^3$; об. цил. $=\pi.AB^2.BD=2\pi r^3$;

об. кон. $=\pi BC^2.{}^1/_3\,BE=\pi(r\sqrt{3})^2\,.\,{}^1/_3BE=\pi r^2.\,BE$.

Но $BE=\sqrt{CE^2-CB^2}=\sqrt{(2r\sqrt{3})^2-(r\sqrt{3})^2}=\sqrt{12r^2-3r^2}=$ $=\sqrt{9r^2}=3r$; слѣд. об. кон. $=3\pi r^3$.

Взявъ отношеніе пов. шара къ пов. цил. и пов. цил. къ пов. кон., а также отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ, найдемъ, что

$$\frac{\text{пов. шара}}{\text{пов. цил.}}=\frac{2}{3};\quad \frac{\text{пов. цил.}}{\text{пов. кон.}}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{\text{об. шара}}{\text{об. цил.}}=\frac{2}{3};\quad \frac{\text{об. цил.}}{\text{об. кон.}}=\frac{2}{3};$$

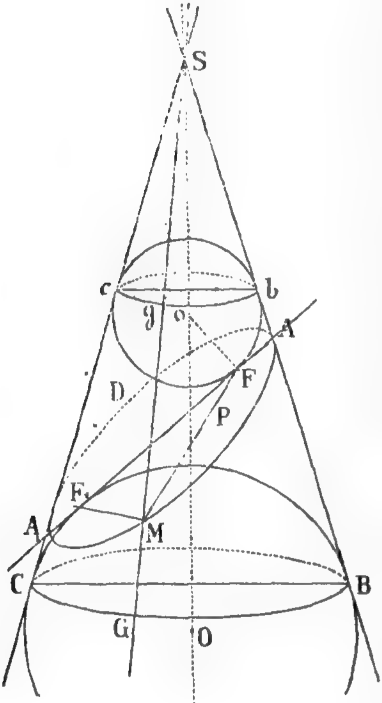
$$\text{слѣд.}\quad \frac{\text{пов. шара}}{\text{пов. цил.}}=\frac{\text{пов. цил.}}{\text{пов. кон.}}\quad\text{и}\quad \frac{\text{об. шара}}{\text{об. цил.}}=\frac{\text{об. цил.}}{\text{об. кон.}}$$

Итакъ *поверхность и объемъ цилиндра суть средніе пропорціональныя между поверхностями и объемами шара и конуса.*

490. Коническія сѣченія. Мы видѣли уже, что сѣченіе конуса плоскостью, параллельной основанію, есть кругъ; а сѣченіе плоскостью, проходящей черезъ вершину, есть равнобедренный треуг. Разсмотримъ теперь сѣченія конуса плоскостями въ другихъ направленіяхъ.

491. Эллипсисъ. Пересѣчемъ (чер. 530) конусъ плоскостью P, наклонной къ его оси, но не параллельной образующей SC; тогда въ сѣченіи получимъ нѣкоторую кривую AMA_1D. Чтобъ разсмотрѣть свойства этой кривой, пересѣчемъ конусъ плоскостью, проходящей черезъ ось SO и $\perp$ къ плос. P; пусть BSC представляетъ сѣченіе этой плоскости съ конической поверхностью, а AA_1 сѣченіе ея съ плос. P. Построимъ по обѣимъ сторонамъ линіи AA_1 окружности O и o, касательныя какъ къ этой линіи въ точкахъ F_1 и F, такъ и къ образующимъ SB и SC соотвѣтственно въ точкахъ B, C и b, c. Если будемъ вращать плоскость BSC около оси SO, то окружности O и o опишутъ шаровыя поверхности. Эти шаровыя поверхности будутъ касаться къ поверхности конуса по параллельнымъ кругамъ BC и bc и къ плоскости P въ точкахъ F и F_1. Дѣйствительно, напр. радіусъ $oF \perp$ къ линіи AA_1, представляющей сѣченіе плоскостей P и BSC, ибо AA_1 касается круга bFc; сверхъ того радіусъ oF находится въ плоскости BSC, которая $\perp P$; поэтому $oF \perp P$, и слѣд. P касается шара o.

Чер. 530.



Возьмемъ теперь на линіи сѣченія плоскости P съ конусомъ произвольную точку M и проведемъ изъ нея прямыя MF и MF_1 и образующую SM, которая пересѣчетъ окружности bc и BC въ точкахъ g и G. Прямая MF будетъ касаться шара o, ибо она находится въ плоскости P, касательной къ шару, и притомъ проходитъ черезъ точку F, въ которой эта плоскость касается шара. Образующая Mg также будетъ касательной къ шару o, ибо имѣетъ съ нимъ только одну общую точку g. Такъ какъ касательныя Mg и MF къ шару o проведены изъ одной точки M, то $MF = Mg$. По той же причинѣ $MF_1 = MG$, слѣд.

$MF + MF_1 = Mg + MG = gG$. Но $gG = bB = cC = \ldots\ldots$, какъ образующія усѣченнаго конуса $cCbB$; слѣд. $MF + MF_1 = gG = bB = cC = \ldots$; т. е. $MF + MF_1$ есть величина *постоянная*.

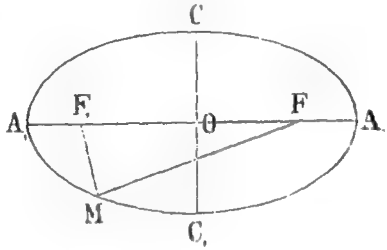
Итакъ кривая AMA_1, представляющая сѣченіе конуса плоскостью P, имѣетъ то свойство, что сумма разстояній каждой ея точки отъ двухъ точекъ F и F_1, лежащихъ внутри ея, есть величина постоянная. Легко доказать, что эта постоянная величина $bB = cC$ равна линіи AA_1. Дѣйствительно, $bB = bA + AB = AF + AF_1$; $cC = cA_1 + CA_1 = A_1F + A_1F_1$; слѣд. $AF + AF_1 = A_1F + A_1F_1$, или

$AF+AF+FF_1=A_1F_1+FF_1+A_1F_1; 2AF+FF_1=2A_1F_1+FF_1$, откуда $AF=A_1F_1$, и потому $bB=AF+AF_1=AF+FF_1+A_1F_1=$ $=AA_1$; слѣд. $MF+MF_1=AA_1$.

Кривая AMA_1 наз. *эллипсисомъ*; точки F и F_1 наз. его *фокусами*; а разстоянія MF и MF_1 каждой точки эллипсиса отъ фокусовъ наз. *радіусами векторами*; прямая AA_1 наз. *большой осью*. Такимъ образомъ выведенное выше свойство эллипсиса можно выразить такъ: *сумма радіусовъ векторовъ эллипсиса = большой оси его*.

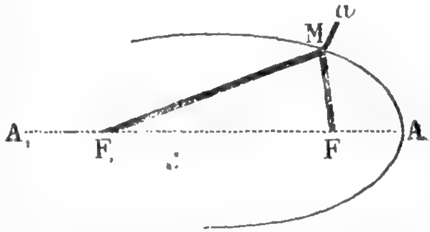
Средина O (чер. 531) большой оси эллипсиса наз. его *центромъ*; прямая CC_1, проходящая черезъ центръ и перпендикулярная къ большой оси, наз. *малою осью*. Дробь, выражающая отношеніе прямой FF_1 къ прямой AA_1, или (что тоже) отношеніе прямой OF къ OA, наз *эксцентрицитетомъ*. Съ уменьшеніемъ эксцентрицитета точки F и F_1 сближаются между собой, и если эксцентрицитетъ равенъ нулю, то F и F_1 сольются съ O — и эллипсисъ обратится въ кругъ.

Чер. 531.



Чтобъ начертить эллипсисъ по даннымъ его фокусамъ F и F_1 (чер. 532) и большой оси AA_1, берутъ нитку, которой длина $=AA_1$, и укрѣпляютъ концы ея въ F и F_1; потомъ, натянувъ нитку карандашемъ a, ведутъ его по бумагѣ; тогда и получится эллипсисъ. Дѣйствительно, для каждой точки M, намѣченной карандашемъ, мы будемъ имѣть $MF+MF_1=$ $=AA_1$.

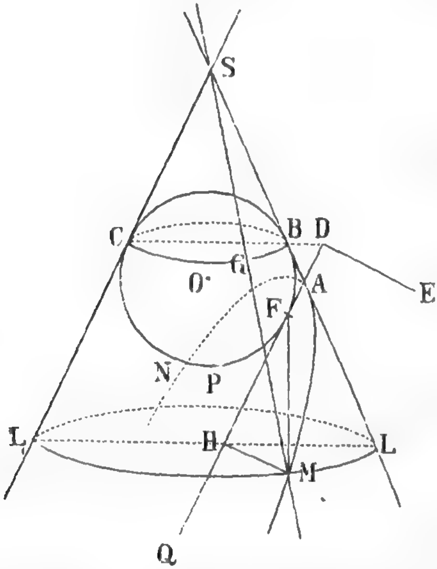
Чер. 532.



492. Парабола. Пересѣчемъ конусъ (чер. 533) плоскостью $P \parallel$ образующей SC. Эта плоскость не пересѣчетъ SC, а также не пересѣчетъ и верхнихъ частей образующихъ, такъ что кривая сѣченія MAN представитъ одну безконечную вѣтвь. Чтобы изслѣдовать свойства этой кривой, проведемъ черезъ ось конуса плоскость $BSC \perp$ плос. P — пусть прямая AQ будетъ сѣченіемъ этихъ плоскостей; потомъ построимъ кругъ O, касательный къ AQ и къ образующимъ BS и CS: пусть F, B, C будутъ точки касанія. При вращеніи чертежа около оси конуса, кругъ O опишетъ шаръ, касательный къ конической поверхности по кругу CB и къ плоскости P въ точкѣ F. Возьмемъ на кривой сѣченія MAN произвольную точку M и соединимъ ее съ точкой F и съ вершиной S конуса: тогда, подобно предъидущему случаю, получимъ двѣ касательныя MF и MG къ шару O, проведенныя изъ одной точки M; слѣд. $MF=MG$.

Проведемъ теперь черезъ точку M плоскость $\perp$ оси конуса; она пересѣчетъ конусъ по кругу LL_1, плоскость котораго $\parallel$ плос. круга BC; такъ какъ $MG=BL$, то и $MF=BL$. Продолжимъ плоскость BC и плоск. P; пусть прямая DE будетъ ихъ сѣченіемъ. Такъ какъ обѣ плоск. BC и P перпендикулярны къ плос. BSC, то и сѣченіе ихъ DE также $\perp$ плос. BSC. Притомъ прямая CB, лежащая въ плос. BSC, пересѣкаетъ SC, слѣд. CB пересѣчетъ также и AQ, которая $\parallel SC$ и находится въ плос. BSC; а такъ какъ линія CB находится въ плос. BC, а линія AQ въ плос. P, то точка D, въ которой пересѣкаются эти линіи, должна находиться на прямой, представляющей сѣченіе плос. BC съ плос. P.

Чер. 533.



Такимъ образомъ видимъ, что линія DE, представляющая сѣченіе плос. BC съ плос. P, будетъ $\perp$ плос. BSC и пройдетъ черезъ точку D, въ которой пересѣкаются прямыя CB и AQ; а потому $DE\perp AQ$, ибо эта послѣдняя линія лежитъ въ плос. BSC и проходитъ черезъ основаніе D перпендикуляра DE къ этой плоскости.

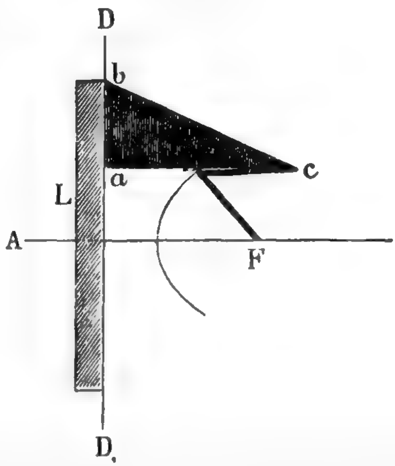
Опустивъ изъ M перпендикуляръ MH на AQ и соединивъ H съ L, получимъ треуг. $AHL \infty ABD$, такъ какъ каждый изъ этихъ равнобедр. тр—ковъ подобенъ равноб. треуг. SLL_1. Изъ этого подобія слѣдуетъ, что

$$\frac{AL}{AB}=\frac{AH}{AD} \text{ или } \frac{AL+AB}{AB}=\frac{AH+AD}{AD}, \text{или } \frac{BL}{AB}=\frac{HD}{AD}.$$

Но $AB=AD$, слѣд. $BL=HD$ и потому $MF=HD$, гдѣ HD есть разстояніе точки M отъ прямой DE. Итакъ полученная кривая сѣченія MAN имѣетъ то свойство, что каждая точка ея находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ нѣкоторой точки F, находящейся внутри этой кривой, и отъ нѣкоторой прямой линіи DE, находящейся внѣ кривой. Такая кривая линія наз. *параболой*; точка F наз. *фокусомъ* параболы; а прямая DE—ея *директрисой*. Такимъ образомъ *парабола есть такая кривая линія, каждая точка которой равно отстоитъ отъ фокуса и директрисы.*

Для черченія параболы по ея фокусу F (чер. 534) и директрисѣ DD_1, берутъ линейку L и совмѣщаютъ ея ребро съ директриссой DD_1; потомъ прикладываютъ къ линейкѣ чертежный наугольникъ меньшимъ его катетомъ ab; въ конечной точкѣ c другаго катета прикрѣпляютъ одинъ конецъ нитки, длина которой = этому катету; другой же конецъ нитки укрѣпляютъ въ фокусѣ F. Если потомъ надѣть нитку на карандашъ и держать его такъ, чтобы онъ прилегалъ къ ac, двигая вмѣстѣ съ тѣмъ наугольникъ по линейкѣ, то карандашъ и опишетъ параболу. Дѣйствительно, для каждой точки M, намѣченной карандашемъ, мы будемъ имѣть $cM + MF = ca = cM + Ma$, и слѣд. $MF = Ma$.

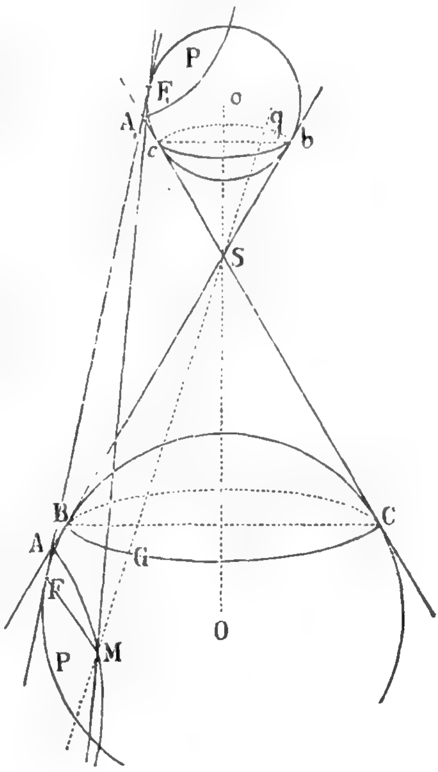
Чер. 534.



Если помѣстить наугольникъ внизъ отъ прямой AF, то можно начертить часть параболы, расположенную по другую сторону линіи AF.

493. Гипербола. Пересѣчемъ конусъ (чер. 535) плоскостью P такъ, чтобы она пересѣкала обѣ его полости (для этого плоскость P должна занимать среднее положеніе между плоскостью, параллельной образующей, и плоскостью, проходящей черезъ ось); тогда кривая сѣченія будетъ состоять изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей. Какъ и въ предъидущихъ случаяхъ, вообразимъ черезъ ось Oo плоскость $BSbcSC \perp$ плос. P, и пусть линія пересѣченія этой плос. съ P будетъ AA_1; потомъ построимъ окружности O и o, касательныя въ точкахъ F и F_1 къ линіи AA_1, а также къ нижней и и верхней частямъ образующихъ Bb и Cc.

Чер. 535.



Соединивъ произвольную точку M кривой сѣченія съ точками F и F_1 и проведя черезъ M образующую Gg, по предъидущему будемъ имѣть

$MF_1 = Mg$, $MF = MG$, слѣдоват. $MF_1 - MF = Mg - MG = Gg = Bb = Cc$.

Итакъ полученная кривая такова, что разность разстояній каждой точки ея отъ двухъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная. Чтобы опредѣлить постоянную величину $Bb = Cc$, замѣчаемъ, что

$Bb = Ab - AB = AF_1 - AF = FF_1 - 2\ AF$;

$Cc = A_1C - A_1c = A_1F - A_1F_1 = FF_1 - 2A_1F_1$; слѣд.

$AF = A_1F_1$, и потому

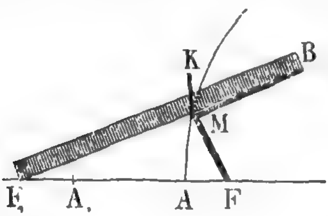
$Bb = FF_1 - 2AF = FF_1 - AF - A_1F_1 = AA_1$; слѣд.

$$MF_1 - MF = AA_1.$$

Кривая сѣченія наз. *гиперболой*, точки F и F_1—ея *фокусами*; линія AA_1—большой осью; линіи MF и MF_1, соединяющія какую либо точку гиперболы съ фокусами, наз. *радіусами векторами*. Такимъ образомъ *въ гиперболѣ разность радіусовъ векторовъ=большой оси.*

Чтобы начертить гиперболу по ея фокусамъ F и F_1 (чер. 536) и большой оси AA_1, возьмемъ линейку и укрѣпимъ одинъ конецъ ея въ фокусѣ F_1, такъ чтобы она могла вращаться около этой точки; потомъ возьмемъ нитку, которой длина=разности между длиной линейки и большой осью AA_1; одинъ конецъ нитки укрѣпимъ въ F, а другой въ концѣ линейки B. Надѣвъ нитку на карандашъ, такъ чтобы она была натянута, и вращая линейку около F_1, такъ чтобы карандашъ постоянно прикасался къ линейкѣ, мы опишемъ вѣтвь гиперболы, ибо для каждой точки M, намѣченной карандашемъ, будемъ имѣть $MF_1 - MF = (MF_1 + MB) - (MF + MB) = AA_1$.

чер. 536.



494. Задачи. 1. Въ цилиндръ, котораго высота h, а рад. основ. r, вписана прав. 4—уголь. призма; опредѣлить площ. ея боковой грани?

2. Опредѣлить площ. бок. грани прав. треуг. пирамиды, основаніе которой вписано въ нижнее основ. цилиндра, а вершина лежитъ на верхнемъ основ., если рад. цил.$=r$, а высота$=h$?

3. Опредѣлить отношеніе высоты цилиндра къ рад. его основ., если площ. сѣченія, проходящаго черезъ ось,=суммѣ площ. основ?

4. Два цилиндра одной высоты пересѣкаются по прямоугольнику, причемъ основанія ихъ лежатъ въ одной плоскости; разстояніе между центрами основаній цилиндровъ $= c = 15$; рад. основаній суть $R = 44$ и $r = 37$; высота $h = 25$. Опредѣлить площ. сѣченія?

5. Цилиндръ пересѣченъ плос. || оси; діагональ сѣченія$=d=17$; площ. сѣченія$=s=120$; разстояніе плос. сѣченія отъ оси$=c=3$. Опредѣлить высоту h и рад. r основанія?

6. Площ. сѣченія, проходящаго черезъ ось цилиндра,$=s$. Опредѣлить площ. сѣченія, параллельнаго первому и дѣлящаго пополамъ перпендикулярный къ сѣченіямъ радіусъ основанія?

7. Радіусы основ усѣч кон. суть 14 и 2; высота конуса$=18$: въ какомъ разстояніи отъ большаго основ. надо пересѣчь кон. плоскостью || основ., чтобы площ. сѣченія была сред. арно. между площадями основаній?

8. Опредѣлить площ. бок. грани прав. четыреуг. пирамиды, вписанной въ конусъ, рад. основ. котораго $=r$, а высота $=h$?

9. Въ усѣч. конусѣ, рад. основаній котораго суть R и r, построены два полныхъ конуса такъ, что основаніе каждаго совпадаетъ съ однимъ изъ основаній усѣч. конуса, а вершина находится въ центрѣ другаго основ. усѣч. конуса. Опредѣлить радіусъ окружности, по которой пересѣкаются полные конусы?

10. Въ прав. усѣч. 4—угольн. пирам. вписанъ усѣч. кон. такъ, что его большее основ. вписано въ большее основ. пирамиды, а меньшее основ. вписано въ меньшее основ. пирамиды. Опредѣлить образующую конуса, если боковое ребро пирам. $=l$, а стороны основаній ея суть a и b?

11. Радіусы двухъ малыхъ круговъ шара суть 7 и 15; отношеніе ихъ разстояній отъ центра шара $={}^6/_5$. Опредѣлить рад. шара?

12. Полушаріе и конусъ имѣютъ общее основаніе; высота конуса вдвое больше рад. основанія. Опредѣлить радіусъ круга пересѣченія конуса съ полушаріемъ и разстояніе этого круга отъ основанія, если радіусъ шара $=1$?

13. Полушаріе и конусъ имѣютъ общее основ., котораго радіусъ $=r$; высота конуса втрое больше высоты полушарія. Въ какомъ разстояніи отъ основанія надо провести плоскость, ему параллельную, чтобы отношеніе круга сѣченія ея съ шаромъ къ кругу сѣченія съ конусомъ равнялось m? Рѣшить зад. при $m=1$?

Примѣч. Въ задачахъ 14—19 включительно означены:
s_1 боковая, s полная поверх. *цилиндра*, r рад. основ., h высота.

14. $r=22{,}6$; $h=15{,}4$; $\pi={}^{22}/_7$; найти s_1?

15. $s_1=5882{,}9$; $r=23{,}46$; $\pi=3{,}141$; найти h?

16. $s_1=60{,}222$; $h=4{,}89$; $\pi=3{,}141$; найти r?

17. $h=r=11{,}3$; $\pi={}^{355}/_{113}$; найти s_1?

18. $s=340{,}608$; $r=3{,}9$; $\pi=3{,}1415$; найти h?

19. Даны s и h; найти r?

20. Опредѣлить бок. поверхн. цилинд., описаннаго около куба, котораго ребро $=a$?

21. Опредѣлить бок. поверхн. цил., вписаннаго въ кубъ, котораго ребро $=a$?

22. На сколько надо увеличить высоту цилиндра, чтобы его бок. поверхн. стала равна прежней полной поверхности?

23. Въ цилиндрѣ, котораго бок. поверхн. $=s$, а діагональ сѣченія, проходящаго черезъ ось, равна d, построена прав. 8—угол. пирамида, вершина которой въ центрѣ одного изъ основаній цилиндра, а основаніе вписано въ другое основаніе цилиндра. Опредѣлить сторону основанія пирамиды? Разсмотрѣть случай, когда бок. пов. цил. $s=$ площ. круга, котораго діаметръ $=d$?

24. Опредѣлить полную поверхн. цилиндрической трубки, которой внѣшній рад. $=R=3$, высота $=2R=6$; отношеніе боковыхъ поверхн. внутренней и внѣшней $=m:n={}^2/_3$; $\pi={}^{22}/_7$?

25. Три цилиндра, которыхъ оси составляютъ одну прямую линію, поставлены такъ, что нижнее основаніе каждаго слѣдующаго цилиндра лежитъ въ плоскости верхняго основ. предшествующаго цилиндра.

Опредѣлить полн. поверхн. полученнаго такимъ образомъ тѣла, если высота каждаго слѣдующаго цилиндра вдвое болѣе, а рад. основ. вдвое менѣе высоты и радіуса предшествующаго цилиндра, и если сѣченіе перваго цилиндра плоскостью по оси есть квадратъ, котораго площ.$=m$? $\pi={}^{22}/_7$.

26. Цилиндръ, котораго высота$=h$, а рад. основ.$=r$, разсѣченъ плоскостью || оси въ разстояніи отъ нея $^1/_2$ радіуса; опредѣлить полныя поверхн. обѣихъ частей?

27. Цилиндръ, котораго высота$=h$, а рад. основ.$=r$, разсѣченъ двумя плоскостями, проходящими черезъ ось и составляющими уг. 36°. Опредѣлить полную поверхн. части между этими плоскостями?

Примѣч. Въ зад. 28—33 включительно означены s_1 боковая, s—полная поверхн. *конуса*, h—высота его, l—образующая, r—рад. основанія.

28. $r=7^1/_{16}$; $l=14^{30}/_{71}$; $\pi={}^{355}/_{113}$; найти s_1?

29. $r=0{,}33$; $h=9{,}64$; $\pi=3{,}1416$; найти s_1?

30. $l=118$; $h=112$; $\pi={}^{355}/_{113}$; найти s_1?

31. $s=1{,}32$; $l-2r=b=0{,}5$; $\pi={}^{22}/_7$; найти l и r?

32. Найти s_1, если сѣченіе по оси есть прямоуг. треуг., а окружность основ.$=c$?

33. Найти s, если сѣченіе по оси есть равносторон. треуг., а высота конуса$=h$?

34. Опредѣлить отношеніе бок. поверхн. и площ. основанія конуса, если сѣченіе по оси есть равносторон. треуг.?

35. Около шара, котораго діаметръ$=d$, описанъ конусъ, котораго высота$=h$. Опредѣлить полную пов. этого конуса?

36. На основаніяхъ цилиндра, котораго рад. r, а высота h, построены конусы, которыхъ высоты равны r. Опредѣлить полную поверхн. образовавшагося тѣла?

37. Рад. основ. кон.$=r$; полная поверхн. кон.$=$бок. пов. цил., имѣющаго высоту вдвое меньше высоты конуса, а основаніе вчетверо больше основ. конуса. Опредѣлить высоту конуса?

38. Высота конуса$=h$, рад. основ.$=r$. Въ какомъ разстояніи отъ вершины надо пересѣчь конусъ плоскостью || основанію, чтобы боков. поверхн. отсѣченной части была на m меньше бок. поверхн. образовавшагося усѣч. конуса?

39. Въ усѣч. конусѣ діаметръ верхняго основ.$=$образующей; периметръ сѣченія по оси$=u$, высота$=h$; опредѣлить боков. поверхн.?

40. Бок. поверхн. усѣч. кон.$=m$; площ. основ. суть a и b; найти высоту?

41. Около цилиндра рад. r описанъ усѣч. конусъ, котораго верхнее основаніе совпадаетъ съ верхн. основ. цилин., а нижнее есть кругъ, концентрическій съ ниж основ. цилин.; высота цил.$=h$; отношеніе нижн. основ. кон. къ основ. цил.$=m:n$. Опредѣлить 1) полную пов. конуса и 2) полную пов. тѣла, ограниченнаго цилиндрическою пов., конич. поверхностью и концентрическимъ кольцомъ нижняго основ. конуса?

42. Усѣч. конусъ, котораго высота h, а рад. основаній R и r, пересѣченъ плоскостью || основаніемъ, и площ. сѣченія есть ариө-

среднее площадей оснований. Опредѣлить бок. поверхности обоихъ усѣч. конусовъ, на которые раздѣлился данный конусъ?

43. Опредѣлить бок. пов. усѣч. кон., котораго окруж. основаній равны 25 и 17, а образующ.$=12$?

44. Опредѣлить бок. пов. усѣч. конуса, если его образующая вдвое больше высоты, а площ. сѣченія по оси$=m$?

45. Опредѣлить пов. тѣла, происходящаго отъ вращенія квадрата, котораго сторона$=a$, около діагонали?

46. Опредѣлить пов. тѣла, образованнаго вращеніемъ квадрата, котораго сторона$=a$, около линіи $\|$ діагонали и проходящей черезъ одну изъ вершинъ квадр.?

Опредѣлить поверхность шара, если

47. радіусъ$=12,995$; $\pi={}^{355}/_{113}$?

48. окружность малаго круга, отстоящаго отъ центра шара на d, равна p?

49. Опредѣлить рад. шара, поверхн. котораго$=$суммѣ поверхностей шаровъ, которыхъ рад. 336;252; 21 и 20?

Ребро куба$=a$; опредѣлить поверхн. шара,

50. вписаннаго въ кубъ? 51. описаннаго около куба?

52. Опредѣлить отношеніе поверхностей трехъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кубъ, другой проходитъ черезъ средины реберъ куба, третій черезъ вершины куба?

53. Опредѣлить поверхн. шара, вписаннаго въ конусъ, рад. основ. котораго$=r$, а высота$=h$?

54. На основаніяхъ цилиндра построены полушарія; опредѣлить поверхн. образовавшагося тѣла, если периметръ сѣченія, проходящаго черезъ ось цилиндра,$=u$; а діагональ этого сѣченія$=d$?

55. Высота конуса$=$діаметру шара$=2r$, а полн. пов. конуса$=$пов. шара. Опредѣлить: 1) отношеніе рад. основ. конуса къ r и 2) отнош. бок. пов. кон. къ площ. его основ.?

56. Опредѣлить поверх. тѣла, происходящаго отъ вращенія прав. шестиуг. около бо́льшаго діаметра, если пов. впис. шара $=11$, а $\pi={}^{22}/_{7}$?

57. Опредѣлить отнош. пов. двухъ тѣлъ, происходящихъ отъ вращенія прав. 8—ка около бо́льшаго и меньшаго діаметра?

58. Опредѣлить кривую поверхн. шароваго сегмента, если высота его$=2$, а разстояніе основанія отъ центра шара$=23,877$; $\pi={}^{355}/_{113}$?

59. Опредѣлить поверхн. сегмента, котораго высота$=4$, если пов. шара$=616$, а $\pi={}^{22}/_{7}$?

60. Свѣтящая точка находится въ разстояніи a отъ поверхн. шара рад. r; опредѣлить освѣщенную часть пов. шара?

61. Въ какомъ разстояніи отъ центра шара надо помѣстить свѣтящую точку, чтобы ${}^{1}/_{3}$ его поверхности была освѣщена?

62. Радіусы двухъ шаровъ суть r и R; разстояніе центровъ$=a$; свѣтящая точка помѣщена на линіи центровъ такъ, что конусъ тѣни, отбрасываемой первымъ шаромъ, касается поверхн. втораго. Опредѣлить разстояніе свѣтящей точки отъ центра перваго шара и освѣщенную часть его поверхности?

63. Опредѣлить поверхн. зоны, которой рад. r_1 и r_2, а рад. шара R?

64. Въ цилиндрѣ, котораго рад. основ. $= r = \sqrt{22}$, а высота въ $1^1/_2$ раза больше этого рад., вырѣзаны два конуса, имѣющіе основаніями основанія цилиндра, а вершины въ срединѣ оси цилиндра. Опредѣлить радіусъ шара, котораго поверх. = поверх. образовавшагося такимъ способомъ тѣла?

65. Отношеніе кривой поверх. шароваго сегмента къ бок. пов. конуса, котораго основаніемъ служитъ основаніе сегмента, а высотой высота сегмента, равно n; опредѣлить отнош. высоты сегмента къ діаметру шара?

66. Образующая усѣч. конуса $= l = 37$, высота $h = 12$, бок. поверх. = суммѣ площадей основаній; опредѣлить радіусъ шара, для котораго основанія конуса служатъ малыми кругами?

67. Опредѣлить объемъ цилиндра, котораго высота $= 42,7$; рад. основ. $= 2$; $\pi = ^{22}/_7$?

68. Опредѣлить объемъ цилиндра, котораго высота $= 7,1$; окружн. основ. $= 10$; $\pi = ^{355}/_{113}$?

69. Объемъ цилин $= 17^{29}/_{63}$; высота относится къ діаметру основ. какъ $3:5$; $\pi = ^{22}/_7$. Опредѣлить высоту и радіусъ?

70. Отъ уменьшенія высоты цилиндра на a объемъ его уменьшается на A; отъ уменьшенія же рад. основ. цилиндра на b объемъ уменьшается на B. Опредѣлить объемъ цилиндра, если $a = 11,3$; $b = 1$; $A = 35,5$; $B = 192$; $\pi = ^{355}/_{113}$?

71. Рад. основ. цилиндра $= r = 6$, а высота $= h = 5$. На какую величину x надо уменьшить радіусъ и высоту цилиндра, чтобы объемъ его въ обоихъ случаяхъ измѣнился одинаково?

72. Если уменьшить высоту цилиндра и увеличить радіусъ основанія на одну и туже величину x, или обратно уменьшить рад. и увеличить высоту на величину x, то въ обоихъ случаяхъ объемъ цилиндра не измѣнится. Опредѣлить отношеніе радіуса къ высотѣ и величину x?

73. Длина цилиндрической трубы $= 113$, внѣшній рад. $= 12$, внутренній $= 8$. $\pi = ^{355}/_{113}$; опредѣлить объемъ стѣнокъ трубы?

74. Опредѣлить толщину стѣнки цилиндрической трубы, если объемъ стѣнки $= 176$; наружный радіусъ $= 5$; длина трубы $= 3,5$; $\pi = ^{22}/_7$?

75. Объемъ цилиндра $= v = 37,68$; бок. поверх. $= s = 37,68$; $\pi = 3,14$; опредѣлить высоту h цилиндра и рад. r основ.?

76. Объемъ цил. $= 64\pi$; высота его = рад. основ.; опредѣлить полную поверх.?

77. Боков. поверх. цил. $= 1000$, а полная пов. $= 1006,28$; $\pi = 3,14$; опредѣлить объемъ?

78. При какомъ радіусѣ основанія бок. поверхность цилиндра и объемъ его могутъ имѣть одинаковую числовую величину?

79. Два цилиндра одинакой высоты имѣютъ объемы $v = 0,75$ и $v_1 = 0,48$; опредѣлить объемъ цилиндра такой же высоты, боковая поверхность котораго = суммѣ бок. поверхн. двухъ первыхъ цилиндровъ?

80. Цилиндръ вписанъ въ шаръ, котораго рад. $= 13$; поверх. шара

относится къ бок. пов. цил. какъ 169 : 60; π=3,1415; опредѣлить объемъ цил.?

81. Опредѣлить объемъ цил., вписаннаго въ прямую треуг. призму, которой объемъ k, а стороны основанія a, b, c?

82. Въ основаніи цилиндра, котораго высота h, а радіусъ r, проведена хорда = радіусу; черезъ хорду проведена плоскость $\perp$ основанію цилиндра; опредѣлить объемы частей, на которыя раздѣлился цилиндръ?

83. Опредѣлить объемъ конуса, котораго высота=9, рад. основ. =5, π=3,14?

84. Объемъ конуса=1065; высота = 113; $\pi={}^{355}/_{113}$; опредѣлить рад. основ.?

85. Объемъ конуса=8,52; рад. основ.=0,6; $\pi={}^{355}/_{113}$; опредѣлить высоту?

86. Образующая конуса=37; рад. основ.=35; $\pi={}^{22}/_{7}$; опредѣлить объемъ?

87. Бок. пов. кон.=4070; высота=12; $\pi={}^{22}/_{7}$; опредѣ[redacted]ъ объемъ?

88. Бок. пов. кон.=677,6 и будучи развернута въ плоскость, даетъ секторъ въ 36°, опредѣлить объемъ конуса? $\pi={}^{22}/_{7}$.

89. Полная пов. кон.=s; рад. осн.=r; найти объемъ?

90. Опредѣлить объемъ равносторонняго конуса, рад. основ. котораго=r?

91. Опредѣлить об. кон. по площ. n основанія и площ. m сѣченія по осн?

92. Опредѣлить объемъ и бок. пов. кон., если образующая=l, а разность между высотой h и радіусомъ r равна d?

93. По объему v конуса и суммѣ m высоты h и образующей l опредѣлить рад. r основанія, l и h?

94. Опредѣлить отношеніе боковыхъ поверхн. и объемовъ конусовъ, происходящихъ отъ вращенія прямоуг. треуг. около каждаго изъ катетовъ?

95. Опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, происходящихъ отъ вращенія прямоуг. треуг., въ которомъ катетъ=4, а противолежащій уг.=30°, около каждой изъ сторонъ?

96. Бок. пов. кон. вдвое больше площ. основ.; объемъ его= 1,8138; опредѣлить рад. основ., высоту и образующую? π=3,1415.

97. Высота конуса=24; отношеніе площ. основ. къ боков. поверхн =${}^{7}/_{25}$; $\pi={}^{22}/_{7}$. Опредѣлить об. кон.?

98. Объемъ конуса=176; высота=42; $\pi={}^{22}/_{7}$ Опредѣлить рад. основ.?

99. Опредѣлить рад. основ. конуса, котораго об.=v, а бок. поверхн., будучи развернута на плоскости, представляетъ секторъ въ 36°?

100. Опредѣлить уг. сектора, въ который развернется бок. пов. кон., имѣющаго высоту h, а объемъ v?

101. Въ конусѣ, котораго объемъ=2156, а высота относится къ радіусу основанія какъ 3 : 4, вырѣзанъ тоже конусъ, котораго ось совпадаетъ съ осью даннаго конуса, а образующія обоихъ конусовъ

параллельны между собою. Опредѣлить объемъ получившагося тѣла, если ширина концентрическаго кольца въ основаніи$=2$? $\pi={}^{22}/_{7}$.

102. Въ конусѣ вырѣзанъ конусъ такъ же, какъ въ предъид. зад. Опредѣлить радіусы основаній этихъ конусовъ, если образующія ихъ составляютъ съ высотами углы 30^0, ширина концентрическаго кольца въ основаніи$=d$, а объемъ образовавшагося тѣла$=v$?

103. Равносторонній цилиндръ и равностор. конусъ имѣютъ равныя поверхности; опредѣлить отношеніе ихъ объемовъ?

104. Равносторонній цилиндръ и равностор. конусъ равновелики; опредѣлить отношеніе ихъ поверхностей?

105. Конусъ, рад. основ. котораго$=r$, раздѣленъ пополамъ плоскостью || основанію; опредѣлить рад. сѣченія?

106. Въ конусѣ вырѣзанъ цилиндръ, ось и основаніе котораго совпадаютъ съ осью и основаніемъ конуса, а высота$={}^1/_2$ высоты конуса. Опредѣлить объемъ и полную поверхн. образовавшагося тѣла, если рад. осн. кон.$=3$, рад. осн. цил.$=1$, образующая конуса$=5$?

107. Опредѣлить объемъ прав. треуг. пирамиды, описанной около равностор. кон., котораго объемъ$=a$?

108. Опредѣлить объемы и отношеніе между ними двухъ конусовъ, описаннаго и вписаннаго въ прав. тетраэдръ, котораго ребро$=a$?

109. Опредѣлить объемъ усѣч. кон., котораго высота$=6^{26}/_{71}$; рад. основаній$=12$ и 7; $\pi={}^{355}/_{113}$?

110. Объемъ усѣч. кон. $=1021,02$; высота$=25$; рад. одного основ.$=5$. Опредѣлить рад. другаго основ., если $\pi=3,1416$?

111. Опредѣлить объемъ усѣч. конуса, если рад. основ. его суть 54 и 21, образующая$=65$, $\pi={}^{22}/_{7}$?

112. Опредѣлить объемъ усѣч. конуса, если бок. поверхн. его$=$ $=s$, образующая$=l$, высота$=h$?

113. Объемъ усѣч. кон.$=1512,14$; высота$=19$; отношеніе радіусовъ основаній$={}^3/_2$; опредѣлить радіусы? $\pi=3,14$.

114. Объемъ усѣч. кон.$=355$; высота$=3^{12}/_{100}$; разность радіусовъ основ.$=2$; $\pi={}^{355}/_{113}$. Опредѣлить радіусы?

115. Радіусы основаній усѣч. кон. суть 10 и 5, высота$=12$; опредѣлить рад. сѣченія, параллельнаго основанію и дѣлящаго объемъ конуса пополамъ?

116. Опредѣлить разность между объемами правильныхъ 6-угольныхъ пирамидъ—вписанной въ усѣч. конусъ, котораго объемъ v, и описанной около него?

117. Опредѣлить разность между объемами двухъ конусовъ—вписаннаго и описаннаго около прав. четыреуг. пирамиды, которой объемъ$=90,4$? $\pi={}^{355}/_{113}$.

118. Опредѣлить ошибку, которая произойдетъ, если вычислять объемъ усѣч. конуса, какъ объемъ цилиндра, котораго рад. основ. есть ариѳметическая средина между радіусами основаній конуса?

119. Въ усѣч. кон. вырѣзанъ цилиндръ, имѣющій общую ось съ конусомъ. Опредѣлить объемъ полученнаго тѣла, если радіусы основ. конуса суть 5,62 и 5,13; рад. цил.$=5,05$; образующая кон. $=12,01$; $\pi=3,14$?

120. Въ цилиндрѣ вырѣзанъ усѣч. кон., имѣющій съ нимъ общее

нижнее основ. и общую ось. Опредѣлить рад. верх. основ. кон., если объемъ его$=\frac{1}{2}$ объема цилиндра, а рад. цил.$=2{,}732$?

121. Опредѣлить объемъ усѣч. кон., описаннаго око̀ло шара радіуса если нижнее его основ. вдвое больше верхняго?

122. Опредѣлить объемъ шара рад. 6,3? $\pi=\frac{22}{7}$.

123. Опредѣлить рад. шара, котораго объемъ$=310{,}464$? $\pi=\frac{22}{7}$.

124. Опредѣлить объемъ шара, котораго поверхн.$=s$?

125. Опредѣлить поверхн. шара, котораго объемъ$=v$?

126. Опредѣлить рад. шара, равновеликаго суммѣ шаровъ, которыхъ радіусы r, r_1, r_2?

127. Изъ пустаго мѣднаго шара, котораго наружный діаметръ$=20$, а толщина стѣнки$=9$, надо отлить другой пустой же шаръ, такъ чтобы его наружный діаметръ былъ$=24$. Какова будетъ толщина стѣнки этого шара?

128. Въ кубическій ящикъ положенъ шаръ, прикасающійся ко всѣмъ стѣнкамъ ящика; рад. шара$=10{,}5$; $\pi=\frac{22}{7}$. Опредѣлить объемъ незанятаго шаромъ пространства?

129. Два шара касаются извнутри; разстояніе ихъ центровъ$=2$; объемъ части пространства, заключающагося между шарами,$=480\frac{22}{63}$; опредѣлить радіусы? $\pi=\frac{22}{7}$.

130. Опредѣлить отношеніе между объемами конуса, шара и цилиндра, если діаметры основанія и высоты конуса и цилиндра равны діаметру шара?

131. Шаръ рад. r равновеликъ равностороннему конусу; опредѣлить высоту конуса?

132. Поверхн. шара$=s=$бок. пов. цил.; шаръ и цилиндръ равновелики; опредѣлить рад. основ. цил.?

133. Основ. цил.$=$большому кругу шара; отношеніе полной поверхн. цил. къ поверхн. шара$=m:n$. Опредѣлить 1) отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ; 2) числовое значеніе $m:n$, при которомъ эти объемы равны?

134. Изъ цилиндра, котораго высота$=$рад. r основ., вырѣзано полушаріе, которому основаніемъ служитъ основ. цил. Опредѣлить рад. основ. цил., равновеликаго полученному такимъ образомъ тѣлу, если высота этого цилиндра$=$высотѣ даннаго цил.?

135. Въ цилиндр. сосудъ, котораго діаметръ$=4$, налита вода до высоты $\frac{7}{8}$; въ воду погруженъ шаръ, котораго діам.$=3$; до какой высоты поднялась вода?

136. Шаръ рад. $\sqrt[3]{9}$ равновеликъ конусу, котораго бок. поверхн. въ 7 разъ больше площ. основ. Опредѣлить высоту конуса?

137. Въ конусъ, котораго высота $h=60$, а образующая $l=65$, вписанъ шаръ; опредѣлить разность объемовъ этихъ тѣлъ? $\pi=3{,}1416$.

138. Равносторонній кон. поставленъ на вершину; въ него опущенъ шаръ рад. r и налито столько воды, что она только что покрываетъ весь шаръ. На какой высотѣ станетъ вода, если шаръ вынуть?

139. Въ шаръ вписанъ конусъ, и высота конуса дѣлится центромъ

шара въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ?

140. Сумма объемовъ двухъ шаровъ=объему усѣч. кон., радіусы основ. котораго суть 7 и 3, а высота=$14^{14}/_{79}$: сумма же радіусовъ шаровъ=суммѣ радіусовъ основаній конуса. Опредѣлить радіусы шаровъ?

141. Опредѣлить объемъ шароваго сегмента, если высота его=15, рад. шара=84, $\pi={}^{22}/_{7}$?

142. Опредѣлить объемъ шароваго слоя, если радіусы основаній его 24 и 15, рад. шара=25, $\pi={}^{22}/_{7}$?

143. Въ кругѣ вписаны квадратъ и прав. 3—къ, одна сторона котораго || сторонѣ квадрата. Опредѣлить отношеніе между поверхностями и объемами конуса, цилиндра и шара, которые произойдутъ отъ вращенія этой фигуры около діаметра, перпендикулярнаго къ параллельнымъ сторонамъ квадрата и треуг.?

144. Круговой секторъ, котораго уг.=60^0 а рад.=1, вращается около одного изъ своихъ радіусовъ. Опредѣлить отношеніе объема полученнаго шароваго сектора къ объему шара?

145. Прав. треуг., котораго сторона a, вращается около одной изъ сторонъ; опредѣлить объемъ полученнаго тѣла?

146. Прав. треуг., котораго сторона a, вращается около оси, которая лежитъ внѣ треуг., параллельна одной изъ его сторонъ и находится отъ этой стороны въ разстояніи b. Опредѣлить поверхн. и объемъ происшедшаго такимъ образомъ тѣла?

147. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ прав. 6—ка, котораго сторона=a, около бóльшаго его діаметра?

148. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ прав. 6—ка, котораго сторона=a, около меньшаго его діаметра?

Примѣч. Во всѣхъ слѣдующихъ задачахъ принять $\pi={}^{22}/_{7}$.

149. Что стоитъ позолотить шаръ, котораго рад.=$3^1/_2$ дюйм., если позолота 1 кв. дюйм. обходится въ 50 коп.?

150. Рад. земли=6000 верстъ; $^3/_4$ поверхности земли покрыты водою; сколько десятинъ занимаетъ суша?

151. Опредѣлить пов. шара, если окружность большаго круга= =$1^3/_8$ арш.?

152. Крыша башни имѣетъ видъ усѣч. конуса, котораго образующая=5 арш.: сумма радіусовъ основаній=7, а отношеніе ихъ=$^2/_5$; сколько желѣзныхъ листовъ въ 2 арш. длины и 2 фут. 11 дюйм. ширины пойдетъ на покрытіе этой крыши, если на загибаніе листовъ идетъ $10^0/_0$ лишку?

153 Бок. пов. цилиндра=2 кв. фут. 64 кв. дюйм., а образующая=$^2/_3$ фут.; опредѣлить рад. основанія?

154. Что стоитъ позолотить изнутри чашку, имѣющую видъ полушара, котораго рад.=2 вершк., если на 1 кв. дюймъ идетъ $^3/_8$ золотника золота, а золотникъ (съ работой) стóитъ 3 р. 20 коп.?

155. Бок. пов. кон.=132 кв. дюй.; образующая=$^1/_2$ арш.; опредѣлить рад. основанія?

156. Пов. цилиндра=$141^3/_7$ кв. фут.; окруж. основ.=$18^6/_7$ дюйм.; найти отношеніе образующей къ радіусу?

157. Пов. конуса$=125^5/_7$ кв. фут.; площ. основ.$=50^2/_7$ кв. фут.; найти образующую?

158. Опредѣлить рад. шара, котораго пов.$=314^2/_7$ кв. вершк.?

159. Опредѣлить разность боковыхъ поверхн. цилиндра и вписанной въ него прямой призмы, основаніе которой есть прав. 6—къ; высота цилиндра и призмы въ 7 разъ больше стороны основанія призмы; а сумма высоты и рад. основ. цилиндра$=16$ дюйм.?

160. Опредѣлить пов. кон., если сѣченіе его по оси есть прав. треуг., котораго периметръ$=42$?

161. Опредѣлить уг. сектора, который получится, если развернуть въ плоскость бок. пов. конуса, котораго діаметръ основ. $= 12^1/_4$ дюйм., а образ.$=15^3/_4$ вершк.?

162. Сколько дюйм. будетъ въ сторонѣ квадрата, равновеликаго бок. пов. цилиндра, котораго высота$=0,1212...$ фут., а рад.$=^1/_4$ арш.?

163. Рад. основ. цилиндра$=1$ верш; а сѣченіе его плоскостью по оси равновелико основанію; опредѣлить высоту?

164. Бок. пов. конуса, будучи развернута въ плоскость, представляетъ четверть круга, котораго рад.$=1^3/_5$ арш.; опредѣлить рад. осн. конуса?

165. Діам. основ. цил.$=$высотѣ его; найти отношеніе площ. сѣченія, проходящаго черезъ ось цилиндра, къ площ. его основ.?

166. Конусъ, котораго рад. осн.$=14$ дюйм., пересѣченъ плос. $\parallel$ основ., и высота его раздѣлилась на части, которыхъ отношеніе$=^4/_3$; плоскость находится ближе къ основанію конуса, чѣмъ къ вершинѣ; опредѣлить площ. сѣченія?

167. Опредѣлить уг. сектора, который получится отъ развертыванія бок. пов. кон., котораго образ.$=1$ ф. $3^3/_4$ дюйм., а рад. осн. $=3,5$ дюйм.?

168. Нужно оштукатурить проѣздъ подъ башней, имѣющій въ длину $1^1/_2$ саж., въ ширину $3^1/_2$ саж. и въ вышину до начала свода 4 саж. 2 арш. Сколько нужно извести для штукатурки стѣнъ и свода этого проѣзда, если дуга свода есть полуокружность, діаметръ которой $=$ширинѣ проѣзда и если на 1 кв. саж. стѣны идетъ 18 фун. извести?

169. Сравнить поверхности и объемы цилиндровъ, происходящихъ отъ обращенія прямоугольника около его основанія и высоты?

170. Опредѣлить сторону квадрата, равновеликаго боковой пов. цил., котораго высота$=^9/_{11}$ фут., а рад. основ.$=7$ фут.?

171. Что стоитъ серебряный шаръ рад. 5 дюйм., если 1 куб. дюймъ серебра вѣситъ 42 золотника, золотникъ серебра стоитъ 30 коп. и за работу надо дать по 5 коп. съ золотника?

172. Рад. луны$=^3/_{11}$, а рад. солнца$=112$ рад. земли; сравнить объемы этихъ тѣлъ?

173. Аэростатъ, рад. 1 саж., сдѣланъ изъ шелковой матеріи, которой 1 кв. футъ вѣситъ золотникъ, и наполненъ газомъ, который въ 10 разъ легче воздуха; вѣсъ 1 куб. фута воздуха$=8,5$ золотника. Опредѣлить силу поднятія аэростата?

174. Опредѣлить поверх. и объемъ шара, котораго окружность большаго круга$=6^2/_7$ вершк.?

175. Воздухъ давитъ съ силой $16^3/_4$ фун. на каждый квадр. дюймъ поверхности тѣла; опредѣлить вѣсъ земной атмосферы? Рад. земли=6000 верстъ.

176. Сколько фунтовъ ртути помѣстится въ цилиндрической трубкѣ, внутренній діаметръ которой=$^1/_2$ дюй., а высота=16 дюйм.? Вѣсъ 1 куб. дюйм. воды=$^1/_{25}$ фун.; удѣл. вѣсъ ртути=13,6?

177. Что стоитъ золотой шаръ рад. 3 фут., если удѣл. вѣсъ золота=19, фунтъ золота стоитъ 280 руб.; вѣсъ 1 куб. дюй. воды =$^1/_{25}$ фун.?

178. Опредѣлить вѣсъ пустаго мѣднаго шара, котораго внутренній радіусъ=7 дюйм., а толщина стѣнокъ=2 дюйм., если удѣл. вѣсъ мѣди=$9^1/_2$?

179. Опредѣлить отношеніе объема шара къ объему конуса, котораго высота и радіусъ основанія равны радіусу шара?

180. Памятникъ состоитъ изъ гранитной плиты, имѣющей видъ прямоуг. параллелипипеда, въ основаніи котораго квадратъ площадью въ 9 кв. фут., высота же=4 дюйм.; на плитѣ поставлена чугунная цилиндрическая колонна, рад. основ. которой=$^1/_4$ арш., а высота=$2^1/_2$ арш.; на колоннѣ находится чугунный шаръ рад. 3 дюйма. Опредѣлить вѣсъ памятника, зная, что 1 куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фун., удѣл. вѣсъ гранита=3, 2; а чугуна=8?

181. Котелъ имѣетъ форму полушара; діаметръ его=2 арш.; опредѣлить его вмѣстимость въ ведрахъ? Ведро=750 куб. дюйм.

182. Опредѣлить объемъ конуса, происходящаго отъ вращенія равнобедр. прямоуг. треуг. около катета=1 футу?

183. Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія равнобедр. прямоуг. треуг. около гипотенузы=14 дюйм.?

184. Опредѣлить объемъ шара, котораго поверхн.=616 кв. вершк.?

185. Цилиндрическій сосудъ, котораго высота=1 арш., а діаметръ основ.=3 дюйм., наполненъ водой; воду эту вылили изъ него въ другой сосудъ, также цилиндрическій, основ. котораго=$12^4/_7$ квадр. дюйм. На какой высотѣ стала вода въ этомъ сосудѣ?

186. Цилиндръ, котораго высота=$^2/_3$ вершка, вдвое больше шара рад. $1^3/_4$ дюйм.; опредѣлить рад. основ. цил.?

187. Что стоитъ серебряный цилиндръ, котораго высота=$^{18}/_5$ діам. основ., а окружность основ.=$9^3/_7$ дюйм.? Вѣсъ 1 куб. дюйм. воды =$^1/_{25}$ фун., удѣл. вѣсъ серебра=10; 1 фунтъ серебра (съ работой) стоитъ 35 руб.

188. Около основанія конуса описанъ квадратъ, площадь котораго=49 кв. дюйм.; высота конуса=9 дюйм.; опредѣлить объемъ его?

189. Объемъ конуса=616 куб. дюйм., высота=12 дюйм.; найти рад. основ.?

190. Мѣдный шаръ рад. 1 верш. надо перелить въ цилиндръ, который имѣлъ бы $^7/_{12}$ дюйм. высоты; опредѣлить рад. основ. цил.?

191. Мѣдный цилиндръ, имѣющій въ окружности $12^4/_7$ дюйм., вѣситъ 31,68 фун.; удѣл. вѣсъ мѣди=9; найти высоту цил.?

192. Въ цилиндрическую трубку налито 35,904 фун. ртути; высота ртути=21 дюйм.; удѣл. вѣсъ ртути=13,6. Опредѣлить внутренній діаметръ трубки?

193. Изъ свинцоваго шара рад. 5 дюйм. сколько можно вылить пуль по 5 линій въ діаметрѣ, если при литьѣ 5$^0/_0$ свинца угораетъ?

194. Опредѣлить объемъ конуса, если сѣченіе плоскостью по оси имѣетъ основаніе 14, а высоту 12 фут.?

195. Опредѣлить поверхность куба, равновеликаго конусу, который въ сѣченіи по оси даетъ треуг., имѣющій основаніе 14 вершк., а высоту $^{12}/_{77}$ верш.?

196. Въ кубъ, котораго ребро=3,5 дюйм., вставленъ цилиндръ, касающійся всѣхъ сторонъ куба; сколько фун. воды можетъ помѣститься въ промежуткѣ между кубомъ и цилиндромъ?

197. Объемъ цил.=1 куб. ф.; рад. основ.=$^1/_2$ ф.; найти высоту?

198. Объемъ цил.=11 куб. ф.; высота=14 ф.; опредѣлить повер?

199. Площ. основ. кон.=154 кв. дюйм., а площ. сѣченія по оси =231 кв. дюйм.; опредѣлить объемъ?

200. Опредѣлить отношеніе боковыхъ поверхностей и объемовъ двухъ конусовъ, полученныхъ отъ вращенія прямоуг. треуг., котораго катеты 21 и 28 дюйм., около каждаго изъ катетовъ?

201. Вся поверхн. цил.=392 кв. ф., а бок. пов.=84 кв. ф.; опредѣлить объемъ?

202. Изъ кубическаго куска мѣди, вѣсомъ въ 123,48 фун., выточенъ возможно—большій шаръ; опредѣлить вѣсъ его?

203. Опредѣлить ребро куба, равновеликаго разности между объемами конуса и описанной около него прав. четыреуг. пирамиды, площ. основ. которой=4 кв. дюйм., а высота=$2^1/_2$ фут.?

204. Опредѣлить въ куб. дюйм. объемъ конуса, котораго сѣченіе по оси есть прямоуг. треуг., имѣющій гипотенузу=$1^1/_2$ арш.?

205. Сколько можно отлить цилиндрическихъ полосъ въ сажень длины и въ вершокъ ширины изъ мѣднаго шара, котораго діам.=1 ф. 9 дюйм.?

206. Опредѣлить поверхн. и объемъ цил., котораго сѣченіе плоскостью по оси есть квадратъ площадью въ 49 кв. вершк.?

207. Изъ равносторонняго цилиндра, котораго діам. основ.=21 дюйм., выточенъ возможно большій шаръ; опредѣлить отношеніе его вѣса къ вѣсу цилиндра?

208. Конусъ, котораго діам. основ.=8 дюйм., а высота въ $1^1/_2$ раза больше, равновеликъ цилиндру, діам. основ. котораго=5 дюйм.; опредѣлить высоту цил.?

209. Желѣзный шаръ, катясь по прямой линіи, обернулся 168 разъ на разстояніи $46^2/_3$ фут.; опредѣлить его вѣсъ, если 1 куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фун., а удѣл. вѣсъ желѣза=8?

210. Поверхн. куба=294 кв. дюйм.; опредѣлить поверх. и объемъ наибольшаго шара и наибольшаго цилиндра, которые можно выточить изъ такого куба?

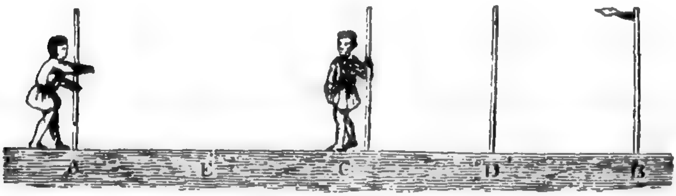
211. Въ цилиндрическій сосудъ, діаметръ основанія котораго=$1^1/_4$ арш., налита вода до высоты 20 дюйм.; въ воду опустили шаръ рад. $1^3/_4$ дюйм.; шаръ потонулъ. На какой высотѣ стала вода въ сосудѣ?

ПРИБАВЛЕНІЕ.

495. Въ заключеніе покажемъ, какимъ образомъ дѣлаются простѣйшія геометрическія построенія (напр. проведеніе перпендикуляровъ, параллелей и т. под.) на мѣстности, т. е. на поверхности земли, и потомъ примѣнимъ эти построенія къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ, напр. къ опредѣленію разстояній мѣстъ на поверхности земли, высоты одной точки надъ другой и т. под.

496. Когда нужно провести по поверхности земли прямую линію между двумя данными точками, то въ этихъ точкахъ вбиваютъ въ землю колья, натягиваютъ между ними веревку и проводятъ по направленію ея какимъ нибудь остріемъ. Если линія должна быть очень длинна, то означаютъ только нѣсколько ея точекъ. Положимъ напр., что нужно назначить точки прямой линіи, проходящей черезъ A и B (чер. 537).

Чер. .537.



Для этого въ A и B ставятъ колья или *вѣхи* (длинные шесты); потомъ ставятъ колья C, D...., такъ чтобы первый колъ A закрывалъ всѣ прочіе, если, помѣщаясь сзади его, смотрѣть изъ за него на другіе колья. Означеніе нѣсколькихъ точекъ линіи на землѣ наз. *провѣшеніемъ* линіи. Легко понять, какимъ образомъ можно провѣшить продолженіе данной прямой линіи.

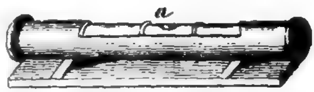
497. Замѣтимъ, что колья и вѣхи должны быть поставлены *отвѣсно* или *вертикально*. Вертикальнымъ направленіемъ наз. направленіе свободно падающаго тѣла, и оно опредѣляется *отвѣсомъ*, т. е. ниткой съ привязанной къ ней гирькой. Всякая плоскость, проходящая черезъ вертикальную линію, наз. *вертикальной* плоскостью. Плоскость, перпендикулярная къ отвѣсной линіи, наз. *горизонтальною;* такую плоскость представляетъ свободная поверхность воды или вообще какой нибудь жидкости.

Всякая плоскость, не вертикальная и не горизонтальная, будетъ плоскость *наклонная*.

Прямая линія, параллельная горизонтальной плоскости, наз. линіей *горизонтальною*. Очевидно, что по горизонтальной плоскости можно черезъ каждую точку провести множество горизонтальныхъ линій; на вертикальной же и наклонной плоскостяхъ можно черезъ каждую точку провести только одну горизонтальную линію.

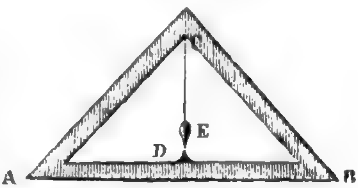
Чтобы узнать, *горизонтальна ли какая нибудь плоскость*, употребляютъ приборы, наз. вообще *уровнями*. Одинъ изъ нихъ (чер. 538) состоитъ изъ запаянной стеклянной трубки, слегка согнутой, обдѣланной въ мѣдную оправу и укрѣпленной на мѣдной линейкѣ; трубка наполнена водой, но не вся, а въ ней остается небольшой пузырекъ воздуха *a* этотъ пузырекъ стоитъ по срединѣ трубки, если линейка имѣетъ положеніе горизонтальное; при наклонномъ же положеніи линейки, пузырекъ, стремясь занять самое верхнее положеніе, удалится отъ средины трубки и пойдетъ къ тому концу ея, который выше, т. е. дальше отъ земли. Чтобъ узнать, горизонтальна ли какая нибудь плоскость, ставятъ на ней уровень въ двухъ положеніяхъ, и если пузырекъ въ обоихъ случаяхъ будетъ по срединѣ трубки, то плоскость горизонтальна; если же онъ отойдетъ отъ средины, то плоскость не горизонтальна, и чтобъ привести ее въ горизонтальное положеніе, надо поднимать или опускать одну сторону ея, пока пузырекъ станетъ въ самой срединѣ трубки.

Чер. 538.

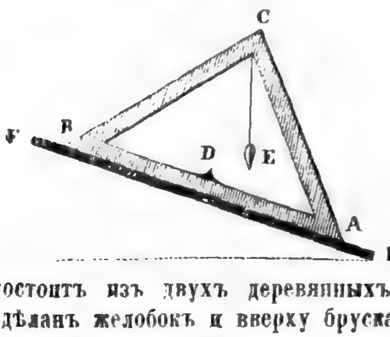


Употребляютъ еще другой приборъ, наз. *ватерпасомъ*. Онъ состоитъ (чер. 539) изъ трехъ деревянныхъ брусковъ, соединенныхъ въ видѣ треугольника; въ точкѣ C прикрѣплена нить съ гирькой E; подъ гирькой находится остріе D, и если брусокъ AB находится на горизонтальной плоскости, то гирька приходится прямо надъ остріемъ; въ противномъ же случаѣ она отходитъ отъ острія (чер. 540). На чер. 541-мъ представленъ ватерпасъ другаго устройства; онъ

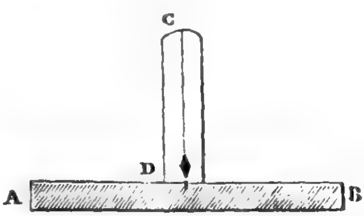
Чер. 539.



Чер. 540.



Чер. 541.



состоитъ изъ двухъ деревянныхъ брусковъ AB и CD; въ CD сдѣланъ желобокъ и вверху бруска прикрѣплена нить отвѣса; когда

AB стоитъ на горизонтальной плоскости, то отвѣсъ приходится прямо противъ желобка.

498. Для измѣренія разстояній на землѣ употребляютъ *мѣрительную тесьму* или *цѣпь*. Тесьма бываетъ длиной въ 10 и болѣе саженъ; на одной сторонѣ ея означены сажени, аршины, вершки съ половинами и четвертями, а на другой сажени, футы, дюймы (или же метры, дециметры....); она окрашивается масляной краской для того, чтобы не измѣнялась отъ сырости. Впрочемъ отъ частаго употребленія тесьма вытягивается, и гораздо вѣрнѣе производить измѣреніе цѣпью.

Цѣпь (чер. 542) имѣетъ обыкновенно длину 10 саженъ; она состоитъ изъ желѣзныхъ звеньевъ, длиною по 1 футу; черезъ каждыя 7 звеньевъ, составляющихъ сажень, прикрѣплены мѣдныя дощечки съ цыфрой, показывающей число саженъ отъ начала цѣпи. На обоихъ концахъ цѣпи находятся кольца. Измѣреніе цѣпью производится слѣдующимъ образомъ: линію, которую надо измѣрить, провѣшиваютъ; цѣпь несутъ два человѣка; передній имѣетъ при себѣ 10 маленькихъ колышковъ; находящійся сзади становится у того мѣста, откуда надо начать измѣреніе; передній идетъ съ цѣпью по направленію линіи, и когда вытянетъ цѣпь, то втыкаетъ на концѣ ея колышекъ; затѣмъ цѣпь снимается, идутъ дальше, и когда задній дойдетъ до колышка, то надѣваетъ на него цѣпь, потомъ беретъ колышекъ себѣ; затѣмъ опять идутъ далѣе и т. д., пока не пройдутъ всей линіи. По числу колышковъ, оказавшихся у задняго, легко узнать величину измѣренной линіи: такъ какъ каждый колышекъ снимается тогда, когда вытянута вся цѣпь, то слѣд. если по окончаніи измѣренія окажется у задняго напр. 6 колышковъ, то длина линіи$=60$ саженъ.

Чер. 542.

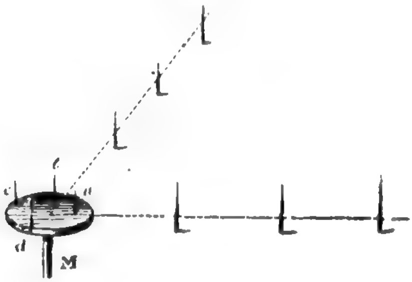
Приближенно можно измѣрять линіи шагами, причемъ измѣряющій долженъ сперва опредѣлить величину своего шага; съ этой цѣлью онъ измѣряетъ какую нибудь линію цѣпью и шагами, и пусть напр. 400 шаговъ его составили 150 саж.; тогда 1 шагъ$={}^{150}/_{400}={}^{3}/_{8}$ саж., и стало быть если въ какой нибудь линіи оказалось 240 шаговъ, то длина ея$=240 . {}^{3}/_{8}=90$ саж.

499. Для провѣшиванія перпендикуляровъ употребляется *эккеръ*. Въ простѣйшемъ видѣ приборъ этотъ (чер. 543) состоитъ изъ дощечки, которая надѣвается на палку *M*, снабженную внизу острымъ желѣзнымъ наконечникомъ; на дощечкѣ прикрѣплены четыре шпильки *A*, *B*, *C*, *d*; если палку *M* поставить вертикально, то дощечка станетъ горизонтально, а шпильки будутъ имѣть вертикальное направленіе. Шпильки поставлены такъ, что если концы ихъ соединить прямыми линіями, то эти линіи образуютъ прямой уголъ.

Чтобы провести по землѣ двѣ взаимно-перпендикулярныя линіи, втыкаютъ въ землю колъ *M*, такъ чтобы онъ имѣлъ вертикальное положеніе; потомъ провѣшиваютъ одну линію по направленію шпилекъ *c* и *a* (чер. 543), а другую по направленію *d* и *b*.

Чер. 543.

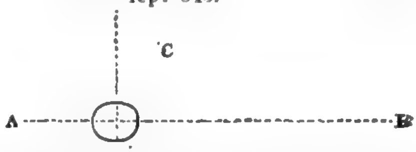
Чер. 544.



Если нужно изъ данной точки *M* линіи, находящейся на поверхности земли, возставить къ этой линіи перпендикуляръ, то ставимъ эккеръ въ *M*, повертываемъ его такъ, чтобы двѣ шпильки, напр. *a* и *c*, находились въ направленіи данной прямой линіи; потомъ провѣшиваемъ линію по направленію двухъ другихъ шпилекъ (чер. 544).

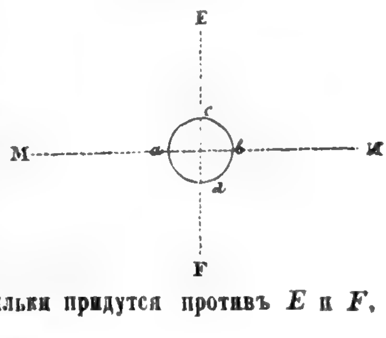
Наконецъ, чтобъ опустить изъ данной точки *C* (чер. 545), перпендикуляръ на *AB*, ставимъ эккеръ въ какой нибудь точкѣ линіи *AB*, притомъ такъ, чтобы двѣ его шпильки находились по направленію *AB*; потомъ подвигаемъ эккеръ по линія *AB* (на нашемъ чертежѣ вправо) до тѣхъ поръ, пока линія, проходящая черезъ другія двѣ шпильки, не встрѣтитъ точки *C*; провѣшивъ эту линію, и получимъ перпендикуляръ къ *AB*.

Чер. 545.



Для повѣрки эккера, его ставятъ въ какой нибудь точкѣ (чер. 546), потомъ вбиваютъ колья въ *M* и *N*, *E* и *F*—по направленіямъ шпилекъ *ab* и *cd*; затѣмъ повертываютъ эккеръ такъ, чтобы противъ *M* и *N* приходились шпильки *c* и *d*; если при этомъ другія двѣ шпильки придутся противъ *E* и *F*, то эккеръ вѣренъ.

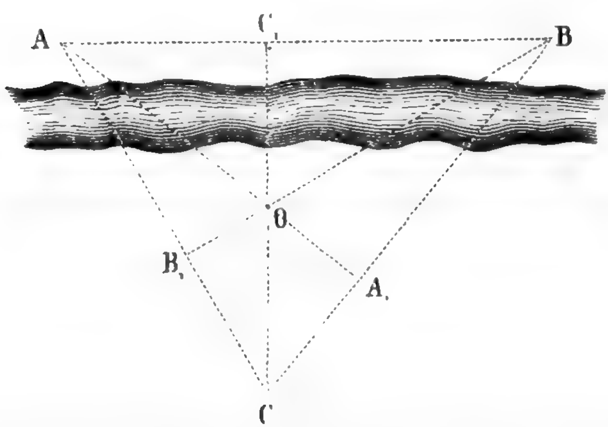
Чер. 546.



500. Есть впрочемъ много способовъ вѣшенія перпендикуляровъ и безъ помощи эккера. Напримѣръ чтобъ провѣшить перпендикуляръ къ линіи AB изъ точки M, находящейся на этой линіи, беремъ веревку, укрѣпляемъ концы ея въ какихъ нибудь точкахъ A и B линіи AB, равноотстоящихъ отъ M; затѣмъ вытягиваемъ веревку за ея средину D; линія $MD \perp AB$ по свойству равнобедр. треуг.

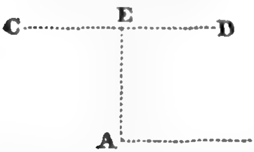
Если нужно черезъ точку C (чер. 547) провѣшить перпендикуляръ къ недоступной прямой AB, то провѣшимъ сначала прямыя

Чер. 547.



AC и BC: потомъ посредствомъ эккера провѣшимъ $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$; тогда опредѣлится точка O, принадлежащая линіи $COC_1 \perp AB$ (ибо всѣ высоты треуг. пересѣкаются въ одной точкѣ).

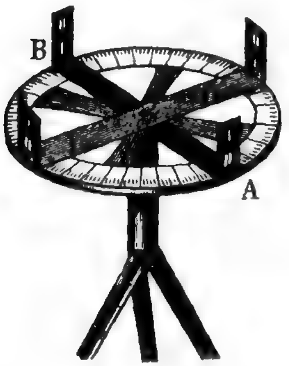
Чер. 548.



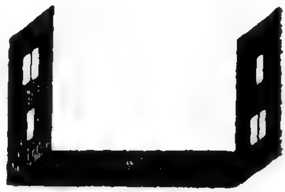
Параллельныя линіи на поверхности земли можно проводить посредствомъ эккера. Если напр. черезъ точку A (чер. 548) надо провести линію $\parallel CD$, то проводимъ $AE \perp CD$: потомъ изъ A проводимъ перпендикуляръ къ AE.

501. Для измѣренія угловъ на поверхности земли, употребляется снарядъ, наз. *астролябіей.* Онъ состоитъ (чер. 549) изъ мѣднаго круга (кругъ этотъ наз. *лимбомъ*), поставленнаго на треножной подставкѣ; ножки этой подставки можно раздвигать болѣе или менѣе, и самый кругъ можетъ быть приведенъ въ какое угодно положеніе—горизон., вертик. или наклонное. Окружность лимба раздѣлена на градусы; въ центрѣ круга укрѣплены двѣ линейки или *алидады;* одна изъ нихъ AB неподвижно соединена съ кругомъ, и одно ребро ея представляетъ діаметръ круга, идущій отъ 0° до 180°; другая линейка можетъ повертываться около центра круга, причемъ съ первой линейкой она будетъ составлять различные углы, величина которыхъ

Чер. 549.



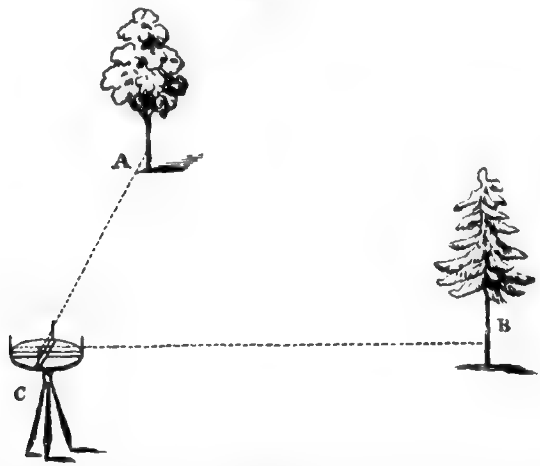
Чер. 550.



означается на кругѣ. На линейкахъ, перпендикулярно къ нимъ, укрѣплены *діоптры*; это двѣ мѣдныя планки (чер. 550); въ каждой изъ нихъ сдѣлано внизу и вверху два прорѣза — одинъ узкій, другой — болѣе широкій; въ этомъ послѣднемъ натянутъ волосъ; притомъ въ одной планкѣ узкій прорѣзъ находится внизу, а широкій вверху; въ другой же—на оборотъ.

Чтобъ измѣрить уголъ, образуемый линіями, проведенными изъ A и B (чер. 551) въ C, ставятъ астролябію такъ, чтобы центръ лимба приходился на одной вертикальной линіи съ точкой C; съ этой цѣлью внизу астролябіи подвѣшивается отвѣсъ, такъ что точка, въ которой прикрѣплена нить отвѣса, находится на одной вертикаль-

Чер. 551.



ной линіи съ центромъ лимба; если поставить астролябію такъ, чтобъ гирька отвѣса приходилась прямо надъ точкой C, то центръ лимба будетъ находиться на одной вертикальной линіи съ C. Установивъ астролябію, повертываютъ лимбъ такъ, чтобы неподвижная алидада находилась въ направленіи отъ C къ A (этого можно достигнуть, смотря въ узкое отверстіе діоптра и приводя волосокъ широкаго отверстія на точку A); затѣмъ повертываютъ подвижную алидаду такъ, чтобы она была въ направленіи CB; число градусовъ на кругѣ между алидадами и означитъ величину угла ACB.

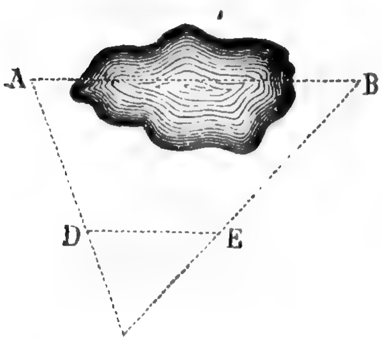
Легко понять, какимъ образомъ посредствомъ астролябіи можно провѣшить на землѣ прямыя линіи, составляющія между собой данный уголъ.

502. Рѣшимъ теперь нѣсколько задачъ.

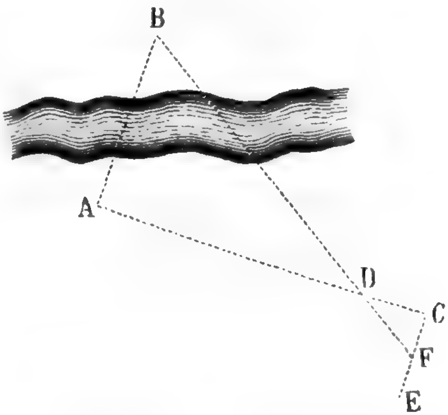
1. Опредѣлить разстояніе между точками A и B (чер. 552), непосредственное измѣреніе котораго невозможно? Взявъ какую нибудь точку C, такъ чтобы можно было измѣрить CA и CB, отложимъ на CA и CB какія нибудь одинакія доли этихъ линій, напр. $CD = \frac{1}{3}\ CA$ и $CE = \frac{1}{3}\ CB$; тогда $CDE \backsim CAB$ и $AB = 3DE$; а DE можно измѣрить.

2. Опредѣлить разстояніе между точками A и B (чер. 553), изъ которыхъ одна, именно B, недоступна?

Чер. 552.



Чер. 553.

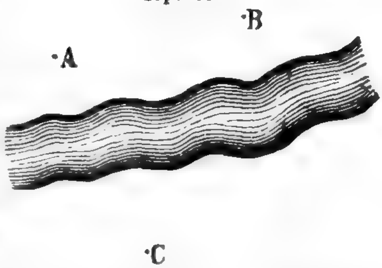


Провѣшимъ линію AB; изъ A возставимъ $AC \perp AB$; возьмемъ на AC произвольную точку D и отложимъ DC = какой нибудь долѣ AD, напр. $DC = \frac{1}{6}\ AD$; изъ C проведемъ $CE \perp AC$ и провѣшимъ BD до пересѣченія съ CE въ F; тогда $AB = 6CF$.

3. Опредѣлить разстояніе между двумя недоступными точками A и B (чер. 554)?

Избираемъ такую точку C, изъ которой видны и A и B; опредѣляемъ, какъ указано въ задачѣ 2-й, разстоянія CA и CB; тогда (зад. 1) можно опредѣлить и разстояніе AB.

Чер. 554.



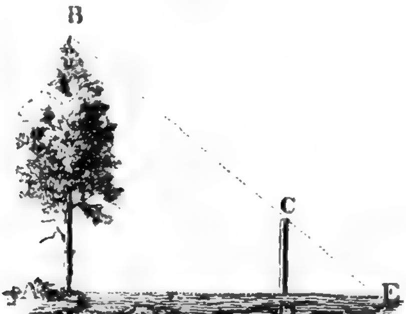
4. Опредѣлить высоту предмета, къ основанію котораго можно подойти?

1. Беремъ шестъ опредѣленной длины a; ставимъ его вертикально и измѣряемъ длину b тѣни, отбрасываемой шестомъ при освѣщеніи солнцемъ; за тѣмъ измѣряемъ длину c тѣни, отбрасываемой въ тоже время предметомъ, высоту котораго хотимъ опредѣлить; тогда, называя эту высоту x, будемъ имѣть $\frac{x}{a}=\frac{c}{b}$, откуда

$x=\frac{ac}{b}$.

2. Можно поступить еще слѣдующимъ образомъ: человѣкъ ложится на землю навзничь; у ногъ его ставятъ вертикально шестъ, равный величинѣ его роста до глазъ; затѣмъ человѣкъ передвигается по землѣ до тѣхъ поръ, пока (чер. 555) вершина B предмета, высоту котораго надо опредѣлить, и вершина шеста C (который долженъ стоять вертикально у ногъ), будутъ на одной прямой линіи съ глазомъ E; такъ какъ треуг. $ABE \infty DCE$ и $DC=DE$, то и $BA=AE$.

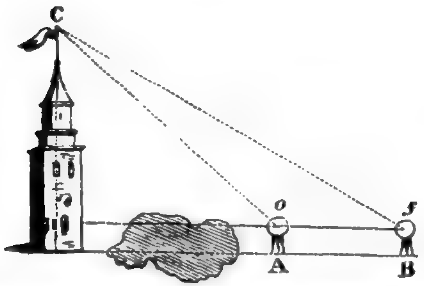
Чер. 555.



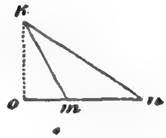
5. Опредѣлить высоту предмета, къ основанію котораго нельзя подойти?

Измѣряемъ на горизонтальной мѣстности прямую AB (она наз. *базисомъ*); ставимъ астролябію сперва въ A, потомъ въ B, и приведя лимбъ *ея* въ вертикальное положеніе, ставимъ одну алидаду горизонтально, а другую наводимъ на вершину башни и опредѣляемъ (чер. 556) углы CoD и CfD; потомъ чертимъ линію mn (чер. 557),

Чер. 556.



Чер. 557.

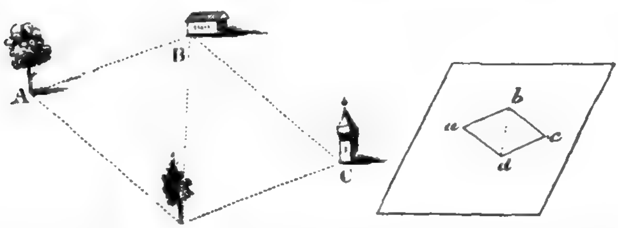


представляющую въ опредѣленномъ масштабѣ линію fo или AB; при точкахъ m и n строимъ углы, равные угламъ Cof и Cfo; пересѣченіе линій nk и mk будетъ изображать вершину башни; а перпендикуляръ ko, опущенный изъ k на mn, представитъ линію CD. Измѣривъ этотъ перпендикуляръ масштабомъ, опредѣлимъ и величину CD; если напр. $ko=2{,}36$ дюйм., а масштабъ 10 саж. въ дюймѣ, то $CD=23{,}6$ саж.; придавъ къ CD высоту астролябіи, найдемъ и высоту башни.

503. Съемка плановъ. Снять планъ какой нибудь мѣстности значитъ начертить на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ фигуру, подобную той, которую представляетъ эта мѣстность. Для этого употребляютъ слѣдующіе способы.

1. Положимъ, что требуется снять планъ съ мѣстности, имѣющей видъ многоугольника $ABCD$ (чер. 558). Измѣряемъ стороны

Чер. 558.

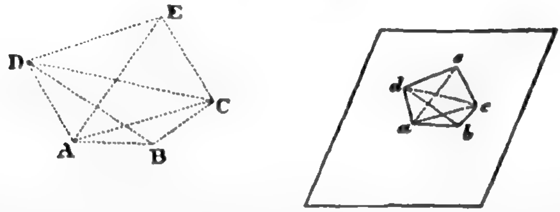


этого многоугольника и діагональ его DB; потомъ чертимъ на бумагѣ прямую dc, которая содержала бы напр. столько дюймовъ, сколько въ DC содержится сажень, и изъ точекъ c и d описываемъ дуги радіусами, пропорціональными CB и DB; тогда получимъ треуг. $dcb \infty DCB$; затѣмъ на db строимъ треуг. $dba \infty DBA$; тогда и получимъ многоуг. $abcd \infty ABCD$.

Поступая подобнымъ образомъ, можно снять планъ мѣстности, какой бы многоугольникъ она ни представляла.

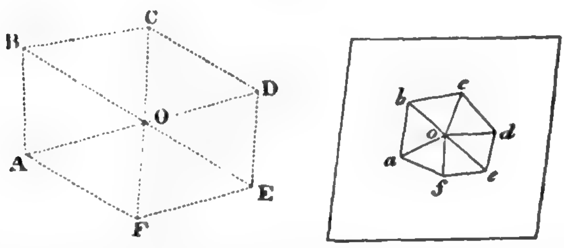
2. Если по какимъ нибудь причинамъ нельзя измѣрить всѣхъ сторонъ многоугольника $ABCED$ (чер. 559), то измѣряемъ только одну изъ нихъ, напр. AD; потомъ посредствомъ астролябіи измѣряемъ углы DAE, DAC, DAB, также углы ADE, ADC, ADB; затѣмъ чертимъ по масштабу линію ad, которая будетъ представлять AD, и посредствомъ транспортира строимъ углы dae, dac, dab, равные угламъ DAE, DAC, DAB; также углы ade, adc, adb, равные угламъ ADE, ADC, ADB; пересѣченіемъ линій db и ab опредѣлится вершина b; пересѣченіемъ ac и dc опредѣлится точка c; наконецъ пересѣченіе de и ae даетъ послѣднюю вершину многоугольника.

Чер. 559.



3. Внутри снимаемой мѣстности выбираютъ какую нибудь точку O (чер. 560) и измѣряютъ разстоянія отъ этой точки до вершинъ многоуг., т. е. OA, OB, OC..., а также углы AOB, BOC, COD...; потомъ на бумагѣ посредствомъ транспортира чертятъ при какой нибудь точкѣ o углы aob, boc..., равные измѣреннымъ угламъ на мѣстности, и откладываютъ по масштабу линіи oa, ob, oc..., соотвѣтствующія линіямъ OA, OB, OC...; точки a, b, c... соединяютъ; тогда $abcdef$ и будетъ планъ мѣстности $ABCDEF$, составленный по опредѣленному масштабу.

Чер. 560.



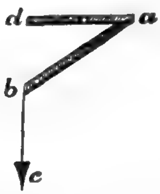
504. Мензула. Съемку плановъ весьма удобно также производить посредствомъ прибора, называемаго *мензулой*. Мензула (чер. 561) состоитъ изъ деревянной квадратной доски, которая, подобно астролябіи, укрѣплена на треножникѣ, на доску наклеивается листъ бумаги, на которомъ предполагается чертить планъ; доска приводится въ горизонтальное положеніе посредствомъ уровня.

Чер. 561

Для того, чтобы поставить мензулу такъ, чтобы какая нибудь точка ея m приходилась какъ разъ надъ извѣстной точкой земли M, употребляютъ приборъ, состоящій изъ двухъ линеекъ, соединенныхъ между собой подъ угломъ, какъ показано на чертежѣ 562-мъ; къ точкѣ b привѣшенъ отвѣсъ, и точки d, b, c лежатъ на одной вертикальной линіи. Если положить этотъ приборъ на мензулу линейкой ad, такъ чтобы точка m (чер. 561) совпадала съ d, и потомъ передвинуть мензулу такъ, чтобы гирька c стала надъ M, то точки m и M будутъ лежать на одной вертикальной линіи.

Чтобы начертить на мензулѣ линію по направленію какой нибудь линіи, находящейся на землѣ, употребляется линейка или алидада (чер. 563); она имѣетъ такое же устройство, какъ алидада астро-

Чер. 562.



Чер. 563.

лябіи: поэтому мы ее здѣсь и не будемъ описывать. Если хотятъ начертить линію по направленію линіи AB (чер. 564), находящейся на землѣ, то ставятъ мензулу въ точкѣ A; на мензулу кладутъ алидаду такъ, чтобы одинъ конецъ ея приходился надъ точкой A (мы уже видѣли, какъ это сдѣлать); въ той точкѣ, гдѣ находится конецъ алидады, стоящій надъ A, втыкаютъ иголку; потомъ повер-

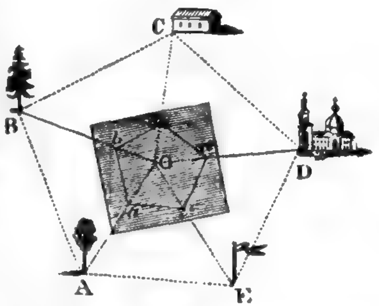
Чер. 564.

тываютъ алидаду такъ, чтобы она находилась по направленію AB, и по краю ея проводятъ прямую линію.

505. Съемка плана производится посредствомъ мензулы слѣдующими способами:

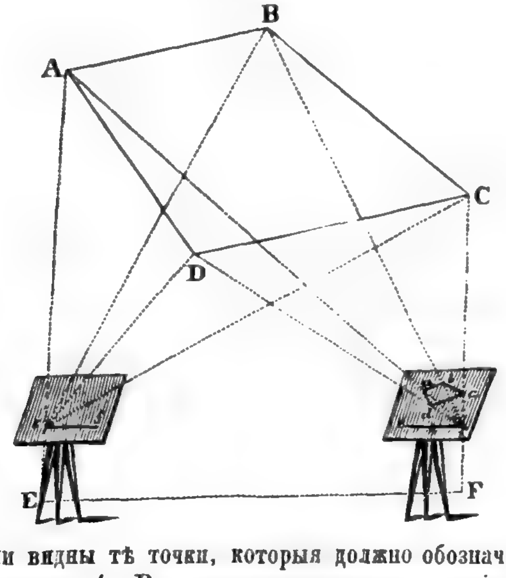
1. Положимъ, что надо снять планъ мѣстности $ABCDE$ (чер. 565); выбираютъ внутри ея такую точку O, чтобы можно было измѣрить разстоянія отъ этой точки до вершинъ многоугольника A, B...; измѣряютъ эти разстоянія; потомъ ставятъ мензулу въ точку O, проводятъ посредствомъ алидады прямыя по направленіямъ OA, OB, OC... и откладываютъ на нихъ по масштабу измѣренныя линіи Oa, Ob, Oc...; тогда многоугол. $abcde$ и будетъ представлять планъ мѣстности $ABCDE$.

Чер. 565.



2. Измѣряютъ на землѣ какъ можно точнѣе такую прямую линію EF (чер. 566), чтобъ изъ концовъ ея были видны тѣ точки, которыя должно обозначить на планѣ, т. е. вершины A, B... многоугольника; эта линія наз. *базисомъ*. Проводятъ на мензулѣ прямую ef, которая по масштабу выражала бы линію EF; затѣмъ ставятъ мензулу въ E горизонтально, такъ чтобы точка e пришлась надъ E и линія ef была по на-

Чер. 566.



правленію EF; укрѣпляютъ въ e иголку, направляютъ алидаду на точки A, B, C, D и проводятъ на мензулѣ линіи по направленіямъ eA, eB, eC, eD; потомъ переносятъ мензулу въ точку F, устанавливаютъ такъ, чтобы точка f пришлась надъ F и линія ef по направленію EF, и проводятъ посредствомъ алидады изъ точки f линіи по направленію къ вершинамъ многоугольника; пересѣченіе этихъ линій съ первыми и опредѣлитъ на мензулѣ фигуру $abcd$, подобную $ABCD$.

506. Если мы имѣемъ вѣрный планъ какой нибудь мѣстности и знаемъ, по какому масштабу онъ начерченъ, то, измѣривъ какую нибудь линію по плану, мы легко опредѣлимъ, какова длина соотвѣтствующей ей линіи на мѣстности. Если напр. планъ $abcd$ (чер. 566) начерченъ по масштабу 100 саж. въ дюймѣ, и измѣривъ линію ab, мы нашли ее равной 2,37 дюйм., то соотвѣтствующая ей линія $AB = 237$ саж.

Подобнымъ образомъ, если площадь плана = напр. 10000 кв. дюйм. и планъ начерченъ по масштабу 10 саж. въ дюймѣ, то площ. мѣстности $= 10000 \,.\, 100 = 1000000$ кв. саж. = 4 кв. верст.

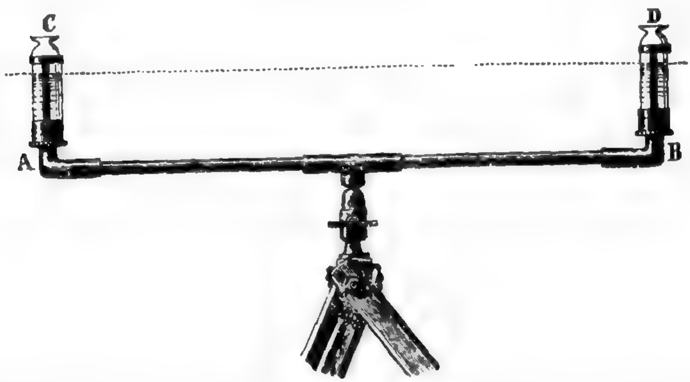
507. Чтобы опредѣлить площадь плана, надо разбить ее на треугольники, опредѣлить площадь каждаго изъ нихъ и взять сумму этихъ площадей. Въ планахъ хозяйственныхъ опредѣляютъ обыкновенно величину площади въ десятинахъ, и при этомъ употребляютъ слѣдующій, болѣе скорый и удобный, способъ. На роговомъ прозрачномъ листѣ проводятъ остріемъ рядъ параллельныхъ линій въ разстояніи другъ отъ друга на 60 саж. по тому масштабу, по которому начерченъ планъ, напр. 100 саж. въ дюймѣ; потомъ проводятъ другой рядъ линій, перпендикулярныхъ къ первымъ и отстоящихъ другъ отъ друга въ 40 саж. по тому же масштабу. Такимъ образомъ на роговомъ листѣ получается рядъ прямоугольниковъ, имѣющихъ площади по 2400 кв. саж., т. е. по одной казенной десятинѣ. Каждый прямоугольникъ, выражающій десятину, разбиваютъ на меньшіе прямоугольники проведеніемъ ряда взаимно-перпендикулярныхъ линій; такъ, при масштабѣ 100 саж. въ дюймѣ, раздѣливъ каждую сторону прямоугольника, выражающаго десятину, на 10 равныхъ частей, получаютъ прямоугольники, равные 24 кв. саж., и слѣд. 100 такихъ прямоугольниковъ составятъ десятину. Для ясности, линіи, означающія десятины, прорѣзываются глубже и шире, чѣмъ линіи, означающія части десятины.

Роговой листъ, приготовленный такимъ образомъ, накладываютъ на планъ, и такъ какъ листъ прозраченъ, то можно сосчитать, сколько большихъ и малыхъ прямоугольниковъ заключается въ измѣряемой фигурѣ; число большихъ прямоугольниковъ опредѣлитъ число десятинъ; а каждые 100 малыхъ составятъ одну десятину. Если напр. измѣряемая площадь закрывается 12 большими и 367 малыми прямоуг., то въ ней 12 десят.+3 дес.+67.24 кв. саж.= 15 десят. 1608 кв. саж.

Нѣтъ надобности, чтобы листъ былъ приготовленъ именно по тому масштабу, по которому составленъ планъ. Пусть напр. листъ, сдѣланный по масштабу 100 саж. въ дюймѣ, будучи наложенъ на планъ, начерченный по масштабу 50 саж. въ дюймѣ, показалъ 25 десят. 400 кв. саж.; такъ какъ масштабъ плана вдвое больше, то площ. измѣряемой мѣстности будетъ въ 2^2 разъ меньше 25 десят. 400 кв. саж., т. е.=6 десят. 700 кв. саж.

508. Нивеллированіе. Нивеллировать какую нибудь мѣстность значитъ опредѣлить разстоянія наиболѣе замѣчательныхъ точекъ ея отъ нѣкоторой опредѣленной горизонтальной плоскости; иначе говоря—значитъ опредѣлить высоты точекъ относительно этой плоскости. Съ этой цѣлью употребляется приборъ, наз. *нивеллиромъ*. Онъ состоитъ (чер. 567) изъ мѣдной трубки AB, къ которой придѣланы

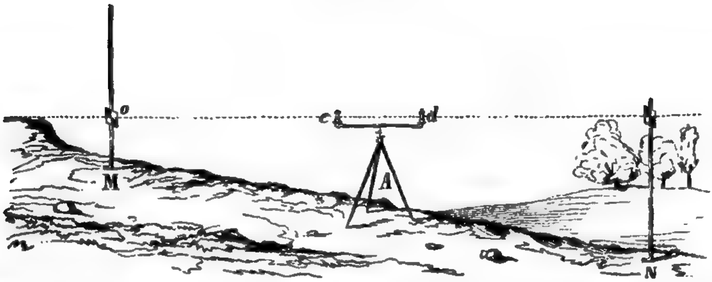
Чер. 567.



подъ прямымъ угломъ двѣ стеклянныя трубки C и D; въ приборъ налита вода, которая въ обѣихъ трубкахъ стоитъ на одной высотѣ.

Если нужно опредѣлить высоту точки M (чер. 568) надъ точкой N, то одинъ наблюдатель ставитъ нивеллиръ въ какой нибудь промежуточной точкѣ A, а другой ставитъ въ N вертикальный шестъ или *рейку*, раздѣленную на какія нибудь линейныя мѣры, напр. дюймы или футы съ десятыми и сотыми долями ихъ; по рейкѣ движется вверхъ и внизъ доска, состоящая изъ двухъ бѣлыхъ и двухъ черныхъ квадратовъ; общая вершина всѣхъ этихъ квадратовъ наз. *цѣлью*; доска ставится на такой высотѣ, чтобы лучъ зрѣнія перваго наблюдателя, смотрящаго изъ точки c въ уровень жидкости (этотъ лучъ всегда будетъ имѣть направленіе горизонтальное) проходилъ въ цѣль; тогда отсчитываютъ на рейкѣ высоту этой вершины надъ точкой N; потомъ, не трогая съ мѣста нивеллира, переносятъ шестъ въ точку M, и помѣстивъ глазъ въ d, опять передвигаютъ по рейкѣ доску такъ, чтобы цѣль *o* находилась въ одной горизонтальной плоскости съ поверхностью воды *cd*, и опредѣляютъ

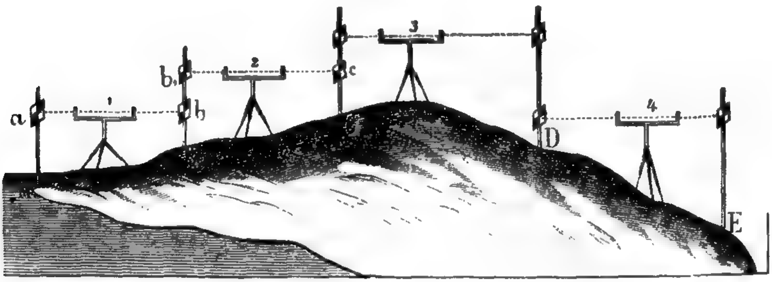
Чер. 568.



высоту *oM*; разность обѣихъ высотъ и будетъ выражать высоту очки *M* надъ точкой *N*.

509. Положимъ, что требуется нивеллировать мѣстность *ABC*.... (чер. 569) и именно опредѣлить высоты ея замѣчательныхъ точекъ

Чер. 569.



B, *C*, *D*, *E* надъ горизонтальной плоскостью, проходящей через *A*. Тогда ставимъ нивеллиръ между *A* и *B* и опредѣляемъ высоту *B* надъ *A*, какъ показано выше; потомъ переносимъ нивеллиръ въ точку, находящуюся между *B* и *C*, и опредѣляемъ высоту *C* надъ *B*; прибавивъ къ этой высотѣ высоту *B* надъ *A*, получимъ высоту *C* надъ *A*. Положимъ, что, начиная съ какой нибудь точки, мѣстность начинаетъ понижаться; тогда, зная высоту *D* надъ *A*, чтобы опредѣлить высоту *E* надъ *A*, надо высоту *D* надъ *E* вычесть изъ высоты *D* надъ *A*, или обратно, смотря по тому, какая изъ этихъ высотъ больше; тогда узнаемъ, на сколько *E* выше или ниже *A*. Если напр. высота *D* надъ *A* равна 3,5 ф., а высота *D* надъ $E=1{,}7$ ф., то высота *E* надъ $A=3{,}5-1{,}7=1{,}8$ ф. А если напр. высота *D* надъ $A=1{,}4$ ф., а высота *D* надъ $E=2{,}6$ ф., то точка *E* находится ниже *D* на $2{,}6-1{,}4=1{,}2$ ф.

510. **Когда крайнія точки очень отдалены, то нужно избрать большое число промежуточныхъ точекъ и было бы весьма неудобно опредѣлять на каждой точкѣ высоту ея надъ предъидущей и надъ точкой** A (чер. 569); поэтому нивеллирующій записываетъ только въ каждой точкѣ высоты на рейкѣ, оставляя вычисленіе до конца. Вычисленіе это дѣлается потомъ весьма просто, если только результаты каждаго наблюденія записаны въ порядкѣ. Съ этой цѣлью въ ***журналѣ нивеллированія*** дѣлаются 3 графы: въ первой графѣ записываютъ по порядку нумеръ каждой точки стоянія; такъ, если проходятъ отъ A къ E, то точка стоянія между A и B наз. № 1, между B и C будетъ № 2 и т. д. Во время отсчитыванія высотъ на рейкахъ нивеллирующій попемѣнно бываетъ обращенъ лицомъ то къ точкѣ E, куда онъ направляется, т. е. ***впередъ***, то къ точкѣ A, откуда началось нивеллированіе, т. е. ***назадъ***.

Во второй графѣ журнала онъ записываетъ всѣ взгляды впередъ, т. е. высоты bB, cC..., а въ третьей всѣ взгляды назадъ, т. е. aA, b_1B... . Пусть напр. такимъ образомъ получимъ таблицу:

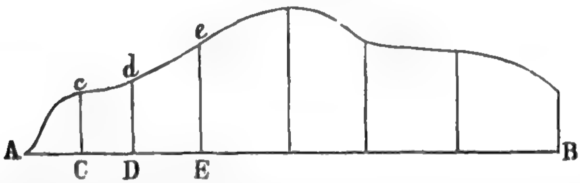
Нумера точекъ стоянія.	Взгляды впередъ.	Взгляды назадъ.
1	2,3	3,6
2	3,2	5,7
3	2,7	2,5
4	2,9	0,8
Сумма	11,1	12,6

Вычтя сумму чиселъ второй графы изъ суммы чиселъ третьей, найдемъ 1,5 ф.; это и будетъ высота точки E надъ A.

Если разность будетъ отрицательная, то это покажетъ, что E находится ниже A.

511. Нивеллированіе даетъ возможность составить ***профиль*** мѣстности, т. е. начертить приблизительно кривую линію, которая получится, если данную мѣстность пересѣчь въ какомъ нибудь направленіи вертикальной плоскостью. Для составленія профили провѣшиваютъ прямую черезъ двѣ точки мѣстности, напр. A и B; потомъ ставятъ нивеллиръ въ какой нибудь точкѣ линіи AB и опредѣляютъ высоты различныхъ точекъ линіи AB надъ какой нибудь горизонтальной плоскостью, напр. надъ плоскостью, проходящей черезъ A; вмѣстѣ съ тѣмъ измѣряютъ разстоянія реекъ, считая эти разстоянія по горизонтальной плоскости. Тогда получатся всѣ данныя, чтобы начертить профиль данной мѣстности въ извѣстномъ направленіи. Для этого проводятъ прямую AB (чер. 570), откладываютъ на ней по

Чер. 570.



опредѣленному масштабу части AC, CD, DE..., выражающія разстоянія между рейками; въ точкахъ A, C, D, E.... возставляютъ перпендикуляры, на которыхъ откладываютъ высоты реекъ Cc, Dd...; соединивъ затѣмъ точки A, c, d..., получаютъ кривую линію, которая будетъ тѣмъ лучше выражать неровности данной мѣстности, чѣмъ ближе были точки, гдѣ стояли рейки.

Чтобы получить достаточно ясную идею о характерѣ мѣстности, надо сдѣлать профиль ея въ нѣсколькихъ направленіяхъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ, ПОМѢЩЕННЫХЪ ВЪ РУКОВОДСТВѢ.

Часть I.

Глава I.

§ 28 (стр. 19).

1. Изъ каждой точки можно провести $n-1$ прямыхъ, слѣд. всего $n(n-1)$ прямыхъ; но при этомъ каждую мы считаемъ два раза, слѣд. число прямыхъ $= \frac{1}{2}n(n-1)$. **2**. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

3. Если 4 точки на одной прямой, то между остальными будетъ $\frac{1}{2}.4.5 = 10$ прямыхъ; соединяя каждую изъ первыхъ четырехъ точекъ съ 5-ю остальными, получимъ 20 прямыхъ; всего слѣд. $10+20$ прям.

4. 60; 56; 51. **5**. 99; 95; 90. **8** $AL : AB = \frac{2}{3}$.

9. $AB:DK = 2\frac{1}{3}$; $CK:AB = \frac{9}{91}$. **10**. $\frac{151}{38}$.

11. $AB : AK = 1$ съ точн. до $\frac{1}{10}$; $DB : CK = \frac{2}{3}$ съ точн. до $\frac{1}{9}$; $AB : AD = 2\frac{1}{2}$ съ точн. до $\frac{1}{4}$.

12. $CO = CB + BO$; $CO = CA - AO = CA - BO$.

13. $CO = AO - AC = BC - AO$ (или наоборотъ $CO = AC - AO = AO - BC$).

16. Отложить AB на произвольной прямой 14, 29, 22 раза.

17. 92,8. **18**. 8,232; 1,604 и 3,208; 4,116.

19. $22\frac{1}{2}$; $57\frac{1}{2}$ и $45\frac{1}{2}$; $77\frac{1}{2}$.

22. Пусть точки будутъ A, B, C; тогда $AB < AC + BC$; изъ обѣихъ частей этого неравенства вычесть по BC.

23. Сложить неравенство $AO + OB > AB$ съ двумя другими подобными неравенствами.

24. Сложить неравенство $AO + OC < AB + BC$ съ двумя другими подобными неравенствами.

25. Продолживъ AE, EK, KL до пересѣченія съ внѣшней ломаной въ M, N, O, получимъ $AC + CD + DM > AE + EM$; $EM + MN > EK + KN$; $KN + NF + FO > KL + LO$; $LO + OB > LB$; неравенства эти надо сложить и отъ обѣихъ частей полученнаго неравенства отнять поровну.

Глава II.

§ 43 (стр. 29).

2. FOD; $7\frac{1}{2}$; 3; $3\frac{1}{3}$; $\frac{4}{15}$; $3\frac{1}{2}$; 5; 3; $1\frac{2}{3}$.

3. 7; 7 съ точн. до 1; $\frac{4}{7}$ до $\frac{1}{7}$; $\frac{7}{3}$ до $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{6}$; 3 до $\frac{1}{2}$.

5. $^1/_3\ d$; $^2/_3\ d$; $^{11}/_{12}\ d$ или $^5/_{12}\ d$; $^5/_3\ d$, $^{23}/_{12}\ d$ или $^{17}/_{12}\ d$.
7. $^1/_2\ d$. **8**. $1^1/_8\ d$.
10. Доказат. отъ противнаго. **11**. См. предъид. зад.
13. $^1/_8\ d$. **14**. $^1/_3\ d$. **15**. $^1/_2\ d$. **16**. $^1/_6\ d$. **17**. 32.
18. d. **19**. $^1/_2\ d$. **20** $\frac{2}{n}\ d$. **22**. $^1/_2\ d$. **23**. $^5/_{16}\ d$.
24. d. **25**. d. **26**. $AOD=d-AOC$; $BOE=d-BOC$.
27. Если прямая OF идетъ внутри уг. BOC, то $COF=d-COD$; $FOB=2d-AOD-d$. **30**. $^1/_3\ d$. **31**. $^2/_{121}\ d$. **32**. $^1/_5\ d$.
33. $1^3/_4\ d$. **34**. $^1/_2\ d$. **35** $^5/_4\ d$; $^3/_4\ d$; $^5/_4\ d$.
36 $DBE=d-CBE$ и $ABC=d-CBE$, или $DBE=4d-$ $-d-d-ABC$.

Глава III.

§ 57 (стр. 39).

1. Перегнуть чертежъ по перпендикуляру. **2**. См. предъид. зад. **3**. Если оба перпендикуляра находятся по одну сторону прямой OA, то $AOB=d-BOD=FOD$; если же перпендикуляры находятся съ разныхъ сторонъ прямой OA, то продолживъ OF за точку O и означивъ это продолженіе черезъ OK, получимъ $FOD=$ $=2d-KOD$; $KOD=AOB$. **4**. Перегнуть чертежъ по OC.
5. Доказательство отъ противнаго.
6. См. предъид. зад. **7**. $^1/_2\ AOC+^1/_2\ COB=d$.
8. Воспользоваться свойствами смежныхъ и вертикальныхъ угловъ; напр. для доказательства, что уг. $c=$ уг. k, имѣемъ $c+f=g+k$; но $f=g$, слѣд. $c=k$.
9. См. зад. 8. **10**. См. зад. 8. **11**. См. зад. 8.
12. Для доказательства, что $a>l$, имѣемъ $a=f$, $l=g$; но $f>g$, слѣд. и $a>l$.
13. См. зад. 12. **14**. См. зад. 12.
15. См. зад. 12. **16**. $CEF+CED=2d$; $CED>CFE$.
17. d. **18**. Доказ. отъ противнаго.
19. Соединивъ какую нибудь точку F прямой AB съ точками C и M и проведя EF, получимъ $EOM<EFM$ или $COM<CFM$.
20. Уг. $EOA=$ уг. AOC и углу BOM.

Глава IV.

§ 75 (стр. 49).

5 $f=^7/_8\ d$. **6**. $k=^2/_3\ d$. **7**. $c=^9/_8\ d$. **8**. $m=^2/_5\ d$.
9. $c=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)d$. **10**. $b=\frac{2d}{n+1}$. **11**. $^3/_4 d$. **12**. $^7/_{10}\ d$.

16. Проведя черезъ точку пересѣченія линій, дѣлящихъ углы пополамъ, линію параллельно даннымъ прямымъ, найдемъ, что одна часть искомаго угла$=^1/_2$ одного изъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ, а другая часть$=^1/_2$ другаго; весь уголъ$=d$.

17. $^2/_3d$ (см. зад. 16).

18. $^4/_3d$ (см. зад. 16). **19**. $\frac{2d}{n}$ (см. зад. 16).

20. $\frac{2d(n-1)}{n}$ (см зад. 16). **21**. $^{13}/_{12}d$ (см. зад. 16).

23. $^5/_4d$. **24**. $^2/_9d$.

Глава V.

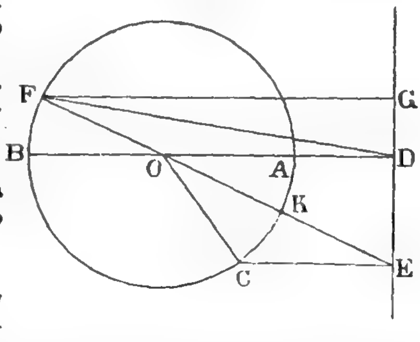
§ 128 (стр. 90).

1. $<3^1/_2$; $3^1/_2$; $>3^1/_2$. **2**. $5^3/_7$; $2^1/_3$; $^1/_{38}$; $5^5/_6$.
3. $1^7/_{16}$ съ точн. до $^1/_{16}$.
4. $1^2/_7$ съ точн. $^1/_7$; $2^1/_2$ съ точн. до $^1/_2$; $^2/_9$ съ точн. до $^1/_9$; $^2/_5$ съ точн. $^1/_5$; 1 съ точн. $^1/_9$.
5. 84°30′. **6**. $0,3d=27°$.
7. 27° и 63°; 25° и 65°; 37°30′ и 52°30′.
8. 99°. **9**. 52°30′; 127°30′. **10**. 59°10′; 11°50′.
11. 67°30′; 112°30′. **12**. $6^{01}/_2$. **13**. 147°27′; 32°33′.
14. 114°56′; 62°36′. **15**. 51°32′. **16**. 90°; 60°; 30°.
17. 56°; 11°. **18**. 0 и 16. **19**. 5 или 15.
20. Большій радіусъ=28,333.... или 58,845....
22. 8; 6; 4 или 18; 6; 4 дюй. **23**. 13; 12; 9 дюй.

§ 129 (стр. 91).

1. Доказательство основано на томъ, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками. **2**. См. зад. 1.
3. См. зад. 1. **5**. См. § 96. **6**. См. §§ 49—1 и 99.
7. См. § 96 и зад. 2-ю § 57. **8**. $OD < OE$ (чер. 571), слѣд. $AD < KE$; $OE < OCE$, $KE < CE$ а потому $AD < CE$. Такъ какъ $OD + OF > FD$, то $BD > FD$; а $FD > FG$.

Чер. 571.



10. Доказ. отъ противнаго.
11. См. §§ 100—1, 94 и обратн. теор. § 41.
12. См. §§ 100—1, 112.
13. Описать окружность на прямой, соединяющей внѣшнюю точку съ центромъ.
14. См. §§ 112 и 113.
15. Означивъ бóльшую дугу между точками прикосновенія черезъ a, меньшую—черезъ b дугу, соотвѣтствующую вписанному углу между хордою и радіусомъ, черезъ c, найдемъ, что мѣра угла между касательными$=^1/_2(a-b)=^1/_2a-^1/_2(180°-c)=^1/_2(a-180°+c)$, гдѣ $a-180°=c$.

16. Соединить съ центромъ точку касанія третьей касательной и воспользоваться тѣмъ, что прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ съ центромъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами, проведенными въ точки прикосновенія.

18. Доказ. основано на томъ, что бо̀льшая наклонная составляетъ съ прямой меньшій уголъ. Надо провести линію центровъ и сравнивать части центральныхъ угловъ по одну сторону этой линіи.

19. Доказ. отъ противнаго.

20. Соединивъ конечныя точки и точку пересѣченія прямой съ другой точкой пересѣченія данныхъ окружностей, получимъ перпендикуляръ и двѣ равныхъ наклонныхъ къ проведенной прямой.

21. См. § 100—1. **22**. Провести общую касательную.

23. Провести общую касательную и линію центровъ.

24. Основывается на теор. 22-й § 129 и теоремахъ объ измѣреніи угловъ. **25**. Проведя прямую линію черезъ центръ бо̀льшей окружности и точку пересѣченія хорды съ меньшей окружностью, получимъ уголъ, опирающійся на діаметръ меньшей окружности.

26. Прямыя, соединяющія средины хордъ съ центромъ данной окружности, будутъ образовывать съ хордами прямые углы, стороны которыхъ будутъ проходить черезъ концы радіуса CP; поэтому средины хордъ должны лежать на окружности, описанной на прямой CP, какъ на діаметрѣ.

§ 130 (стр. 93).

1. См. § 123—1. **2**. Концентрическая окружность радіуса $r+r_1$ или $r-r_1$, полагая $r>r_1$. **3**. См. зад. 2.

4. См. зад. 2-ю § 126. **5**. См. зад 4. **6**. См. зад. 5-ю § 126.

7. См. обрат. теор. § 96. **8**. Приводится къ зад. 5-й § 130 и зад. 4-й § 126. **9**. См. § 55. **10**. Приводится въ зад. 9.

11. Центръ въ точкѣ пересѣченія перпендикуляра, возставленнаго къ MN изъ средины ея, съ прямой CN. **12**. См. § 96.

13. См. § 86. **14**. См. § 86. **15**. Центръ въ точкѣ пересѣченія двухъ перпендикуляровъ: одного, возставленнаго изъ N къ AB, и другаго, возставленнаго къ MN изъ средины MN.

16. См. § 86. **17**. Изъ произвольной точки O, лежащей внѣ линіи AB, радіусомъ OA описать окружность; черезъ точку C, въ которой эта окружность пересѣчетъ AB, провести діаметръ COE; E соединить съ A. **18**. Изъ C опустить на AB перпендикуляръ CK и продолжить его за AB на $KO=CK$; O соединить съ D. **19**. Рѣшается такъ же, какъ пред. зад.

20. См. зад. 3-ю § 126. **21**. При какой нибудь точкѣ прямой AB построить уг.$=m$.

22. Пусть O будетъ требуемая окружность, KL—хорда пересѣченія; тогда перпендикуляръ, опущенный изъ центра O на KL, будетъ $\perp MN$ и пройдетъ черезъ центръ окружности C; кромѣ того перпендикуляръ изъ центра O на AB пройдетъ чрезъ средину AB; слѣд. для рѣшенія задачи надо возставить перпендикуляръ изъ средины AB и опустить перпендикуляръ изъ центра C на MN.

23. Если касательная $\parallel$ данной прямой, то точка прикосновенія опредѣлится тѣмъ, что радіусъ, проведенный въ нее, долженъ быть $\perp$ къ данной прямой. **24**. Построить на MN уголъ $= m$; тогда задача приведется къ предъидущей. **25**. Въ окружности O провести произвольную хорду $= a$ и къ ней касательную окружность, концентрическую съ данной; тогда задача сведется на зад. 23 или 24.

26. Хорда, дѣлящаяся въ точкѣ P пополамъ (см. зад. 12 § 130 и зад. 6-ю § 129). **27**. Рѣш. на осн. теор. 14-й § 129.

28. См. зад. 9-ю § 126. **29**. Раздѣлить пополамъ уголъ, образуемый прямыми MN и PQ.

30. Раздѣлить одну изъ дугъ на 8 равныхъ частей.

31 Раздѣлить уг. пополамъ; опустить перпендикуляръ.

32. Если AB и CD пересѣкаются, то зад. приводится къ зад. 29.

33. Рѣш. подобно предъид. зад. **34**. См. зад. 9-ю § 126.

35. Рѣш. на основаніи предъид. зад. Если всѣ прямыя параллельны, то зад. не возможна.

36. Пров. въ M касательную къ C; тогда зад. сводится на зад. 33.

37. Пусть O требуемая окружность; тогда $OC = r + r_1$, гдѣ r радіусъ окруж. C, а r_1 рад. окр. O; а $OM = r_1$. Продолживъ OM за точку M и отложивъ на ней $MN = r$, получимъ $ON = r + r_1$; слѣд. перпендикуляръ, опущенный изъ O на CN, пройдетъ чрезъ средину CN. Поэтому для отысканія центра окруж. O надо возставить изъ M перпендикуляръ къ AB, отложить на продолженіи его радіусъ r, полученную точку соединить съ M и изъ средины этой линіи возставить перпендикуляръ.

38. См. зад. 10-ю § 126. **39**. См. зад. 38.

40. Приводится къ зад. 39.

41. Разстояніе отъ центра и половина хорды составятъ прямой уг., стороны котораго проходятъ черезъ концы радіуса, проведеннаго въ точку P. Поэтому на этомъ радіусѣ описываемъ окружность, откладываемъ въ ней отъ центра данной окружности хорду $= a$ и соединяемъ точку P съ концомъ проведенной хорды. Задача не всегда возможна.

42. Провести въ точку P радіусъ; описать на немъ окружность и изъ центра ея возставить перпендикуляръ къ діаметру. Рѣшеній два.

43. На AC описать окружность. Задача имѣетъ два рѣшенія.

44. Отложить въ окруж. хорду $= a$; описать концентрическую окружность; провести касательную. Задача имѣетъ или два рѣшенія, или одно, или ни одного.

45. Вписать въ окружность уг. m; провести хорду; затѣмъ поступать такъ, какъ въ пред. зад.

46. Проведя къ окруж. C произвольную касательную, отложивъ на ней отъ точки прикосновенія длину a и соединивъ полученную такимъ образомъ точку съ центромъ, получимъ радіусъ, которымъ надо описать окружность, концентрическую съ данной.

47. См. предъид. зад.

Глава VI.

§ 142 (стр. 110).

2. 9. **3**. 1 ф. **6**. 10,59; 7,06. **7**. 0,4675; 0, 2175.
9. $^{11}/_{18}$ d; 65°8′42″; 0,9 d. **10**. 30°; 60°.
11. 53°46′20″; 65°58′20″. **12**. 81°42′; 53°6′.
15. 67°24′. **16**. 22°30′. **18**. 135°; 45°.
19. 108°. **20**. 48°. **21** 56°15′. **22**. 20°41′30″.
23. 64°58′38″. **24**. 22°50′. **25**. 20°.

26. 65°25′; $^{8}/_{9}$ d; $\frac{2(m-n)d}{n}$ и $\frac{2n-m}{n}\,d$.

27. 90°. **28**. 36°; 60°. **29**. 56°47′47″ и 66°24′26″; $\frac{2n-m}{3n}\,d$ и $\frac{2(n+m)}{3n}\,d$.

30. $n°-180°$. **31**. $\frac{2(n-1)d.}{n+1}$. **32**. $C=33°12'6''$.

34. $\frac{2}{n-1}\,d$. **35**. 84°52′51″. **36**. 103°23′.

§ 143 (стр. 112).

1. $a<b+c$; $a+a<a+b+c$. **2**. См. § 49—1.

3. По предыд. теор. $h_1<{}^1/_2\,(c+b)$; $h_2<{}^1/_2\,(c+a)$; $h_3<{}^1/_2(a+b)$.

7. $A+B+C=B+B_1$, или $C=B_1-A=B_1-A_1$.

8. $A+B+C=d+B+B_1$, откуда $C=d-(A-B_1)=d-(A_1-B_1)$.

9. $A+B+C=A+A_1+B+B_1$. **10**. Въ первомъ случаѣ уг. C и C_1 должны равняться нулю; во второмъ сумма уг. въ двухъ треуг.$=6d$. **11**. Опустить перпендикуляръ изъ вершины на основаніе треуг. и сравнить углы двухъ прямоуг. треуг.

12. См. §§ 68,137.

13. См. § 68 и § 137 теор. 1.

15. См. теор. 12-ю § 143, § 68 и § 137.

18. Треуг. ACD и CBE равнобедренные, слѣд. уголъ $ACD=$ $=d-{}^1/_2\,DAC$; уг. $BCE=d-{}^1/_2CBE$: уг. $ACD+$уг. $BCE=$ $=2d-{}^1/_2\,(DAC+CBE)=2d-d$.

19. Въ такомъ треуг. уг. при вершинѣ$=36°$, а при основ $=72°$.

20. Уг. $DAE=2d-ADB-AEC=2d-{}^1/_2ABC-{}^1/_2ACB=$ $=2d-ABC$.

21. Этотъ уголъ$=2EBC=ACB$.

22. Каждая сторона шестиуг.$={}^1/_3$ стор. треуг.; уг.$=120°$.

23. Соединить точку пересѣченія прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ углы, съ точками, дѣлящими сторону между этими углами.

25. Къ меньшему углу приложить такой же уголъ въ сторону, противоположную гипотенузѣ, и продолжить противолежащій катетъ; получится равностор. треуг.

26. Уг. $BAD=BDA=ACB+CAD$;

$$\begin{array}{l}
\text{уг }\; CAE=AEC=ABC+BAE\\
\hline
d+EAD=\qquad\quad d+CAD+BAE
\end{array}$$

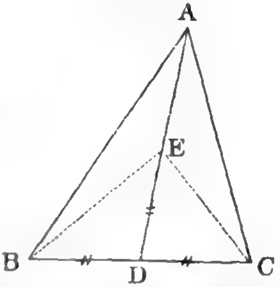
27. См. § 136 теор. 2 и § 137 теор. 1.

28. См. § 68 и § 137. **29**. См. § 68 и § 137.

30. См. § 68 и § 137. **31**. См. § 137.

32. $BD=DC$ (чер. 572), $AD>BD$; отложимъ $DE=BD$, проведемъ EB и EC; уг. $BEC=d$ по пред. теоремѣ; уг. $EAC<DLC$ и $EAB<BED$.

Чер. 572.



33. Доказ. подобно предъид.

35. На основаніи свойствъ наклонныхъ.

36. См. §§ 136 и 137; надо продолжить прямую, дѣлящую уг. пополамъ, за точку пересѣченія ея съ стороной треуг.

37. См. зад. 10. **38**. См. зад. 10.

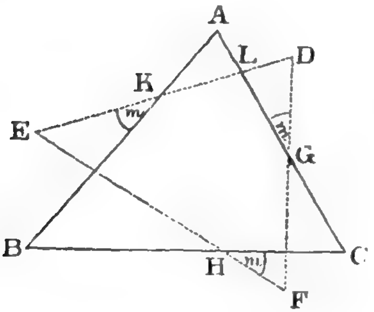
39. Положимъ, что стороны новаго треугольн. $A_1B_1C_1$ будутъ внѣ даннаго треуг. ABC, а m есть уголъ, образуемый сторонами новаго треугольника со сторонами даннаго; по свойству внѣшняго угла $B+m=B_1+m$, $C+m=C_1+m$, $A+m=A_1+m$.

40. Уг. $AEK=DLG$ (чер. 573); слѣд. уг. $A+m=$уг. $D+m$.

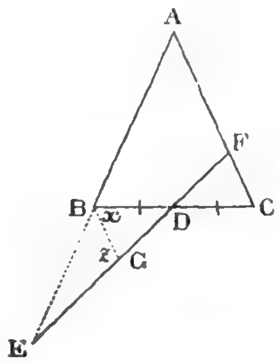
41. На чертежѣ образуются два равнобедр. треуг. съ равными угл. при вершинахъ, а слѣд. и при основаніяхъ.

42. $BG \parallel AC$ (чер. 574); треуг. $DFC=DBG$ и слѣд. $BG=FC$; уг. $z>x$; $x=ABC$; $ABC>$уг. E; $x>E$ и $BE>BG$.

Чер. 573.



Чер. 574.



43. Треугольн. $ADB=AEC$ (чер. 575); отложивъ $DF=AD$, получимъ треуг. $ADE=BDF$ и слѣд. $BF=AE=AD$ и уг. $F=$уг. DAE; но $AB>AD$ и слѣд. $AB>BF$; поэтому уг. $BFD>$уг. BAD.

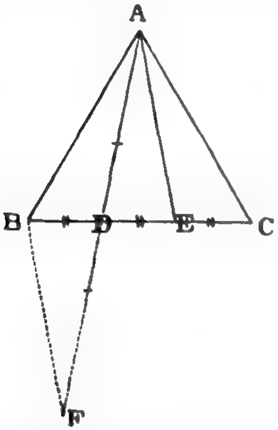
44. Доказать равенство трехъ треуг., образованныхъ сторонами даннаго и новаго треуг.

45. Доказ. подобно предъид.

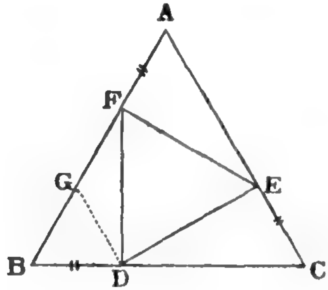
46. Проведемъ (чер. 576) $DG \parallel AC$; уг.$GDB=60^\circ$, а уголъ $FGD=120^\circ$; изъ треуг. BGD имѣемъ $BG=BD=\frac{1}{3}\,AC$, а потому $FG=\frac{1}{3}\,AC$, треуг. FGD равнобедр. и уг. $GDF=30^\circ$.

47. Проведемъ (чер. 577) $EF \perp AD$ и $EG \parallel AC$; тогда $AD < {}^1/_2\,(AE + AF)$; треуг. $EDG = CDF$, ибо треуг. $ADE = ADF$; слѣд. $EG = CF$. Въ треуг. BEG уг. $G =$ уг. ACD, который боль-

Чер. 575.



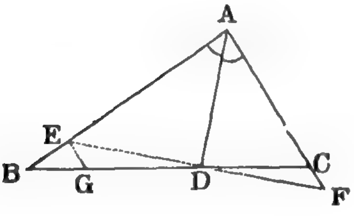
Чер. 576.



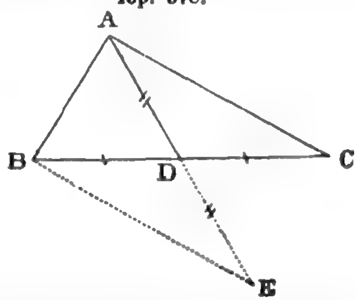
ше уг. F, равнаго уг. AED; а уг. $AED >$ уг. B; слѣд. уг. $G >$ уг. B въ треуг. BEG и $BE > EG$, ${}^1/_2\,(AE + AF) < {}^1/_2\,(AB + AC)$.

48. На основаніи предъидущ. теоремы.

Чер. 577.

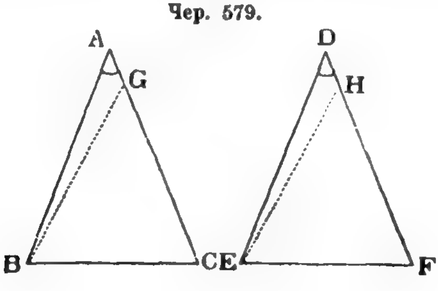


Чер. 578.



49. $DE = AD$ (чер. 578); треуг. $BDE = ADC$ и слѣдовательно $BE = AC$; изъ треуг. ABE имѣемъ $AE = 2AD < AB + BE$.

Чер. 579.



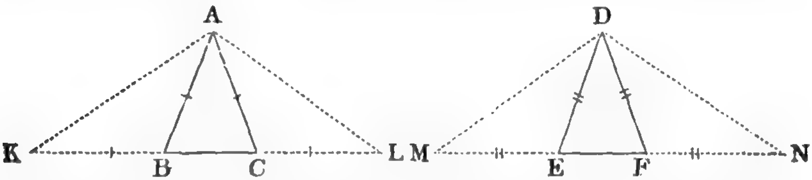
50. На основанія предъидущ. теоремы.

51. Слѣдствія теоремъ о равенствѣ треуг.

52. На основанія теоремъ о равенствѣ треуг.

53. Пусть (чер. 579) уг. $A=$уг. D и $AB-BC=DE-EF$. Отложимъ $CG=BC$ и $FH=FE$; тогда $AG=DH$ и треуг. $ABG=$

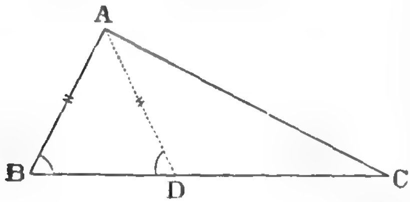
Чер. 580



$=DEH$ (потому что въ равноб. тр—кахъ BGC и EHF углы C и F равны); слѣд. $AB=DE$, послѣ чего докажемъ, что треуг. $ABC=$ $=DEF$. Если положимъ, что $AB+BC=DE+EF$, то для доказательства равенства тр—ковъ надо продолжить сторону треуг. за вершину и на продолженіи отложить основаніе.

54. Сдѣлавъ построеніе, указанное на чер. 580, найдемъ треуг. $AKL=DMN$, ибо $KL=MN$ по условію, уг. $M=$уг. K и уг. $L=N$, какъ половины равныхъ уг. B и E, C и F; слѣд. $AK=DM$, а потому треуг. $ABK=DEM$, откуда $AB=DE$.

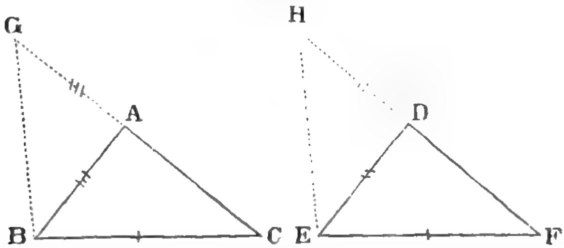
Чер. 581.



55. При наложеніи треуг. они могутъ совмѣститься и слѣд. углы противъ большихъ сторонъ равны; или треуг. не совмѣщаются и тогда получается чер. 581, въ которомъ треуг. ABD равнобедр. и слѣд. $D+B=2d$.

56. Пусть (чер. 582) $BC=$

Чер. 582.

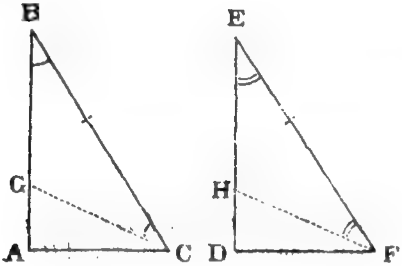


EF, $AB+AC=DE+DF$ и $AC>AB$. Сдѣлавъ указанное на чер. построеніе, получимъ треуг. $BGC=EHF$ по предъид. теоремѣ, ибо $BC=EF$, $GC=HF$ по условію, уг. $G=$уг. H какъ половины прямыхъ угл. (треуг. AGB и DHE равнобедренные) и углы GBC и HEF оба тупые; слѣд. уг. $C=$уг. F.

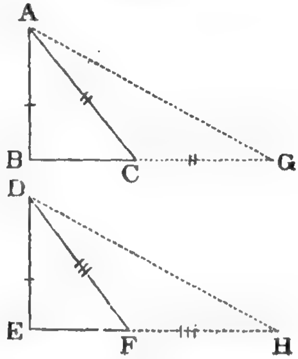
57. Пусть $BC=EF$ (чер. 583) и уг. $C-B=F-E$.

Откладываемъ уг. GCB=уг. B и уг. HFE=уг. E; тогда въ тр—кахъ AGC и DHF уг. $HFD=GCA$ по условію, слѣд. уг. AGC =уг. DHF, а потому въ равнобедр. тр—кахъ GBC и HEF уг. BGC=уг. EHF; слѣд. и уг. $B=E$.

Чер. 583.



Чер. 584.

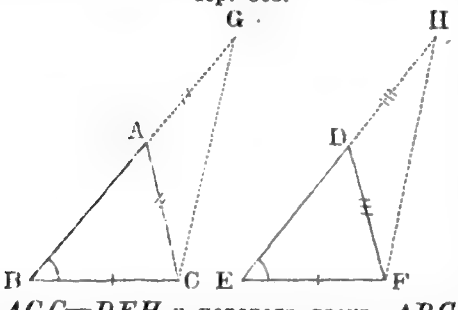


58. Пусть (чер. 584) $AB=DE$ и $AC+BC=DF+FE$. Сдѣлавъ указанное на чер. построеніе, найдемъ треуг. $ABG=DEH$, откуда уг. G=уг. H; но $G={}^1/_2C$, $H={}^1/_2F$, слѣд. уг. C=уг. F. Второй случай доказ. подобнымъ образомъ.

59. Построеніе теоремы 57-й для случая, когда $AC=DF$.

61. Пусть (чер. 585) $BC=EF$, уг. $B=E$ и $AB+AC=ED+DF$. Сдѣлавъ указанное на чер. построеніе, найдемъ треуг. $BGC=EHF$, слѣд. $GC=HF$, уг. G=уг. H и треуг. $AGC=DHF$; потомъ легко доказать, что и треугольн. $ABC=DEF$.

Чер. 585.



62 Пусть (чер. 585) $BC=EF$, уг. A=уг. D, $AB > AC$, $DE > DF$, $AB+AC=DE+DF$. Сперва докажемъ что треугольн. $BGC=EHF$ по теор. 55-й (ибо $C+{}^1/_2A>d$ и $F+{}^1/_2D>d$, такъ какъ $AB>AC$ и $DE>DF$); затѣмъ найдемъ, что треуг. $AGC=DFH$ и наконецъ треуг. $ABC=DEF$.

63. Изъ точки пересѣченія перпендикуляровъ къ двумъ сторонамъ опустить перпендикуляръ на третью; онъ раздѣлитъ ее пополамъ.

64. Доказ. основано на равенствѣ треуг.

65. Изъ точки пересѣченія прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ два угла треуг., провести прямую въ вершину третьяго угла и доказать, что этотъ уголъ раздѣлится пополамъ; для доказательства надо образовать треугольники, опустивъ изъ точки пересѣченія перпендикуляры на стороны треуг.

66. Доказ. основано на равенствѣ треуг.

§ 144 (стр. 116).

2. Описать на a полуокружность; построить при концѣ a уголъ B.

3. На сторонѣ прямаго уг. отложить отъ вершины b; описать дугу радіусомъ a. **5**. См. зад. 4 § 140.

8. На a описать дугу, вмѣщающую A; возставить перпендикуляръ. Другое рѣшеніе: изъ средины a возставить перпендикуляръ; при какой нибудь точкѣ его построить $^1/_2A$; изъ одного конца a провести параллельную сторонѣ построеннаго угла.

14. На перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины a, отложить $^1/_2a$.

20. Построить произвольный равностор. треуг.; провести высоту; отложить на ней h отъ вершины; провести параллельную.

21. Окружность, описанная на гипотенузѣ.

22. Дуга, вмѣщающая уг. m, описанная на основаніи.

23. Приводится къ зад. 3 й. **25**. См. зад 3.

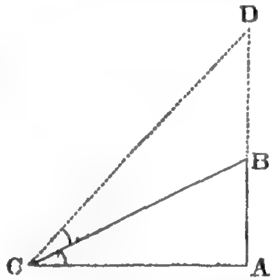
26. См. зад. 5. **27**. См. зад. 5. **28**. См. зад. 4.

29. См. зад. 5. **30**. См. зад. 3. **31**. См. зад. 3.

32. См. зад. 3.

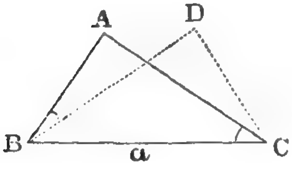
33. Пусть (чер. 586) ABC требуемый треуг. Чтобы выразить разность угловъ B и C, построимъ на CB при C уголъ $BCD=C$; тогда уг $D=ABC-DCB=B-C$. Для рѣшенія задачи надо построить треуг. DAC по катету b и углу $D=B-C$; затѣмъ другой острый уг. этого треуг. раздѣлить пополамъ.

Чер. 586.

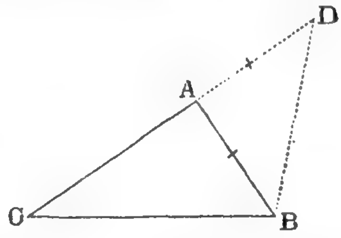


34 Пусть ABC (чер. 587) требуемый треуг.; построимъ уг. $ABD=C$ и проведемъ $CD \perp BD$; тогда уг. $DBC=B-C$; уг. $DCB=90^0-(B-C)=2C$. Въ прямоуг. треуг. DBC извѣстны $BC=a$ и уг. $DBC=B-C$; построивъ этотъ треуг. и опустивъ перпендикуляръ на линію, дѣлящую уг. DCB пополамъ, получимъ требуемый треуг.

Чер. 587.



Чер. 588.



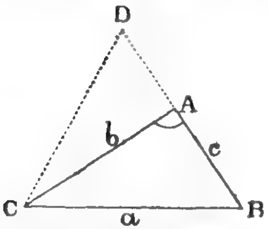
35. Пусть ABC (чер. 588) требуемый треуг.; чтобы выразить сумму катетовъ $b+c$, продолжимъ CA и отложимъ $AD=AB$; тогда въ треуг. CDB извѣстны сторона $CD=b+c$, уг. $D=45^0$ и $CB=a$; помощью этого треуг. легко построить искомый. Задача имѣетъ два одинакихъ рѣшенія.

36. Рѣш. подобно предъид., но рѣшеніе только одно.

37. Приводится къ зад. 1.

38 Пусть ABC (чер. 589) требуемый треуг. Чтобы выразить

Чер. 589.



разность между гипот. a и катетомъ c, продолжимъ c за вершину A и отложимъ $BD=a$; тогда $AD=a-c$, и въ прямоуг. треуг. ADC извѣстны катеты $AC=b$, $AD=a-c$; при помощи треуг. ADC можно построить равнобедр. треуг. DCB и слѣд. искомый треуг. ACB.

39. Приводится къ зад. 3 § 140.

40. Рѣш. подобно предъид.

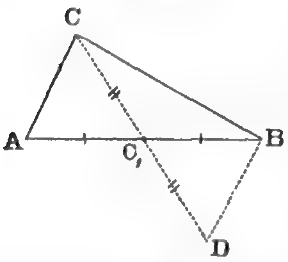
41. Приводится къ зад. 3 § 140.

42. Рѣш. подобно предъид.

43. Построить треуг. по сторонамъ a, b и углу $A+B$ между ними.

44. Пусть ABC (чер. 590) требуемый треуг.; CC_1—данная

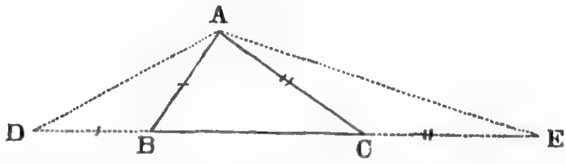
Чер. 590.



прямая, соединяющая средину AB съ вершиной C. Изъ двухъ данныхъ сторонъ одна по крайней мѣрѣ должна выходить изъ C; пусть это будетъ AC. Если вторая данная сторона есть AB, то задача приводится къ построенію треуг. ACC_1 по тремъ сторонамъ, такъ какъ $AC_1 = {}^1/_2 AB$. Если вторая данная сторона есть BC, то продолживъ CC_1 на длину $C_1D = CC_1$ и соединивъ D съ B, получимъ треуг. CBD, въ которомъ извѣстны CB, $BD=AC$ (ибо треуг. $BDC_1=ACC_1$) и $DC=2CC_1$.

45. Пусть треуг. ABC (чер. 591) требуемый. Чтобы выразить

Чер. 591.



периметръ, продолжимъ BC, отложимъ $BD=BA$, $CE=CA$; въ треуг. ADE будутъ извѣстны $DE=p$, $D={}^1/_2 B$, $E={}^1/_2 C$; посредствомъ этого треуг. нетрудно построить требуемый.

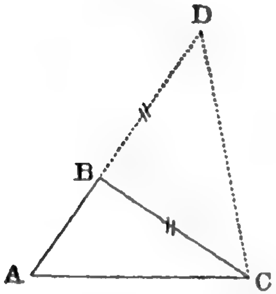
46. См. зад. 45. **47**. См. зад. 45. **48**. См. зад. 45.

49. Пусть (чер. 592) ABC требуемый треуг. Продолживъ AB и отложивъ $BD=BC$, получимъ треуг. ADC, въ которомъ извѣстны AC, AD и уг. A. Построивъ ADC, легко построить требуемый треуг.

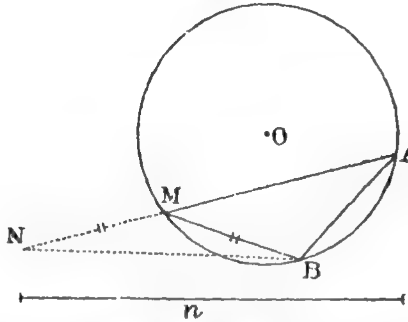
50. Построить равностор. треуг.

51. Пусть (чер. 593) M искомая точка. Чтобы выразить сумму разстояній AM и BM, продолжимъ AM и отложимъ $MN=MB$; MNB будетъ равнобедр. треуг., и уг. $MNB={}^1/_2 AMB$; а уг. AMB извѣстенъ, такъ какъ опирается на данную дугу AB. Соединивъ A и B, получимъ треуг. ANB, въ которомъ извѣстны AB, $AN=n$ и уг. ANB. Построивъ этотъ треуг., найдемъ искомую точ-

Чер. 592.



Чер. 593.



ку M. Рѣшеній два. Подобнымъ образомъ рѣшается задача и при второмъ условіи; тогда надо строить треуг. по даннымъ AB, n и углу, лежащему противъ AB и равному $90^0+{}^1/_2AMB$.

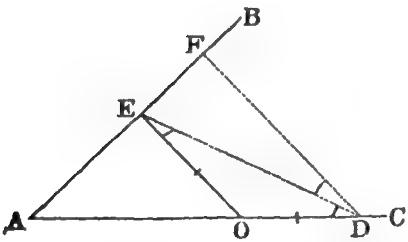
52. Описать на b дугу, вмѣщающую уг. B; тогда задача приведется къ предъид.

53. См. зад. 52. **54**. Построить треуг. по сторонѣ p и угламъ въ 30^0.

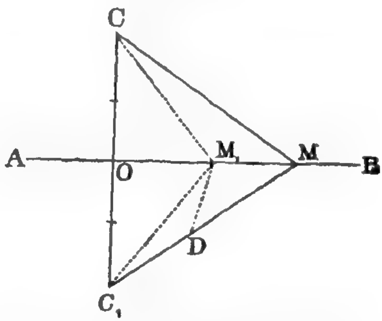
55. Пусть (чер. 594) O есть требуемая точка; тогда треуг. ODE равнобедр.; проведя $DF \perp AB$, получимъ $OE \parallel FD$, уг. $OED=FDE$, слѣд. и уг. $ODE=FDE$, т. е. DE дѣлитъ уг. ADF пополамъ.

56. $CO \perp AB$ (чер. 595): $C_1O=CO$; проведя прямую C_1DM, получимъ искомую точку M. Дѣйствительно, проведя CM, найдемъ

Чер. 594.



Чер. 595.

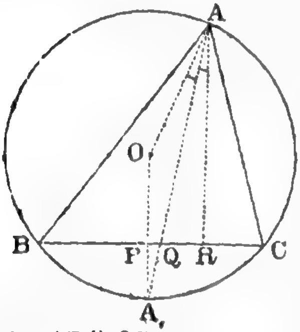


$CM-MD=C_1M-MD=C_1D$; взявъ же на AB другую точку M_1, найдемъ $CM_1-M_1D=C_1M_1-M_1D<C_1D$.

57. Пересѣчь данныя прямыя произвольной прямой и раздѣлить пополамъ углы, образованные ею съ данными линіями; потомъ пересѣчь ихъ другой произвольной прямой и поступить такъ же съ образовавшимися отъ этого углами; получимъ двѣ точки прямой, дѣлящей уг. между MP и NQ пополамъ. Рѣшеніе основано на теор. 65-й § 143.

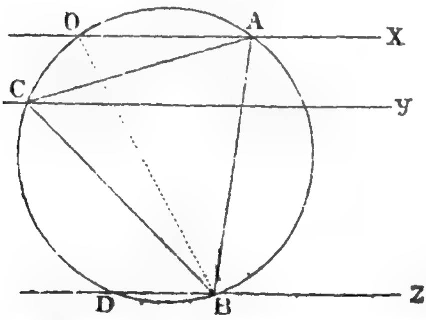
58. Пусть ABC (чер. 596) требуемый треуг. Опишемъ окружность черезъ A, B, C; продолжимъ AQ, дѣлящую пополамъ уг. A, до пересѣченія въ окруж. въ A_1 и соединимъ центръ O съ A и A_1: AA_1 дѣлитъ пополамъ уг. BAC, а слѣд. и дугу BA_1C; поэтому OA_1 пройдетъ черезъ средину P хорды BC, будетъ $\perp BC$ и слѣд. $\parallel AR$, т. е. h_a. Отсюда слѣдуетъ, что уг. $OA_1Q = A_1AR$; но уг. $OA_1Q = OAQ$, ибо треуг. AOA_1 равнобедр.; слѣд. уг. $A_1AR = OAQ$, т. е. AQ дѣлитъ уг. OAR пополамъ. Этотъ выводъ даетъ возможность рѣшить задачу. Дѣйствительно, въ прямоуг. треуг. AQR извѣстна гипотенуза AQ и катетъ AR. Построивъ треуг. AQR, можно построить уг. $QAO = QAR$; тогда найдемъ прямую OA, на которой лежитъ центръ O. Затѣмъ, зная длину AP, можно найти точку P, средину стороны BC, и тогда будетъ извѣстенъ перпендикуляръ PO; стало быть мы опредѣлимъ окружность O, пересѣченіе которой съ PR дастъ остальныя вершины B и C треуг. BAC. Для доказательства, что построенный треуг. ABC есть требуемый, надо доказать, что прямая AQ дѣлитъ уг. BAC пополамъ. Для этого продолжаемъ OP и AQ до пересѣченія въ A_1; тогда уг. $OA_1A = QAR$, ибо $AR \parallel OP$; но уг. $QAR = QAO$ по построенію, слѣд. треуг. OAA_1 равнобедр., $OA = OA_1$, т. е. точка A_1 лежитъ на окруж. O. А такъ какъ точка A_1 лежитъ и на перпендикулярѣ OP, опущенномъ изъ центра на хорду, то слѣд. дуга BA_1C дѣлится въ A_1 пополамъ, и потому линія AA_1 или, что тоже, AQ дѣлитъ пополамъ уг. BAC.

Чер. 596.



59. Пусть (чер. 597) ABC требуемый треуг. Черезъ A, B, C проведемъ окружность, и пусть она пересѣчетъ параллель X въ O. Соединивъ O съ B и C, получимъ уг. $BOC = BAC = 60^0$. Легко видѣть также, что уг. $OBD = AOB = ACB = 60^0$. Отсюда такое построеніе: при какой либо точкѣ O параллели X строимъ двѣ прямыя OB и OC подъ углами 60^0 къ этой параллели; эти прямыя пересѣкутъ параллели Z и Y въ точкахъ B и C; проводимъ прямую BC и описываемъ окружность черезъ O, B, C; точка A,

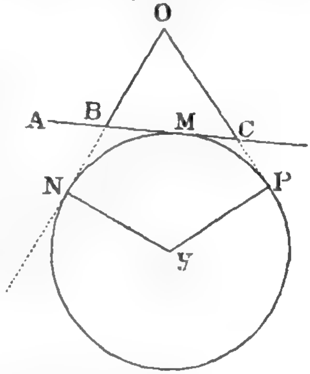
Чер. 597.



въ которой эта окружность пересѣчетъ параллель X, будетъ третья вершина.

60. Пусть (чер. 598) OBC требуемый треуг. Опишемъ окружность, касательную къ BC и къ продолженіямъ BN и CP двухъ другихъ сторонъ этого треуг.; тогда $ON=OP=\frac{1}{2}p$, ибо $BM=BN$, $CM=CP$. Поэтому для построенія искомаго треуг. надо отложить ON и OP, равныя $\frac{1}{2}p$; въ N и P возставить къ сторонамъ угла перпендикуляры: изъ точки ихъ пересѣченія y радіусомъ yN описать кругъ; къ этому кругу изъ A провести касательную $ABMC$.

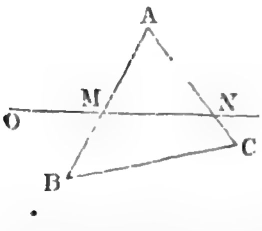
Чер. 598.



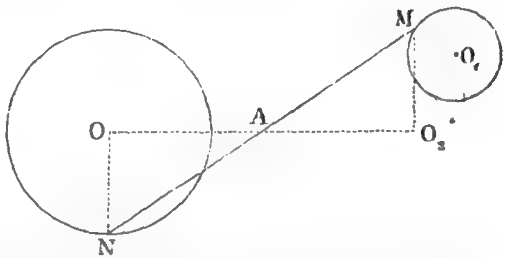
61. Такъ какъ (чер. 599) $MN=MB+NC$, то периметръ треуг. $AMN=AB+AC$, и задача приводится къ предъид.

62. Пусть (чер. 600) MN требуемая прямая: проведя AO, продолживъ ее на $AO_2=AO$ и соединивъ O_2 съ M и O съ N, получимъ треуг. $AON=AO_2M$, слѣд. $O_2M=ON$, и точка M находится на окружн., описанной изъ O_2 рад. $O_2M=ON$. Задача имѣетъ два рѣшенія; она возможна, когда $O_1O_2 < r+r_1$ и $> r-r_1$, гдѣ r и r_1 радіусы данныхъ окружностей.

Чер. 599.



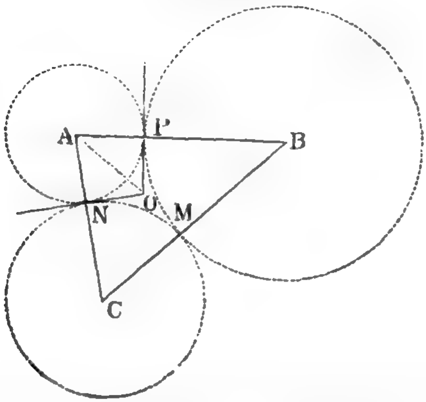
Чер. 600.



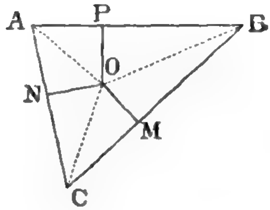
63. Пусть (чер. 601) M, N, P — точки касанія окружностей. Общая касательная къ окруж. C и A и общая касательная къ окруж. A и B встрѣтятся въ точкѣ O, лежащей на линіи, дѣлящей уг. A пополамъ, ибо треуг. $AON=AOP$. Общія касательныя въ точкахъ M и P встрѣтятся на линіи, дѣлящей уг. B пополамъ. Но эти три касательныя соотвѣтственно перпендикулярны къ AB, BC, AC и равны между собою; поэтому онѣ будутъ радіусами круга, касательнаго къ сторонамъ треуг. ABC. Для рѣшенія задачи надо найти центръ круга, касательнаго къ тремъ сторонамъ треуг. (см. зад. 35 § 130) и опустить изъ него (чер. 602) перпендикуляры OP, OM, ON на стороны AB, BC и AC треуг.; точки P, M, N будутъ точками касанія искомыхъ круговъ.

64. Пусть ABC (чер. 603) требуемая сѣкущая. Проведя OB, OC и продолживъ OB на $BD=OB$, получимъ треуг. $ABD=OBC$, слѣд. $AD=OC$. Отсюда слѣдующее построеніе: изъ A радіусомъ данной окруж. описать окруж.; изъ O удвоеннымъ радіусомъ опи-

Чер. 601.

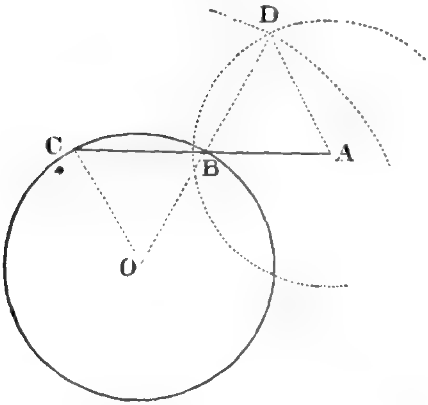


Чер. 602.

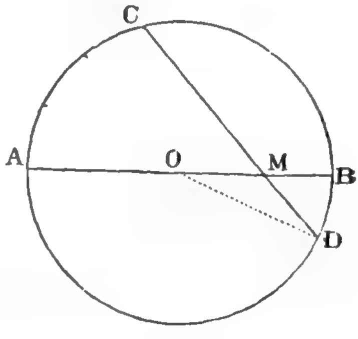


сать окруж.; точку D пересѣченія окружностей соединить съ O; B соединить съ A. Рѣшеній два или одно; задача возможна, когда

Чер. 603.



Чер. 604.

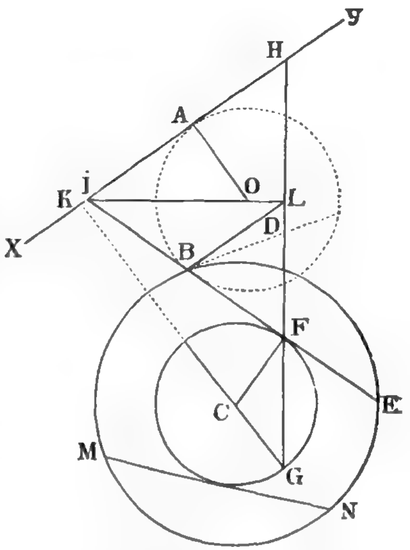


$AO<AD+DO$, т. е. меньше утроеннаго радіуса данной окружности.

63. Если M (чер. 604) на самомъ діаметрѣ и CD требуемая сѣкущая, то проведя рад. OD, получимъ треуг. MOD, въ которомъ уг. O измѣряется дугой BD. Но уг. $BMD=\frac{1}{2}(AC+BD)=2BD$; слѣд. внѣшній уг. BMD вдвое больше внутр. уг. O, и потому треуг. OMD равнобедр. и $OM=MD$. Поэтому D лежитъ на окружности, описанной изъ M рад. MO. Если M лежитъ внѣ окружности, то проведя OD, получимъ треуг., въ которомъ углы MOD и BMD будутъ внутр. угл. равнобедр. тр—ка. Рѣшеній два.

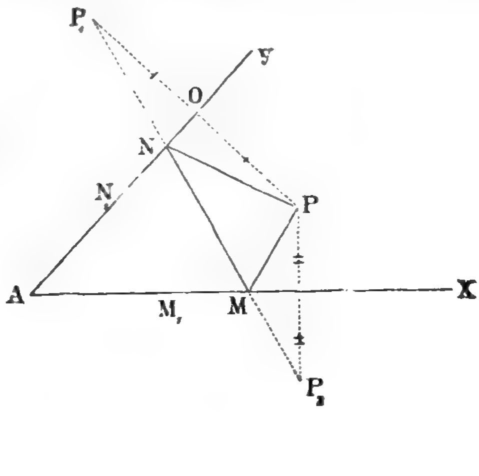
66 Пусть O (чер. 605) требуемая окруж.; тогда уг. $DBE = n$ и измѣряется $1/2$ дуги BE. Если опишемъ изъ C окруж., касательную къ BE, то всякая касательная MN къ этой новой окруж. отсѣчетъ отъ внѣшней окруж. C дугу $MN = BE$, т. е. вмѣщающую уг. n; слѣд. эту новую окруж. можно построить, проведя хорду MN, которая отсѣкла бы дугу MN, вмѣщающую уг. n. Эта окруж. коснется BE въ ея срединѣ F. Проведемъ въ ней рад. $CG \perp XY$, соединимъ G съ F и продолжимъ GF до пересѣченія съ XY въ H. Затѣмъ продолжимъ EB до пересѣченія съ XY въ I. Получимъ два треуг. CGF и FIH, въ которыхъ углы CGF и CFG перваго дополняютъ до 90^0 углы IHF и IFH втораго, такъ какъ $CG \perp IH$ и $CF \perp IF$. Но уг. $CFG = CGF$, слѣд. и уг. $IHF =$ уг. IFH, т. е. треуг. FIH равнобедр. и $IH = IF$. Кромѣ того касательныя $IA = IB$, слѣд. $AH = BF = 1/2 MN$. Итакъ точку H можно найти, отложивъ отъ A прямую $AH = 1/2\ MN$. Найдя же H, нужно провести GH и опредѣлить точку F, послѣ чего легко найти центръ искомаго круга; онъ будетъ въ точкѣ пересѣченія $AO \perp XY$ и OL, проведенной $\perp$ къ FH изъ ея средины.

Чер. 605.



67. Чтобы вписать такой треуг., надо на AY (чер. 606) найти такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ P и отъ вершины, лежащей на AX, была наименьшая; для этого (зад. 18 § 130) надо изъ P провести $PO \perp AY$, отложить $OP_1 = OP$ и соединить P_1 съ точкой на сторонѣ AX, которой еще у насъ нѣтъ. Точно также на AX надо найти точку, сумма разстояній которой отъ P и отъ точки на AY была бы наименьшая; поэтому и для AX дѣлаемъ такое же построеніе. Соединивъ P_1 и P_2, получимъ точки M и N, которыя будутъ вершинами искомаго треуг.

Чер. 606.



Дѣйствительно, периметръ треуг. PNM = прямой P_1P_2; периметръ же треуг. PN_1M_1 равенъ ломаной $PN_1M_1P_2$.

68. Описать на двухъ сторонахъ дуги, вмѣщающія уг. 120^0.

§ 166 (стр. 125).

1. $\frac{1}{2}n(n-3)$.

2. Изъ урав. $n=\frac{1}{2}x(x-3)$ опредѣлить x; получимъ 12; 100; 32.

4. Изъ урав. $2d(x-2)=md$ опредѣлить x.

6. Изъ урав. $\frac{180(x-2)}{x}=a$ опредѣлить x.

8. Въ $11^1/_3d$ заключаются слѣдующія кратныя $2d$: $2d$, $4d$, $6d$, $8d$ и $10d$; но внѣшній уг. $<2d$, слѣд. сумма внутр. угл. $=10d$; потому сторонъ 7. Для двухъ остальныхъ примѣровъ найдемъ число сторонъ 14 и 6.

9. Внѣшній уг. $<2d$; а сумма внутр. угловъ есть кратное $2d$; поэтому внѣшній уг. $=1^2/_7d$; сумма внутр. $=30d$; сторонъ 17. Для втораго примѣра число сторонъ $=20$; для третьяго $=8$.

10. $1^{13}/_{24}\ d$; $131^0 2'28''$. **11**. $1^7/_{36}d$; $^{73}/_{90}\ d$; $^{31}/_{45}d$; $1^{11}/_{36}d$.

12. $48^0 12'11''$; $51^0 50'49''$. **13**. $1^1/_6\ d$; $103^0 44'18''$.

14. $71^0 17'30''$. **15**. $52^0 55'$. **16**. $^{13}/_{16}\ d$.

17. $65^1/_2$; $90^1/_2$. **18**. $6^1/_2$ ф. **19**. 72^0; 36^0; 108^0.

20. Трапеція; парал—мъ; парал—мъ.

21. Трапеція; парал—мъ; трап. съ равными уг. при основ. **22**. 30.

§ 167 (стр. 126).

1. Сравнить треуг—ки, которые образуетъ каждая діагональ съ сторонами парал—ма.

2. На основаніи равенства треуг—въ.

3. На основаніи равенства треуг—въ.

4. Сравнить треуг—ки, образуемые сторонами новаго 4—угольника съ половинами сторонъ даннаго парал—ма.

5. На основаніи равенства треуг—въ.

6. При точкѣ, дѣлящей сторону ромба пополамъ, образуются 3 угла; изъ нихъ 2 принадлежатъ равнобедр. тр—камъ, сумма угловъ при вершинахъ которыхъ $=2d$; потому эти два угла составятъ въ суммѣ одинъ прямой; слѣд. и третій уголъ при точкѣ, дѣлящей сторону ромба пополамъ, также прямой.

7. Равенство сторонъ слѣдуетъ изъ равенства прямоуг. тр—ковъ.

8. Линіи, дѣлящія углы пополамъ, образуютъ прямые углы, ибо сумма внутреннихъ одностороннихъ угл. въ двухъ параллеляхъ $=2d$.

9. На основаніи равенства тр—въ.

10. Изъ концовъ меньшаго основанія опустить перпендикуляры на большее.

11. На основаніи равенства треуг—въ. **12**. Для доказательства 1 и 2 надо провести діагональ; а для 3 и 4 изъ вершинъ (чер. 607) A и E провести $AK \parallel DC$ и $EM \parallel HG$.

13. На основанія свойства прямой.

14. На основанія равенства треуг—въ.

15. На основ. равенства треуг.

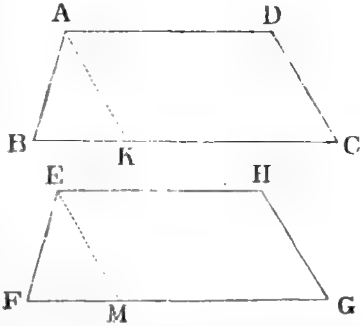
16. На основаніи свойства сторонъ параллелограмма.

17. Проведя $EF \parallel AB$, получимъ $DE=BF$; но $DE=FC$ по равенству треуг. ADE и EFC; слѣд. $BF=FC$ и $DE={}^1/_2BC$.

18. Доказ. подобно предъид.

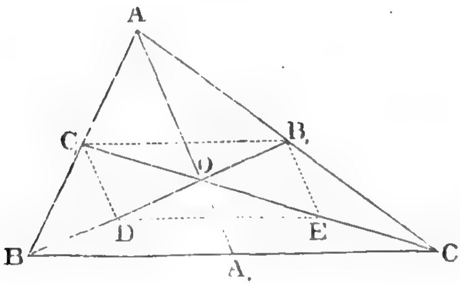
19. Проведя черезъ вершины даннаго треуг. параллели противоположнымъ сторонамъ, получимъ треуг., для котораго высоты даннаго треуг. будутъ перпендикулярами, возставленными изъ срединъ сторонъ. Чтобы доказать это, надо доказать сперва, что стороны новаго треуг. вдвое больше сторонъ даннаго, для чего можно воспользоваться параллелограммами, которые получатся при построеніи новаго треуг—ка. Перпендикуляры же, возставленные изъ срединъ сторонъ треуг., пересѣкаются въ одной точкѣ (теор. 63 § 143).

Чер. 607.

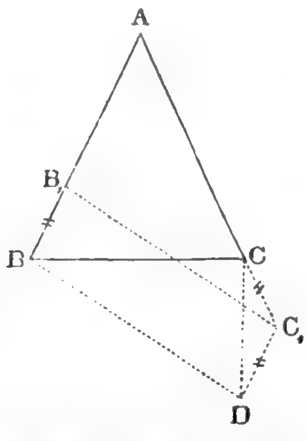


20. Пусть (чер. 608) BB_1 и CC_1, дѣлящія пополамъ стороны AC и AB, пересѣкаются въ точкѣ O. Линія DE, соединяющая середины OB и OC, параллельна BC и равна ${}^1/_2BC$ по теор. 18 § 167; линія $C_1B_1 \parallel BC$ и $={}^1/_2BC$ по той же причинѣ; слѣд. C_1B_1ED параллелограммъ и $OB_1=OD$, $OC_1=OE$; т. е. $OB_1={}^1/_3BB_1$ и $OC_1={}^1/_3CC_1$. Такъ же докажемъ, что AA_1 пересѣкается съ BB_1 въ O, отстоящей отъ B_1 на разстояніи$={}^1/_3BB_1$.

Чер. 608.



Чер. 609.



21. Пусть BAC (чер. 609) равнобедр. треуг.; построимъ другой треуг. B_1AC_1, у котораго $AB_1+AC_1=AB+AC$ (для чего отложимъ $BB_1=CC_1$) и докажемъ, что $BC<B_1C_1$. Для этого проведемъ $C_1D \parallel$ и $=BB_1$; тогда BB_1C_1D будетъ параллелограммъ и $BD=B_1C_1$. Такъ какъ $AB \parallel C_1D$, то уг. $A+$уг. $CC_1D=2d$; но треуг. BAC и CC_1D равнобедренные, слѣд. уг. $ACB+DCC_1=d$; потому $BC\perp CD$ и $BC<BD$ или $<B_1C_1$.

§ 168 (стр. 127).

1. Совокупность двухъ параллелей къ AB, находящихся отъ нея въ разстояніи a.

3. Описать дугу рад. a; провести параллельную. Рѣшеній два или одно или задача невозможна.

4. Построить равнобедр. треуг. по основанію и углу при верш.

5. Построить треуг. по двумъ сторонамъ и углу между ними

6. Построить треуг. по гипотенузѣ и суммѣ катетовъ $= {}^1/_2 p$ (см. зад. 35 § 144)

9. Построить равнобедр. прямоуг. треуг. по суммѣ гипот. и катета.

10. Рѣш. подобно предъид,

13. Построить прямоуг. треуг. по гипот. a и разности острыхъ угловъ$={}^1/_2(A-B)$. (См. зад. 34 § 144).

14. Построить треуг. по катету h и уг. A, если A острый, или уг. 180^0-A, если A тупой.

15. Построить треуг. по гипотенузѣ e и катету h; потомъ построить равнобедр. треуг. съ основаніемъ e и вершина котораго находится на другомъ катетѣ.

16 Построить треуг. по гипотенузѣ a и суммѣ катетовъ$={}^1/_2(e+f)$ (см. зад. 35 § 144).

18. Построить треуг. по гипот. a и катету h.

19. Построить треуг. изъ a, ${}^1/_2\, e$ и ${}^1/_2\, f$.

21. Построить прямоуг. треуг. по гипот. b и катету h_1; провести параллель къ b на разстояніи h_2.

22. Построить треуг. по основанію f, углу A при вершинѣ и суммѣ остальныхъ двухъ сторонъ$={}^1/_2\, p$ (см. зад 52 § 144).

23. Рѣш. подобно предъид., только уголъ будетъ 180^0-A.

25. Построить треуг. по сторонѣ $b-d$ и угл. B, C.

26. Построить треуг. по a, c и $b-d$.

27. 1) Построить треуг. по тремъ сторонамъ; 2) построить треуг. по двумъ сторонамъ и уг. между ними.

28. Задача приводится къ построенію треугольниковъ.

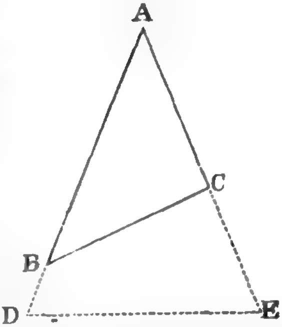
29. Рѣш. на основаніи теор. 17 § 167.

30. Пусть (чер. 610) $BD+CE=BC$; тогда $AD+AE=AB+$ $+AC+BC$, слѣд. въ треуг. DAE сумма сторонъ $AD+AE$ есть величина постоянная; поэтому DE будетъ наименьшею, когда треуг. ADE равнобедренный (см. теор. 21 § 167), т. е. когда $AE=$ $={}^1/_2(AB+AC+BC)$.

31. Совокупность двухъ параллелей къ AB, проведенныхъ изъ конечныхъ точекъ двухъ прямыхъ, равныхъ a и составляющихъ съ AB по обѣ стороны ея углы, равные m.

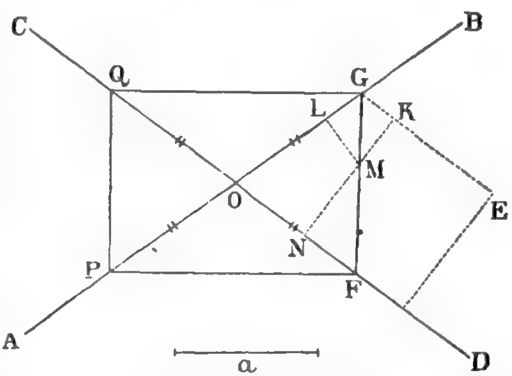
32. Если разстояніе между AB и CD равно n и $a>n$, то возстановивъ перпендикуляръ къ AB до пересѣченія съ CD, отложить на продолженіяхъ его части, равныя $\frac{1}{2}(a-n)$; получимъ точки, черезъ которыя надо провести двѣ параллели къ AB. Если $a=n$, то каждая точка между AB и CD удовлетворяетъ условію задачи. При $a<n$ задача невозможна.

Чер. 610.



33. Если (чер. 611) AB и CD пересѣкаются въ O, то проведя $EG \parallel OD$ на разстояніи a отъ нея, отложимъ $OF=OG$; точки прямой GF будутъ удовлетворять требованію; взявъ напр. точку M и проведя $ML \perp OB$ и $MN \perp OD$, найдемъ $ML+MN=MK+MN=a$ такъ какъ треуг. MGL $=MGK$, ибо имѣютъ общую гипотенузу MG и уг. $MGL=$уг. MGK, потому что каждый изъ нихъ равенъ уг. GFO. Отложимъ отъ O части $OP=OQ=OG=OF$, получимъ прямоугольн. $PQGF$, совокупность сторонъ котораго составляетъ искомое геометр. мѣсто.

Чер. 611.



34. Если $a<n$, то геометр. мѣсто есть совокупность двухъ прямыхъ $\parallel AB$ и CD и проведенныхъ на разстояніи $\frac{1}{2}(n+a)$ и $\frac{1}{2}(n-a)$ отъ AB. Если $a=n$, то геом. мѣстомъ будетъ неопредѣленная часть плоскости, лежащая внѣ пространства, заключеннаго между AB и CD. При $a>n$ задача невозможна.

35. Совокупность продолженій сторонъ прямоуг. $PQGF$ зад. 33.

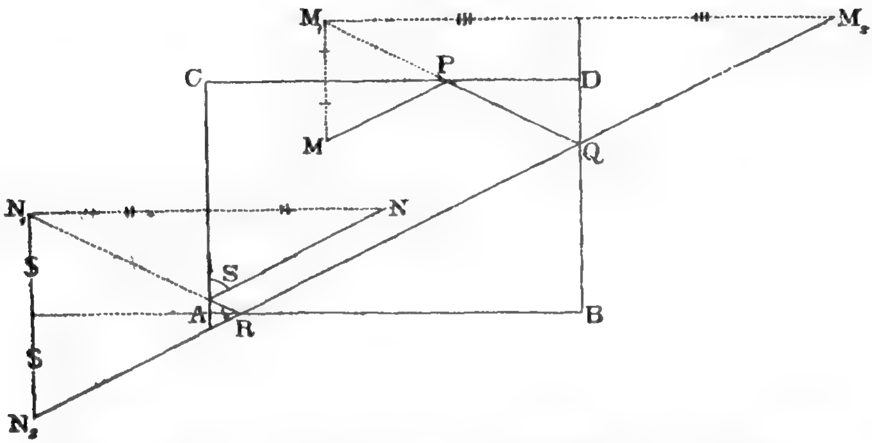
36. На основаніи теор. 20 й § 167 приводится къ зад. 44-й §144.

37. Описать на a дугу, вмѣщающую уг. A; провести параллель на разстояніи h. Рѣшеній 2 или 1 или ни одного.

38. Взявъ уг. $MNP=B$, проведемъ къ сторонѣ его NP параллель на разстояніи h; эта параллель пересѣчетъ MN въ точкѣ D, которая будетъ вершиной искомаго треуг.; потомъ надо построить треуг. по сторонѣ ND, уг. N и суммѣ двухъ другихъ сторонъ, равной $p-ND$ (зад. 49-я § 144).

39. Опустивъ (чер. 612) изъ M и N перпендикуляры на CD и AC и отложивъ на продолженіяхъ этихъ перпендикуляровъ части, равныя каждому изъ нихъ, получимъ точки M_1 и N_1; поступивъ подобнымъ образомъ съ точками M_1 и N_1, получимъ точки M_2 и N_2;

Чер. 612.

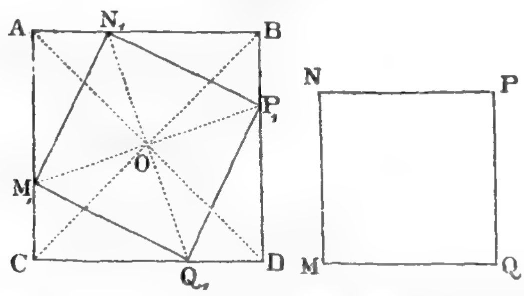


соединивъ M_2 и N_2, потомъ Q и M_1, наконецъ P и M, найдемъ, что шаръ надо ударить по направленію MP; онъ ударится въ Q,R,S и N. При этомъ $MP \parallel QR \parallel NS$ и $PQ \parallel RS$.

40. Задача есть частный случай предъидущей. Путь, который пройдетъ M, есть параллелограммъ съ сторонами, параллельными діагоналямъ билліарда.

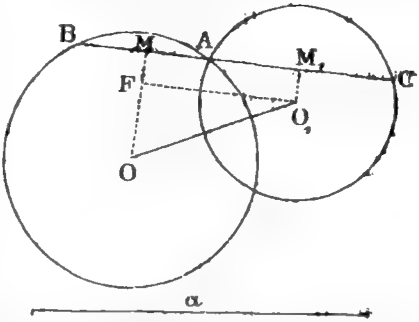
41. Пусть (чер. 613) $MNPQ$ приметъ положеніе $M_1N_1P_1Q_1$; тогда треуг. $AM_1N_1=BN_1P_1=DP_1Q_1=CQ_1M_1$, ибо имѣютъ равныя гипотенузы и острые углы; слѣд. $AN_1=BP_1=DQ_1=CM_1$. Проведя діагонали AD и N_1Q_1, получимъ треуг. $AON_1=DOQ_1$ ибо $AN_1=DQ_1$ и углы равны; слѣд. $OA=OD$ и $ON_1=OQ_1$. Такъ же докажемъ, что $OP_1=OM_1=OQ_1=ON_1$. Поэтому, чтобъ вписать квадратъ $MNPQ$ въ $ABCD$, надо изъ точки пересѣченія діагоналей $ABCD$ описать окружность радіусомъ$=\frac{1}{2}$ діагонали $MNPQ$. Если діагональ квад. $MNPQ$ меньше стороны квад. $ABCD$, то зад. невозможна.

Чер. 613.



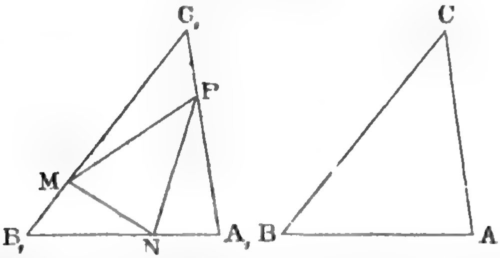
42. Пусть (чер. 614) BAC требуемая сѣкущая. Опустивъ изъ O и O_1 перпендикуляры OM и O_1M_1 на BC и проведя $O_1F \parallel BC$, получимъ треуг. OO_1F, гдѣ гипотенуза OO_1 есть разстояніе центровъ, а катетъ $O_1F = MM_1 = {}^1/_2 BA + {}^1/_2 AC = {}^1/_2 BC = {}^1/_2\, a$. Итакъ для рѣшенія задачи надо построить треуг. OO_1F и потомъ изъ A провести параллель къ O_1F. Задача имѣетъ 4 рѣшенія, если взять обѣ точки пересѣченія окружностей и если $OO_1 > {}^1/_2 a$. Наибольшая величина BAC есть $2OO_1$.

Чер. 614.



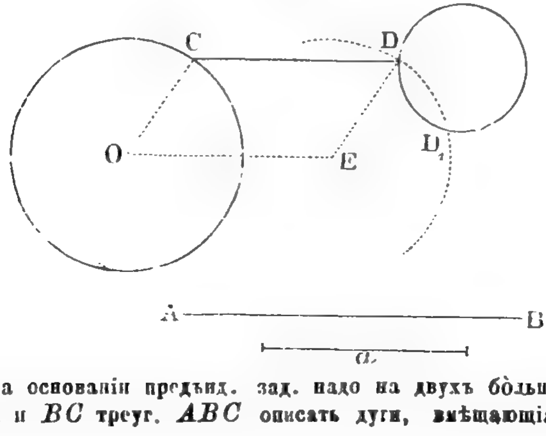
43. Вершина B_1 (чер. 615) должна быть на дугѣ, описанной на

Чер. 615.



MN и вмѣщающей уг. B; вершина же C_1 на дугѣ, описанной на MP и вмѣщающей уг. C. Такимъ образомъ мы получимъ двѣ окружности, одна изъ точекъ пересѣченія которыхъ будетъ M; черезъ эту точку надо провести общую сѣкущую $= BC$ (зад. 42).

Чер. 616.



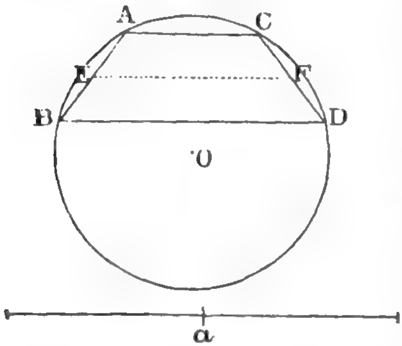
44. На основаніи предъид. зад. надо на двухъ бо́льшихъ сторонахъ BA и BC треуг. ABC описать дуги, вмѣщающія углы $60°$;

затѣмъ черезъ вершину меньшаго изъ угловъ треуг. ABC, именно черезъ точку B, провести общую сѣкущую къ окружностямъ, проходящимъ черезъ B, параллельно линіи центровъ этихъ окружностей. Это и будетъ одна сторона требуемаго треуг. Остальныя стороны получимъ, соединивъ концы первой стороны съ A и C. Треуг. будетъ имѣть наибольшій периметръ, ибо общая сѣкущая, какъ принадлежащая двумъ большимъ изъ всѣхъ трехъ окружностей, притомъ параллельная линіи центровъ, есть наибольшая (см. зад. 42-ю § 168).

45. Пусть (чер. 616) CD требуемая прямая. Соединивъ O съ C, проведя $OE \parallel$ и $= CD$ и соединивъ D съ E, получимъ $DE = OC$; слѣд. точка D находится отъ E въ разстояніи OC. Поэтому для рѣшенія задачи надо, найдя точку E, описать изъ нея окруж. рад. $= OC$; потомъ изъ D и D_1 провести прямыя $\parallel AB$.

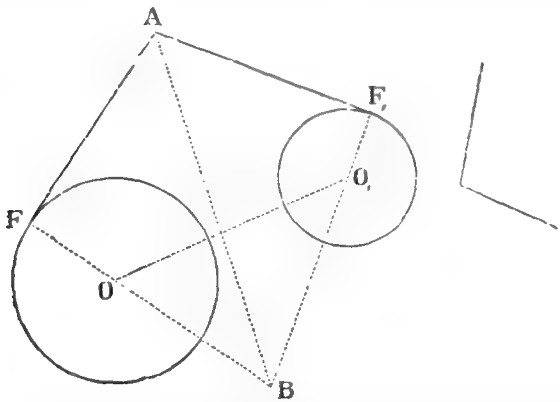
46. Пусть (чер 617) AC и BD искомыя хорды. Проведя AB и CD, получимъ трапецію: проведя среднюю линію ея EF, найдемъ $EF = {}^1/_2 a$. Поэтому точка F находится на окружн., описанной изъ E рад. $= {}^1/_2\ a$. Такъ какъ хорды AB и CD равны вслѣдствіе равенства дугъ AB и CD, то хорды AB и CD находятся въ равномъ разстояніи отъ O и слѣд. F лежитъ на окруж., описанной изъ O рад. OE. Описавъ эту окружн., опредѣлимъ F; а проведя въ F касательную къ этой окруж., найдемъ C и D. Задача возможна, если a не больше $4OE$.

Чер. 617.



47. Пусть (чер. 618) AF и AF_1 требуемыя касательныя. Про-

Чер. 618.

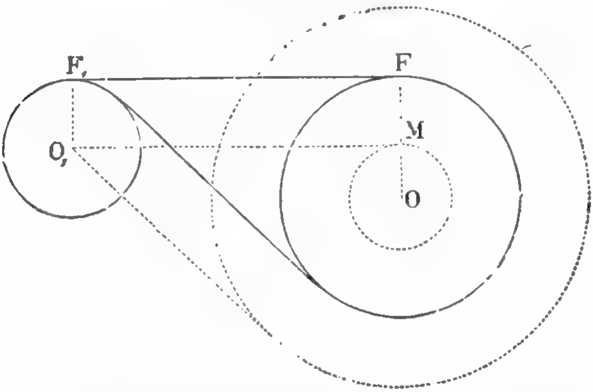


ведя OF и O_1F_1 и продолживъ ихъ до пересѣченія въ B, получимъ четыреуг. FAF_1B, въ которомъ углы F и F_1 прямые; слѣд. уг. $B=$ $=180^\circ-A=180^\circ-n$. Треуг. $ABF=ABF_1$, слѣд. $BF=BF_1$. Но $BF=OB+OF$; $BF_1=O_1B+O_1F_1$; слѣд. $OB+OF=O_1B+$ $+O_1F_1$, или $O_1B-OB=OF-O_1F_1$, и въ треуг. OO_1B извѣстны основаніе OO_1, уг. $B=180^\circ-n$ и разность двухъ остальныхъ сторонъ O_1B-OB, равная разности радіусовъ. Такой треуг. можно построить (см. зад. 53 § 144).

48. Совокупность двухъ линій, проведенныхъ параллельно AB на разстояніи r отъ нея. **49**. См. предъид. зад.

50. Пусть FF_1 общая касат. (чер. 619); тогда OF и O_1F_1 перпендикулярны къ FF_1; если проведемъ $O_1M \parallel FF_1$, то OF и O_1F_1 будутъ перпендикулярны къ O_1M. Одна изъ точекъ линіи O_1M, именно O_1, извѣстна; чтобы опредѣлить M, замѣтимъ, что O_1F_1FM есть прямоуг. и $MF=O_1F_1$; слѣд. $OM=OF-MF=r-r_1$.

Чер. 619.



Если изъ O опишемъ окруж. рад.$=r-r_1$, то O_1M будетъ къ ней касательная, ибо $O_1M \perp OM$ и $OM=r-r_1$. Такимъ образомъ опредѣлится точка M; а зная прямую O_1M, легко уже провести и касательную FF_1. Такъ какъ изъ O_1 можно къ окруж. OM провести двѣ касательныхъ, то мы получимъ 2 рѣшенія. Другія два рѣшенія получатся, если изъ O описать окруж. рад. $r+r_1$ и изъ O_1 провести къ этой окруж. двѣ касательныя. Всего слѣд. будетъ 4 рѣшенія.

Задача имѣетъ 4 рѣшенія, когда $OO_1>r+r_1$; 3 рѣшенія, когда $OO_1=$ $=r+r_1$; 2 рѣшенія, когда $OO_1<r+r_1$ и $>r-r_1$; 1 рѣшеніе, когда $OO_1=r-r_1$; задача невозможна, если $OO_1<r-r_1$.

51. Отложить въ окруж. O_1 хорду$=a$; описать изъ O_1 окруж., касательную къ этой хордѣ; тогда зад. приведется къ предъид.

52. Приводится къ зад. 50-й.

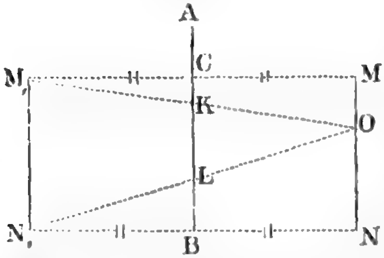
Глава VII.

§ 231 (стр. 171).

1. $6\frac{7}{8}$; $9\frac{3}{8}$. **2**. Параллельна. **3**. 17,36; 12,4.
4. 18. **5**. $17\frac{1}{2}$; $18\frac{1}{3}$; $13\frac{3}{4}$. **6**. 6 ф. 6 д.; 8 ф. 10 д.

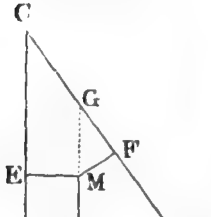
7. $13^1/_2$ ф. **8**. $5^5/_6$ д.; $6^2/_3$. **9**. 23,1.
10. 51,08; 102,16 и 20,432; 40.864. **11**. $5^2/_5$; 6; $6^3/_4$.
12. 1) $b_1=1$ ф. 10 д; $c_1=2$ ф. 3 д.; 2) $a_1=17{,}52$; $b_1=15{,}33$.
13. 1) 10,8; 2) 7 д. 2,8 лин. **14**. 1) $4^{15}/_{16}$; 2) 2,7.
15. 1) 27; 2) $24^3/_{16}$.
16. $\frac{ab_1}{b}$; 1) $131^1/_3$ ф.; 2) $112^1/_8$; 3) $42^1/_6$; 4) 212.
17. $10^{10}/_{11}$. **18**. Если AB (чер. 620) есть зеркало, MN—наблюдатель, O—его глазъ, то опустивъ изъ M и N перпендикуляры на AB и отложивъ $CM_1=CM$, $BN_1=BN$, получимъ M_1N_1—изображеніе наблюдателя. Это изображеніе наблюдатель увидитъ подъ уг. M_1ON_1, и наименьшій размѣръ зеркала, необходимый для этого, будетъ KL. Изъ подобія треуг. OM_1N_1 и OKL найдемъ $KL={}^1/_2\,MN=1$ ар. 2 в. Изъ подобія треуг. ON_1N и LN_1B получимъ $LB={}^1/_2\,ON=1$ ар. 1 в.

Чер. 620.



19. 1) $a=51$; $p=39^{12}/_{17}$; $q=11^5/_{17}$; $h=21^3/_{17}$.
2) $a=6$; $p=3{,}84$; $q=2{,}16$; $h=2{,}88$.
3) $a=19{,}465$; $p=19{,}009$; $q=0{,}455$; $h=2{,}94$.
20. $c=2{,}94$; $h=2{,}67$; $p=1{,}22$; $q=5{,}87$.
21. $q=93{,}8$; $a=170{,}06$; $p=76{,}12$; $c=113{,}8$.
22. $h=9{,}01$; $a=18{,}12$; $q=9{,}99$; $b=13{,}45$.
23. $h=40{,}32$; $b=53{,}57$; $c=61{,}23$.
24. $c=4200$; $a=15000$; $q=13824$; $b=14400$.
25. Продолживъ DM (чер. 621) до пересѣченія съ гипотенузой, получимъ $BGD \sim MFG$; поэтому $\frac{MF}{DB}=\frac{MG}{BG}$, или $\frac{x}{c-m}=\frac{DG-n}{BG}$.

Чер. 621.



Изъ подобія же треуг. BGD и ABC слѣдуетъ $\frac{DG}{b}=\frac{c-m}{c}=\frac{BG}{a}$; поэтому $x=\frac{bc-bm-cn}{a}$.

26. Изъ урав. $\frac{a}{24}=\frac{24}{a-14}$ найдемъ $a=32$; потомъ опредѣлимъ $q=18$; $c=21{,}16\ldots$ **27**. Высшій предѣлъ для $b+c$ есть $a\sqrt{2}$. Изъ урав. $b+c=s$ и $b^2+c^2=a^2$ найдемъ $b=\frac{s+\sqrt{2a^2-s^2}}{2}$; $c=\frac{s-\sqrt{2a^2-s^2}}{2}$; $b=13{,}535$; $c=6{,}465$. **28**. $b=\frac{d+\sqrt{2a^2-d^2}}{2}$; $c=\frac{-d+\sqrt{2a^2-d^2}}{2}$, гдѣ $d=b-c$; $b=32{,}835$; $c=22{,}835$.

29. Имѣемъ урав. $a+b+c=s$; $a^2=b^2+c^2$; $\frac{h}{b}=\frac{c}{a}$ (это урав. изъ подобія треуг.). Изъ перваго урав. имѣемъ $b+c=s-a$; возведя это равенство въ квадратъ и замѣнивъ b^2+c^2 черезъ a^2, а $2bc$ черезъ $2ah$, получимъ $a^2+2ah=s^2-2sa+a^2$, откуда $a=\frac{s^2}{2(s+h)}=$ $=41,666..$; потомъ опредѣл. $b=\frac{s(s+2h+\sqrt{s^2-4hs-4h^2})}{4(s+h)}=33,33...$;

$c=\frac{s(s+2h-\sqrt{s^2-4hs-4h^2})}{4(s+h)}=25.$

30. 5,5; 4,4; 3,3. **31**. ${}^1/_2 a\sqrt{3}$; ${}^2/_3 h\sqrt{3}$.

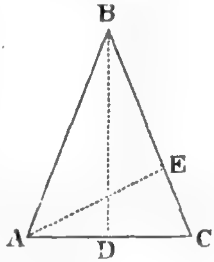
32. Гипотенуза вдвое больше даннаго катета.

33. Высота $={}^1/_2$ данной стороны. **34**. 0,169.

35. 9. **36**. 64,26.

37. Треуг. $ABD \infty AEC$ (чер. 622); слѣд. $h:h_1={}^1/_2 b:EC$, откуда $h=\frac{bh_1}{2\sqrt{b^2-h_1^2}}=21,947.$

Чер. 622.



Сторона $a=\sqrt{h^2+({}^1/_2 b)^2}=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-h_1^2}}=32,59.$

40. 1) Если уг. C острый, то $c^2<a^2+b^2$ и $c>a-b$, откуда $c<1,7$ и $>0,7$; 2) если C тупой, то $c^2>a^2+b^2$ и $c<a+b$, откуда $c>1,7$ и $<2,3$; 3) если A острый, то $a^2<b^2+c^2$, слѣдов. $c^2>a^2-b^2$ и $c<a+b$; $c>1,27$ и $<2,3$; 4) при A тупомъ $c^2<a^2-b^2$ и $c>a-b$; $c<1,27$ и $>0,7$.

41. 1) $c<31,9$ и $>3,5$; 2) $c>31,9$ и $<45,1$; 3) $c>12,5$ и $<45,1$; 4) $c<12,5$ и $>3,5$.

42. 1) $c<0,527$ и $>0,204$; 2) $c>0,527$ и $<0,718$; 3) $c>0,382$ и $<0,718$; 4) $c<0,382$ и $>0,204$.

43. $h^2=c^2-p^2$; $h^2=b^2-q^2$; слѣд. $2h^2=b^2+c^2-p^2-q^2$.

Но если уг. A острый, то $a^2<b^2+c^2$; поэтому $2h^2>a^2-p^2-q^2$; а какъ $a=p+q$, то $2h^2>p^2+q^2+2pq-p^2-q^2$, или $h^2>pq$; $h>\sqrt{pq}$. Если уг. A тупой, то $h<\sqrt{pq}$.

44. Если уг. B острый, то отрѣзки стороны a выразятся формулами $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ и $a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Если же уг. B тупой, то получимъ $\frac{b^2-(a^2+c^2)}{2a}$ и $a-\frac{b^2-(a^2+c^2)}{2a}$. 1) Отрѣзки $a=0,1057$ и $0,3593$; отрѣзки $b=0,259$ и $0,386$; отрѣзки $c=0,456$ и $0,09$.

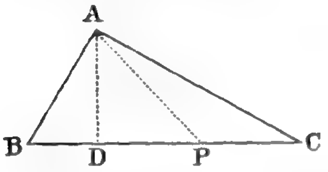
2) Отрѣзки $a=19,9$ и $36,4$; отрѣзки $b=49,35$ и $7,85$; отрѣзки $c=11,5$ и $39,7$.

45. 22,665; 19,995; 7,85. Прямая, дѣлящая a пополамъ, $=$ $={}^1/_2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

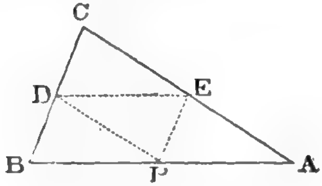
46. 1) 140; 2) 38,2. Проведя въ треуг. ABC (чер. 623) высоту AD и положивъ $BP=m$, $PC=n$, $DP=y$, $AP=x$, изъ треуг.

ABP получимъ $c^2 = x^2 + m^2 - 2my$: а изъ треуг. ACP имѣемъ $b^2 = x^2 + n^2 + 2ny$. Отсюда $x = \sqrt{\frac{mb^2 + nc^2 - mna}{a}}$.

Чер. 623.



Чер. 624.



47. $15^7/_{12}$; $27^3/_4$. **48**. 1,3. **49**. 3,9.

50. Треуг. $DBP \infty PEA$ (чер. 624), слѣд. $\frac{BP}{PA} = \frac{BD}{PE}$; $PB = PA$.

51. $a = \frac{sh_1}{2(h+h_1)}$; $b = \frac{sh}{2(h+h_1)}$, гдѣ h—высота, опущенная на сторону a; h_1—высота, опущенная на сторону b. Одно урав. есть $2a + 2b = s$; другое получится изъ подобія треуг., которые образуются, когда проведемъ высоты параллелограмма изъ одной вершины.

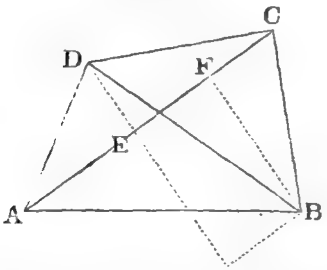
52. $b = \sqrt{^1/_2(e^2 + f^2) - a^2}$.

53. $f = \sqrt{2(a^2 + b^2) - e^2}$.

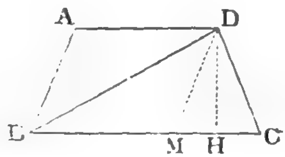
54. 1) 68,3; 2) 296,56.

Рѣшеніе Пусть (чер. 625) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $CA = e$. Для опредѣленія $DB = f$, проведемъ BF и DE, перпендикулярныя къ AC, и $BH \parallel AC$ до пересѣченія съ продолженной DE; положимъ $AF = m_1$, $AE = m_2$, $BF = h_1$, $DE = h_2$. Изъ треуг. BDH получимъ $f = \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (h_1 + h_2)^2}$, гдѣ m_1 и h_1 можно вычислить изъ треуг. ABC, а m_2 и h_2 изъ треуг. ADC.

Чер. 625.



Чер. 626.



55. Пусть (чер. 626) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BD = e$, высота $DH = h$. Изъ треуг. BDC имѣемъ $e^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot HC$; а изъ треуг. DMC, гдѣ $DM \parallel AB$, получимъ

$$HC = \frac{c^2 + (b-d)^2 - a^2}{2(b-d)}; \text{ слѣд.}$$

$$e^2 = b^2 + c^2 - \frac{b(c^2 + b^2 - 2bd + d^2 - a^2)}{b-d};$$

$e=\sqrt{\dfrac{b(a^2-d^2)+d(b^2-c^2)}{b-d}}$. Такъ же найдемъ $f=\sqrt{\dfrac{d(b^2-a^2)+b(c^2-d^2)}{b-d}}$. Для опредѣленія высоты, изъ треуг. HDC имѣемъ $h^2=c^2-HC^2$, гдѣ

$$HC^2=\left[\frac{c^2+(b-d)^2-a^2}{2(b-d)}\right]^2;\ \text{слѣд.}$$

$$h^2=c^2-\left[\frac{c^2+(b-d)^2-a^2}{2(b-d)}\right]^2=$$

$$=\frac{(b+c-d+a)\,(b+c-d-a)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c-d)}{4(b-d)^2};$$

слѣд. $h=$ произведенію дроби $\dfrac{1}{2(b-d)}$ на

$$\sqrt{(a+b+c-d)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(-a+b+c-d)}.$$

56. $a=\sqrt{\dfrac{b\,(e^2-d^2)+d\,(f^2-b^2)}{b+d}}$;

$c=\sqrt{\dfrac{b\,(f^2-d^2)+d\,(e^2-b^2)}{b+d}}$.

57. $b=\sqrt{\dfrac{(e^2+f^2-a^2-c^2)\,(e^2-f^2+a^2-c^2)}{2(e^2-f^2-a^2+c^2)}}$;

$d=\sqrt{\dfrac{(e^2+f^2-a^2-c^2)\,(e^2-f^2-a^2+c^2)}{2(e^2-f^2+a^2-c^2)}}$.

58. 476. **59**. 60; 32. **60**. 35; 7. **61**. 4,04; 1,56. **62**. 24; 40; 22; 30; 44. **63**. 0.85; 0,1. **64**. 1,2. **65**. 25. **66**. 33 саж. 3 ф. **67**. $19^1/_2$ д. **68**. 15; $1^1/_2$. **69**. 2,22 д. **70**. 15 ф. **71**. Діам.$=$1,6; хорда$=$1,38 (съ точн. 0,01).

72. Если къ хордѣ прилежитъ меньшій отрѣзокъ діаметра, то діаметръ$=$54; а если большій, то діам.$=$48.

73. Діам.$=96^3/_5$; отрѣзки$=5^{133}/_{161}$ и $20^{133}/_{161}$. **74**. $6^2/_3$ ф. **75**. 4,8. **76**. 2,2. **77**. 5 ф. **78**. 2,7. **79**. 1,8. **80**. 8,5 и 14,45 или 4,725 и 18,225. **81**. 4,725. **82**. $6049^1/_2$ вер.

§ 232 (стр. 176).

1. § 173. **2**. § 183. **3**. Изъ вершины, находящейся между D и другой вершиной, провести прямую || прямой AD, дѣлящей пополамъ внѣшній уголъ при вершинѣ.

4. Отъ вершины A по AC отложить $AE=AB$; соединить B съ E.

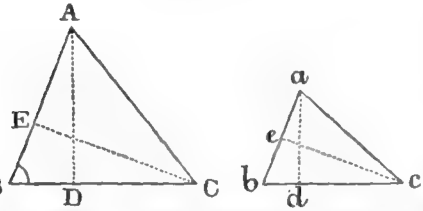
5. Если катеты b, c, гипотенуза a, отрѣзки ея m и n, то по § 202 имѣемъ $b^2=am$, $c^2=an$, или $ab^2=a^2m$.

6. Изъ данной пропорціи слѣдуетъ подобіе треугольниковъ, на которые высота раздѣляетъ данный треуг.; а отсюда выведемъ, что въ данномъ треуг. уголъ, изъ котораго выходитъ высота, равенъ суммѣ остальныхъ угловъ.

7. Данный треуг. ∞ треуг., образуемому высотой, средней пропорціональной и прилежащимъ къ ней отрѣзкомъ. **8.** § 182.

9. $ABD \infty abd$ (чер. 627); $BEC \infty bec$; слѣд. $\frac{AB}{ab}=\frac{AD}{ad}$; $\frac{BC}{bc}=\frac{CE}{ce}$; поэтому $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$.

Чер. 627.



10. Подобно предыдущей.

11. Первое можно доказать изъ подобія треуг. EOB и DOC; прочія соотношенія изъ подобія другихъ, образовавшихся на чертежѣ, треуг.

12. На основаніи предыд. теоремы. **13.** § 174 и 175.

14. § 182. **15.** § 188. **16.** § 182.

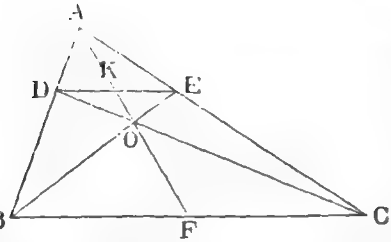
17. Въ треуг. DEF провести изъ F прямую FG къ сторонѣ DE или къ ея продолженію такъ, чтобы $FG=FE$.

18. Гипот.$=a$; катеты b и c; высота h; $\frac{b}{c}=\frac{m}{h}$; $b^2+c^2=a^2$; $\frac{b}{a}=\frac{h}{c}$; $bc=ah$; слѣд. $b^2+c^2+2bc=a^2+2ah$, а $b+c<a+h$.

19. На основ. подобія треуг. **20.** На основ. подобія треуг.

21. $BOF \infty KOE$ (чер. 628), слѣд. $\frac{BF}{KE}=\frac{BO}{OE}$; $AFC \infty AKE$, слѣдовательно $\frac{FC}{KE}=\frac{AC}{AE}$; $ABC \infty ADE$, поэтому $\frac{AC}{AE}=$ $=\frac{BC}{DE}$; $BOC \infty DOE$, слѣд. $\frac{BO}{OE}=\frac{BC}{DE}$; поэтому $\frac{BO}{OE}=\frac{AC}{AE}$ и слѣд. $\frac{BF}{KE}=\frac{FC}{KE}$; $BF=FC$.

Чер. 628.



22. На основаніи предыд. теоремы.

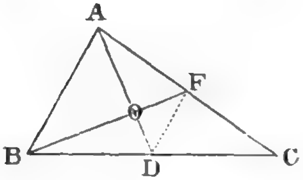
23. Соединивъ F и D (чер. 629), получимъ $FD \parallel AB$ и $=\frac{1}{2}AB$; треуг. $AOB \infty FOD$, слѣд. $\frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OF}=\frac{AB}{FD}=2$; поэтому $OD=$ $=\frac{1}{3}AD$; $OF=\frac{1}{3}BF$.

24. $\frac{AG}{DH}=\frac{GC}{HE}$, откуда $DH=HE$ (чер. 630).

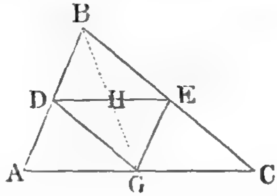
25. На основаніи подобія треуг.

26. Изъ P провести параллели къ сторонамъ параллелограмма.

Чер. 629.



Чер. 630.



28. $AHD \infty BHE$; $AHB \infty GHE$, слѣд. $\dfrac{DH}{BH}=\dfrac{AH}{HE}=\dfrac{BH}{GH}$.

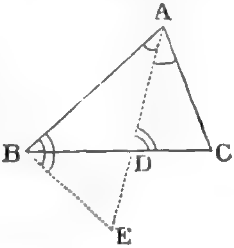
29. На основаніи подобія треуг.

30. § 182. **31**. § 173. **32**. На основаніи подобія треуг.

33. На основаніи § 182 можно доказать подобіе треуг., изъ которыхъ одинъ образуется, когда проведемъ діагональ; а другой, когда изъ вершины меньшаго основанія проведемъ прямую || непараллельной сторонѣ трапеціи. **34**. Пусть ABC данный треуг.; D средина BC; $AE \perp BC$. Такъ какъ $AB^2=AD^2+BD^2-2BD.DE$ и $AC^2=AD^2+CD^2+2CD.DE$, то $AC^2-AB^2=2BC.DE$.

35. Пусть (чер. 631) ABC данный треуг., AD—прямая, дѣлящая пополамъ уг. A; пусть еще уг. $C >$ уг. B. Построимъ уг. $ABE=$уг. ADC; тогда треуг. $ABE \infty ADC$, слѣд. $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$, откуда
$AB.AC=AD.AE=AD(AD+DE)=$
$=AD^2+AD.DE$. Но $ADC \infty BDE$, слѣд. $AD.DE=BD.DC$; $AB.AC=AD^2+BD.DC$.

Чер. 631.

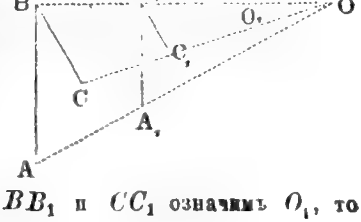


36. По предыд. теоремѣ $bc=l^2+DB.DC$ (чер. 631); но $\dfrac{DB}{c}=\dfrac{DC}{b}=\dfrac{DB+DC}{c+b}=\dfrac{a}{c+b}$. Опредѣливъ отсюда DB и DC и вставивъ въ предыдущее равенство, получимъ требуемую формулу.

37. Проведя (чер. 325) $CG \parallel DF$, получимъ $\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{DG}{AD}$; $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{DB}{DG}$; пропорціи эти надо перемножить.

38. Пусть (чер. 632) AB, BC двѣ послѣдовательныя стороны многоуг. P; A_1B_1 и B_1C_1 сходственныя имъ стороны многоуг. P_1; O—точка встрѣчи прямыхъ AA_1 и BB_1. Такъ какъ $AOB \infty A_1OB_1$, то $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BO}{B_1O}$, откуда $\dfrac{AB-A_1B_1}{AB}=\dfrac{BB_1}{BO}$.

Чер. 632.



Если точку пересѣченія прямыхъ BB_1 и CC_1 означимъ O_1, то

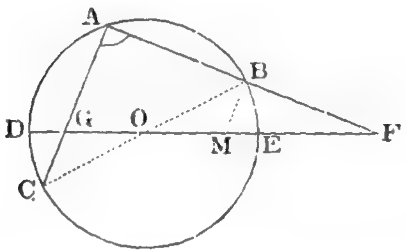
$\frac{BC-B_1C_1}{BC}=\frac{BB_1}{BO_1}$. Но $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, или $\frac{AB-A_1B_1}{AB}=\frac{BC-B_1C_1}{BC}$, слѣд. $\frac{BB_1}{BO}=\frac{BB_1}{BO_1}$; поэтому O и O_1 совпадаютъ.

39. Соединивъ C съ A и съ центромъ O, получимъ два подобныхъ равнобедр. треуг. ACB и COD; слѣд. $\frac{CD}{CO}=\frac{AB}{CB}$.

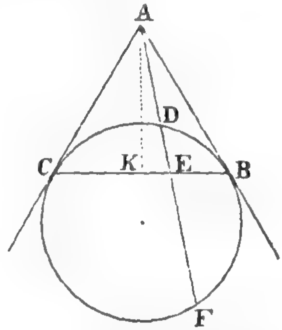
40. Пусть (чер. 633) $AB \perp AC$ и DE діаметръ. Проведемъ $BM \parallel AC$; $AFG \infty BFM$, слѣд. $\frac{FB}{FA}=\frac{BM}{AG}$; но $BM=CG$, ибо треуг. $BOM=COG$, слѣд. $\frac{FB}{FA}=\frac{CG}{AG}$.

41. Проведя (чер. 634) $AK \perp BC$, изъ треуг. ABE и ACE получимъ $AB^2=AE^2+BE^2+2BE.KE$;
$AC^2=AE^2+CE^2-2CE.KE$. Но $AB=AC$, слѣд. $2AB^2=$ $=2AE^2+BE^2+CE^2-2KE\,(CE-BE)$. Такъ какъ

Чер. 633.



Чер. 634.



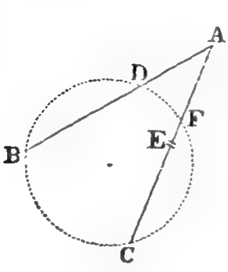
$2KE=CE-BE$, то $2AB^2=2AE^2+BE^2+CE^2-(CE-BE)^2=$ $=2AE^2+2BE.CE$. Но $BE.CE=FE.ED$, слѣд. $AE^2=AB^2-FE.ED$.

42. § 218. **44**. Составить изъ данной пропорціи новую, взявъ за предъидущіе члены суммы членовъ каждаго отношенія.

45. Подобно предъид. теоремѣ.

46. Проведемъ (чер. 635) черезъ B, D, C окруж. Если она пересѣчетъ AC въ F, то $AB.AD=AC.AF$ и $AB.AD=AC.AE$; слѣд. $AF=AE$.

Чер. 635.

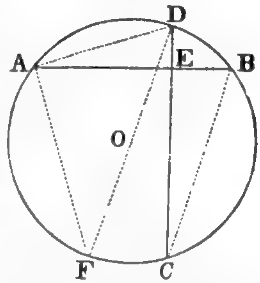


47. Провести изъ O_1 діаметръ во второмъ кругѣ и соединить его конечную точку E съ точкой A хорды O_1A; тогда, означивъ черезъ F точку пересѣченія этого діаметра съ общей хордой, получимъ треуг. $O_1AE \infty O_1FB$; затѣмъ, проведя въ первомъ кругѣ радіусъ O_1D, надо воспользоваться § 217.

48. § 182. **49**. Проведя въ точки касанія діаметры и соединивъ ихъ конечныя точки между собою, найдемъ, что эти линіи проходятъ черезъ точку касанія. На основаніи этого докажемъ подобіе треуг., образующихся при такомъ построеніи и имѣющихъ касательную общимъ основаніемъ.

50. Пусть (чер. 636) $AB \perp CD$. Сдѣлавъ указанныя на чер. построенія, имѣемъ $AE^2+DE^2+BE^2+CE^2 =AD^2+BC^2$. Но $AD+BC=180^0$, слѣд. $BC=AF$ и $AE^2+DE^2+BE^2+CE^2= =AD^2+AF^2=DF^2$.

Чер. 636.

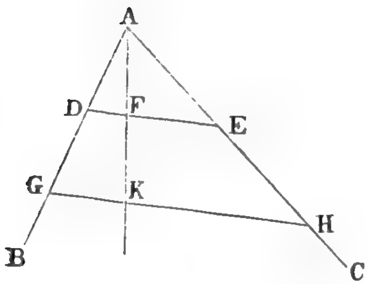


51. Прямая $\parallel AB$ и дѣлящая разстояніе M отъ AB въ отн. $m:n$.

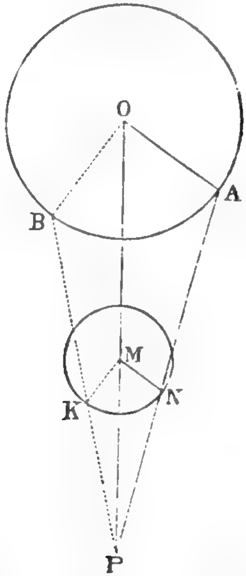
52. Прямая $\parallel AB$ и дѣлящая разстояніе между AB и CD въ отн. $m:n$.

53. Пусть BAC (чер. 637) данный уголъ; DE—прямая, раздѣленная въ F такъ, что $DF:FE=m:n$, и линія AF пересѣкаетъ GH въ K. Такъ какъ $GAK \infty DAF$, то $\frac{GK}{DF}=\frac{AK}{AF}$; а изъ подобія AKH и AFE имѣемъ $\frac{KH}{FE}=\frac{AK}{AF}$; слѣд. $\frac{GK}{DF}=\frac{KH}{FE}$, или $\frac{GK}{KH}=\frac{DF}{FE}=\frac{m}{n}$.

Чер. 637.



Чер. 638.

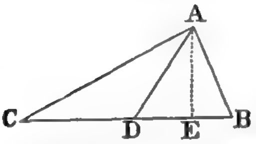


54. Надо соединить точку P (чер 638) съ центромъ O; раздѣлить PO въ M въ отн. $m:n$; затѣмъ, проведя произвольную прямую OA и соединивъ точки P и A, провести изъ M прямую $MN \parallel OA$ до пересѣченія съ PA; окруж., описанная изъ M радіус. MN, будетъ требуемое геометр. мѣсто. Дѣйствительно, проведемъ къ окруж.

O прямую PB, соединимъ B съ центромъ O и изъ центра M найденной окруж. проведемъ $MK \parallel OB$ до пересѣченія съ PB; тогда $PK:KB=PM:MO=m:n$; т. е. K дѣлить PB въ отн. $m:n$. Съ другой стороны, изъ подобія POB и PMK имѣемъ $MK:OB=$ $=PM:PO$. Но по построенію $MN:OA=PM:PO$, слѣд. $MK:OB=$ $=MN:OA$, откуда $MK=MN$.

55. Прямая, соединяющая A съ точкой, разстоянія которой отъ AB и AC выражаются числами m и n. **56**. Если (чер. 639) $AB^2+AC^2=k^2$, то соединивъ A съ срединой D стороны BC, получимъ по § 215-му: $AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$, или по условію $2AD^2+2BD^2=k^2$. Слѣд. если A будетъ перемѣщаться такъ, что AB^2+AC^2 будетъ всегда равно постоянной величинѣ k^2, то AD будетъ имѣть одну и туже величину и слѣд. A будетъ всегда лежать на окруж., описанной изъ D радіусомъ

Чер. 639.



$$DA=\sqrt{\frac{k^2}{2}-BD^2}.$$

57. Если (чер. 639) $AC^2-AB^2=k^2$, то соединивъ A съ срединой D прямой BC и проведя $AE \perp BC$, по теоремѣ 34-й § 232 получимъ $AC^2-AB^2=2BC.DE$. Слѣд. если A будетъ перемѣщаться такъ, что постоянно AC^2-AB^2 будетъ $=k^2$, то постоянно и $2BC.DE=k^2$; т. е. DE будетъ величина постоянная и слѣд. A будетъ все время оставаться на прямой AE. Изъ предъидущаго равенства найдемъ $DE=\dfrac{k^2}{2BC}$.

58. Окруж., концентрическая съ данной и имѣющая рад. $\sqrt{m^2+r^2}$, гдѣ r—радіусъ данной окружности.

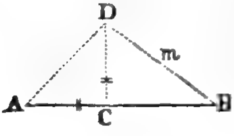
§. 233 (стр. 180).

1. Если m и n числа, притомъ цѣлыя, то раздѣлить на $m+n$ равныхъ частей; если же m и n прямыя линіи, то провести прямую изъ A отложить на ней $AM=m$, $MN=n$; соединить N съ B, изъ M провести параллель къ NB.

2. Подобно 1-й. **3**. § 217. **4**. § 217.

5. Пусть (чер. 640) $AC^2+BC=m^2$. Проведя $CD \perp AB$, отложивъ $CD=CA$ и соединивъ D съ B и A, получимъ $DB=m$, ибо $DC^2+BC^2=AC^2+BC^2=m^2$, и $BAD=45^0$. Для рѣшенія задачи надо построить уг. BAD $=\frac{1}{2}d$; изъ B рад.$=m$ описать дугу; изъ точки D пересѣченія этой дуги съ AD провести $DC \perp AB$. Рѣшеній два.

Чер. 640.



6. Если $AC^2-CB^2=m^2$, то $(AC+CB).(AC-CB)=m^2$, или $\dfrac{AB}{m}=$ $=\dfrac{m}{AC-CB}$; т. е. зад. приводится въ отысканію 3-й пропорціональной.

7. См. § 223 и зад. 46 § 130.

8 и **9**. Приводятся къ нахожденію третьей пропорціональной.

10. Если $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{m}$, то $\frac{BC+AC}{BC}=\frac{AC+m}{AC}$, или $\frac{AB}{BC}=$ $=\frac{AC+m}{AC}$, откуда $\frac{AB+AC+m}{BC+AC}=\frac{AB}{BC}$, или $\frac{AB+AC+m}{AB}=\frac{AB}{BC}$. Но $AC=AB-BC$, слѣд. $\frac{(2AB+m)-BC}{AB}=\frac{AB}{BC}$. Отсюда видно, что мы найдемъ BC, если раздѣлимъ линію $2AB+m$ на такія двѣ части, чтобы AB была между ними средней пропорціональной (см. зад. 3 § 233).

11. Приводится къ зад. 3 **12**. Приводится къ зад. 7.

13 и **14**. См. теор. 5 § 232.

15. Приводится къ зад. 13 и 2.

16. Приводится къ зад. 14 и 2.

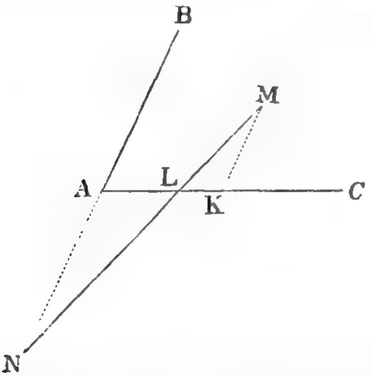
17. 1) Надо изъ M (чер. 641) провести $MK \parallel BA$; раздѣлить KA на m равныхъ частей и отложить KL, содержащую n такихъ частей (полагая $m > n$); провести прямую MLN; $\frac{ML}{NL}=\frac{LK}{AL}=$ $=\frac{n}{m-n}$, или $\frac{ML+NL}{ML}=\frac{m}{n}$. 2) Рѣш. подобно предъид.

18. 1) Взявъ на одной изъ сторонъ угла произвольный отрѣзокъ AC, отложить на другой сторонѣ такой отрѣзокъ AB, чтобы $AB:AC=m:n$; изъ M провести прямую $\parallel BC$.

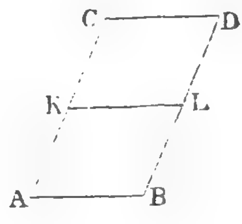
2) Изъ C (см. предъид. случай) описать дугу радіусомъ, равнымъ AB. Два рѣшенія.

19. Раздѣлить EG въ отношеніи $m:n$ и точку дѣленія соединить съ M.

Чер. 641.



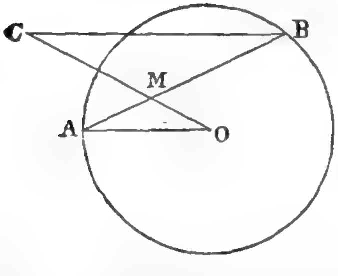
Чер. 642.



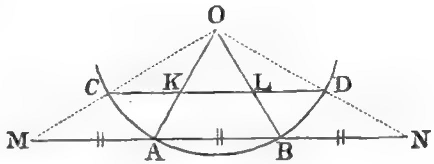
20. Если примемъ AB за бóльшую сторону, то другая сторона будетъ средней пропорціон. между AB и $^1/_2AB$. Если же AB будетъ меньшая сторона (чер. 642), то $AB:AC=AK:AB$; $AB:AC=$ $=^1/_2\,AC:AB=AC:2AB$; т. е. другая сторона есть сред. проп. между AB и $2AB$.

21. Пусть (чер. 643) AB требуемая хорда и $MB:MA=m:n$. Соединивъ M и A съ центромъ O и проведя $BC \parallel AO$, изъ подобія

Чер. 643.



Чер. 644.



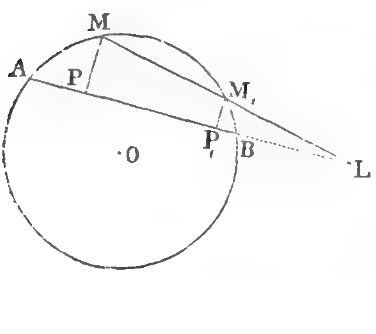
MCB и MAO найдемъ $CM:MO=MB:MA=m:n$; слѣд. точка C опредѣлится. Кромѣ того $CB:AO=MB:MA=m:n$, слѣд. и длина CB опредѣлится. Для рѣшенія задачи останется изъ C радіусомъ CB описать окружность. Рѣшеній два.

22. 1) Провести AB (чер. 644), отложить $BN=AM=AB$; соединить M и N съ центромъ; CD искомая хорда, ибо $\frac{DL}{BN}=\frac{OL}{OB}=$ $=\frac{KL}{AB}=\frac{OK}{OA}=\frac{CK}{AM}$; слѣд. $CK=KL=LD$.

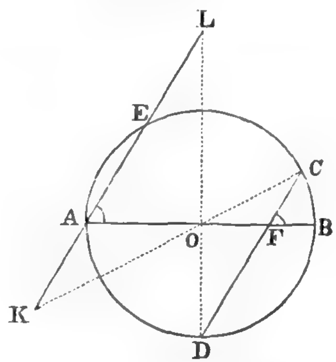
2) Рѣш. подобно предъид.

23. Пусть AB (чер. 645) требуемая хорда; $MP \perp AB$; $M_1P_1 \perp AB$, такъ что $MP:M_1P_1=m:n$. Продолживъ AB и MM_1 до пересѣченія въ L, получимъ $LM:LM_1=MP:M_1P_1=m:n$ и слѣд. $MM_1:$ $:LM_1=(m-n):n$. Построивъ LM_1, сведемъ зад. къ зад. 44 § 130.

Чер. 645.



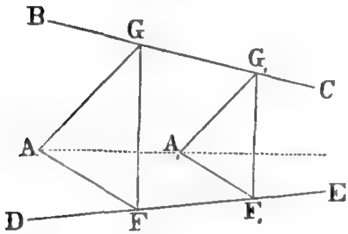
Чер. 646.



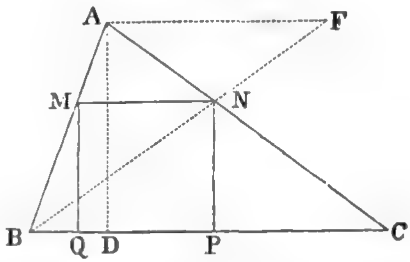
24. Пусть (чер. 646) CD требуемая хорда, т. е. уг. $CFB=a$ и $\frac{CF}{FD}=\frac{m}{n}$. Проведемъ $AE \parallel CD$ и продолжимъ ее до пересѣченія въ K и L съ радіусами OC и OD, проведенными въ конечныя точкя хорды CD; тогда изъ подобія треуг. выведемъ, что $\frac{LA}{AK}=\frac{n}{m}$, откуда $\frac{LA-AK}{AK}=\frac{n-m}{m}$ или $\frac{AE}{AK}=\frac{n-m}{m}$, ибо треуг. OLK равнобедренный, какъ подобный треуг. COD. Такъ какъ AE дана (хорда, проведенная изъ конца діаметра подъ угл. a), то можно построить AK; а имѣя AK, легко рѣшить задачу.

25. Проведя (чер. 647) двѣ произвольныя параллели FG и F_1G_1, пересѣкающія BC и DE, соединимъ A съ F и G; а изъ F_1 и G_1 проведемъ $F_1A_1 \| FA$ и $G_1A_1 \| GA$; точка A_1 пересѣченія линій F_1A_1 и G_1A_1 будетъ находиться на требуемой линіи.

Чер. 647.



Чер. 648.

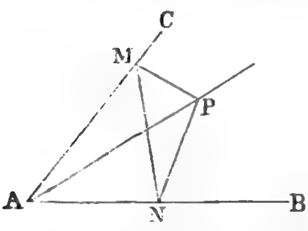


26. Пусть (чер. 648) $MNPQ$ требуемый квадратъ. Проведя высоту AD, изъ подобія ADC и NPC получимъ $\frac{AD}{NP}=\frac{AC}{NC}$. Проведя $AF \| BC$ и продолживъ ее до пересѣченія съ BN, изъ подобія BAF и BMN получимъ $\frac{AF}{MN}=\frac{BA}{BM}$. Но $\frac{BA}{BM}=\frac{AC}{CN}$, слѣд. $\frac{AF}{MN}=\frac{AD}{NP}$, откуда $AF=AD$.

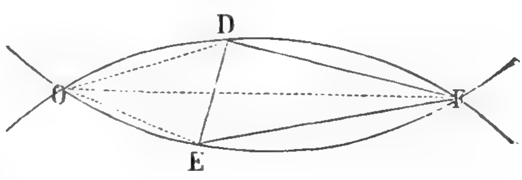
27. Задача приводится къ вписыванію прямоугольника, отношеніе сторонъ котораго=отношенію сторонъ прямоуг. $GHKL$, и рѣшается подобно предъидущей.

28. Опишемъ (чер. 650) на сторонѣ DF дугу, вмѣщающую уг. CAP (чер. 649), который данъ; а на сторонѣ EF дугу, вмѣщающую уг. BAP, тоже данный. Эти дуги пересѣкутся въ F и O. Проведемъ OD, OE, OF и возьмемъ на AC и AB (чер. 649) такія

Чер. 649.



Чер. 650.

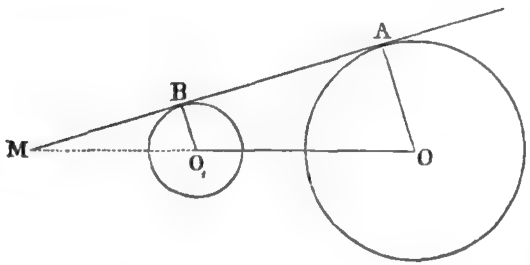


разстоянія AM и AN, чтобы $\frac{OD}{AM}=\frac{OF}{AP}$ и $\frac{OE}{AN}=\frac{OF}{AP}$; M и N будутъ искомыя вершины. **29**. Рѣш. подобно предыд.

30. Третья вершина треуг. должна находиться на дугѣ, описанной на a и вмѣщающей уг. B, и на линіи, дѣлящей пополамъ уг. B при вершинѣ; а эту линію опредѣлимъ, зная, что она должна дѣлить основаніе въ отношеніи $m:n$ и проходить чрезъ средину дуги, соотвѣтствующей уг. B при вершинѣ.

31. Пусть (чер. 651) ABM общая касательная; O и O_1—центры;

Чер. 651.

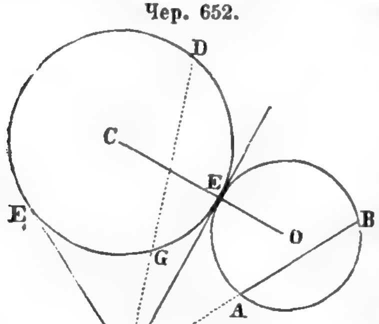


$\frac{OM}{O_1M}=\frac{AO}{O_1B}$ или $\frac{OO_1}{O_1M}=\frac{AO-O_1B}{O_1B}$. Построивъ O_1M, опредѣлимъ точку M; потомъ изъ M проведемъ къ кругу O_1 касательную.

32. Точку касанія опредѣлимъ по § 223; сѣкущей будетъ линія, проходящая черезъ A и B.

33. Пусть E (чер. 652) будетъ точка касанія требуемой окр. O съ окр. C; а F—точка, въ которой общая касательная встрѣтитъ сѣкущую AB. Если проведемъ изъ F къ данной окр. сѣкущую FGD, то $EF^2=FA.FB=FG.FD$; слѣд. точки A, B, D, G лежатъ на одной окруж. Имѣя эту окруж., можно опредѣлить общую касательную FE, а слѣд. и точку касанія искомой окруж. къ данной окр. C. Поэтому для рѣшенія задачи надо: 1) описать произвольную окружн., такъ чтобы она прошла черезъ A и B; эта окружн. пересѣчетъ данную окружн. въ G и D; 2) провести BA и DG и продолжить ихъ до пересѣченія въ F; 3) изъ F провести къ окружн. C касательныя FE и FE_1; 4) провести окружн. черезъ A, B и E или черезъ A, B и E_1.

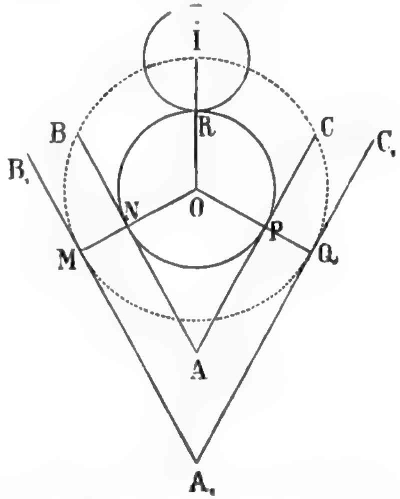
Чер. 652.



34. Центръ требуемой окруж. долженъ находиться на линіи CD, дѣлящей пополамъ уголъ между MN и PQ, если эти линіи пересѣсаются, или параллельной MN и PQ и находящейся отъ нихъ въ равныхъ разстояніхъ, если $MN \parallel PQ$. Проведя $AE \perp CD$ и продолживъ AE по другую сторону CD на $EA_1 = EA$, получимъ точку A_1, также лежащую на требуемой окружн. Для рѣшенія задачи надо провести черезъ A и A_1 окружн., касательную къ PQ.

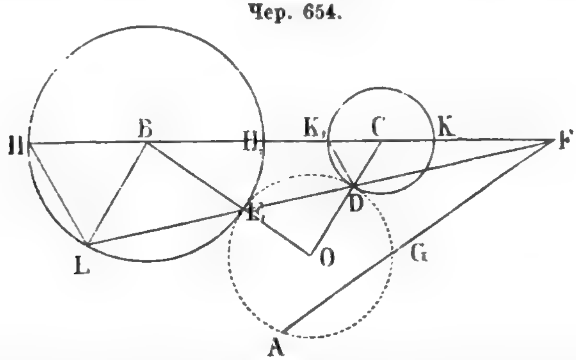
35. Пусть N, P, R (чер. 653) будутъ точки касанія искомой окружн. O съ данными прямыми AB и AC и данной окружн. I. Проведемъ ON, OP, OR; изъ O опишемъ окружн., которая проходила бы черезъ центръ I данной окружн.; она пересѣчетъ продолженные радіусы ON и OP въ M и Q, такъ что $MN = PQ = IR$. Поэтому, если проведемъ къ AB и AC параллели A_1B_1 и A_1C_1 на разстояніи IR, то онѣ будутъ касательными къ окружн., которой центръ O, а рад. OI. Итакъ для рѣшенія задачи, надо къ линіямъ AB и AC провести параллели A_1B_1 и A_1C_1 на разстояніи рад. IR данной окружн.; затѣмъ построить окружн. OI, касательную къ прямымъ A_1B_1 и A_1C_1 и проходящую черезъ I. Центръ этой окружн. будетъ центромъ искомой окруж., а рад. послѣдней будетъ OR.

Чер. 653.



36. Пусть (чер. 654) O искомая, B и C данныя окруж. Проведя BC и линію DE черезъ точки касанія и продолживъ эти двѣ линіи до пересѣченія въ F, а также соединивъ O съ B и C, получимъ $FBL \infty FCD$, ибо $BL \parallel CD$ (такъ какъ уг. $BLE = BEL = OED = ODE = CDF$), слѣд. $\frac{FB}{FC} = \frac{BL}{CD}$. Отсюда видно, что точ-

Чер. 654.

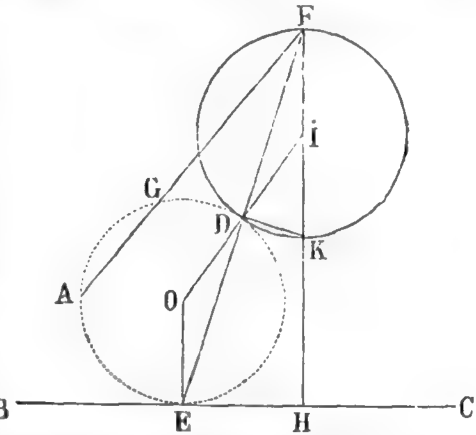


ку F можно опредѣлить. Такъ какъ $BL \parallel CD$, то и $HL \parallel K_1D$ (ибо въ равнобедр. треуг. LBH и K_1CD углы при вершинахъ по параллельности BL и CD равны); поэтому $FL\,.\,FK_1 = FH.\,FD$.

Кромѣ того, по свойству сѣкущихъ, $FH.\ FH_1 = FL.\ FE$. Перемноживъ два послѣднихъ равенства, получимъ $FK_1.\ FH_1 = FD.\ FE$; слѣд. H_1, K_1, D и E лежатъ на одной окружн. Соединивъ данную точку A съ F, получимъ $FD.\ FE = FG\,.\,FA$ и слѣд. $FG.\ FA = FK_1.\ FH_1$; т. е. A, G, K_1 и H_1 также лежатъ на одной окружности. Такъ какъ точку F мы можемъ опредѣлить, то проведя окружн. черезъ A, H_1 и K_1 и соединивъ A съ F, опредѣлимъ другую точку G искомой окружн.; тогда задача сведется къ построенію окружн., проходящей черезъ данныя точки A и G и касательной къ одному изъ данныхъ круговъ (см. зад. 33 § 233).

37. Пусть (чер. 655) искомая окружн. O касается окружн. I въ D, а прямой BC—въ E. Проведемъ линію центровъ ODI и соединимъ O съ E. Проведя $FIKH \perp BC$ и проведя хорды DE, DF и KD, въ равнобедр. треуг. FID и DOE получимъ уг. $EOD = FID$ (ибо $FH \parallel OE$) и слѣд. уг. $ODE = FDI$, и EDF прямая; треуг. $FDK \infty FEH$, слѣд. $FD\,.\,FE = FK.\ FH$. Соединивъ F съ данной точкой A, получимъ $FG.FA = FD.FE$ и слѣд. $FG.\ FA = FK.FH$. Поэтому A, G, K и H лежатъ на одной окружн., и мы найдемъ точку G искомой окружн., проведя окружн. черезъ K, H и A; тогда задача сведется къ зад. 32 § 233.

Чер. 655.



38. Возьмемъ случай внѣшняго касанія; пусть иском. окруж. будетъ O (чер. 656). Опишемъ изъ центра O окружн. такъ, чтобы она проходила черезъ центръ A меньшей изъ двухъ данныхъ окружн.; она коснется окружн., описанной изъ B радіусомъ $BF = R - r$, а также и прямой $P_1Q_1 \parallel PQ$ и находящейся отъ PQ на разстояніи r. Слѣд. окруж. OA можно построить по зад. 37 § 233; а потомъ построимъ искомую окружн.

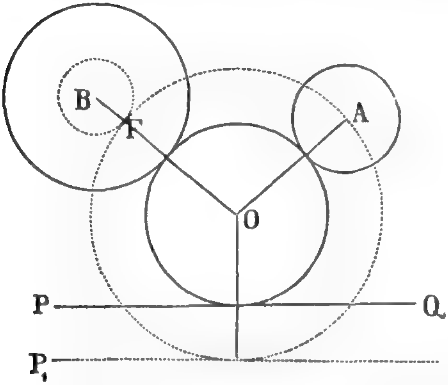
39. Пусть (чер. 657) искомая окружн. O касается къ даннымъ въ M, N, P. Опишемъ изъ O окружн. такъ, чтобы она проходила черезъ центръ A меньшей изъ данныхъ окружн.; эта окружн. OA коснется окружн., описанной изъ B рад. $BD = r_2 - r_1$, и окружн., описанной изъ C рад. $CE = r_3 - r_1$. Окружн. OA можно построить; а тогда можно построить и требуемую.

40. Черезъ A и B проводимъ произвольную окружн.; она пересѣчетъ данную напр. въ E и G; хорды AB и EG продолжимъ до пересѣченія въ I; изъ I проведемъ къ данному кругу C сѣкущую IDF, часть которой DF внутри круга была бы равна a (зад. 44 § 130). Точки D и F лежатъ на искомой окружн.

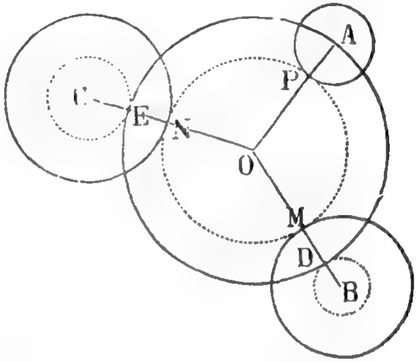
41. Рѣш. подобно предъид.

42. Пусть C (чер. 658) требуемая точка. Проведя діам. CD и $CE \perp AB$, получимъ $ACD \infty CBE$, откуда $AC.CB = CE.CD = p^2$; слѣд. разстояніе искомой точки C отъ хорды AB есть третья пропорціон. къ діаметру круга и данной прямой p.

Чер. 656.

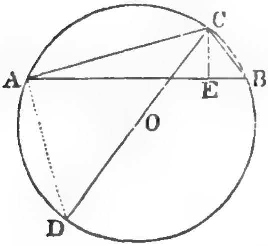


Чер 657.

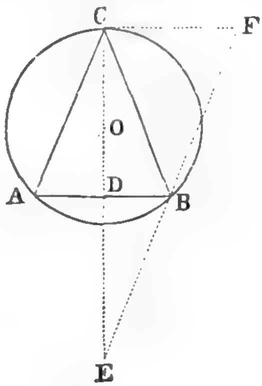


43. Пусть ABC (чер. 659) требуемый треуг. Продолживъ высоту CD и сдѣлавъ $CE = a$, получимъ $DE = AB$ и слѣд. $DB = \frac{1}{2} DE$. Проведя EB и продолживъ ее до пересѣченія въ F съ касательной CF къ кругу O въ точкѣ C, получимъ $CEF \infty DEB$, слѣд. $\frac{CF}{CE} = \frac{DB}{DE}$, т. е. $CF = \frac{1}{2}\,CE = \frac{1}{2}\,a$. Отсюда легко вывести способъ построенія. Рѣшеній два или одно или ни одного. Задача возможна, когда перпендикуляръ, опущенный изъ O на EF, меньше радіуса круга или $=$ ему. Положивъ этотъ перпендикуляръ $= x$, изъ подобія тр—ковъ получимъ пропорцію $x : CF = OE : EF$; но $EF =$

Чер. 658.



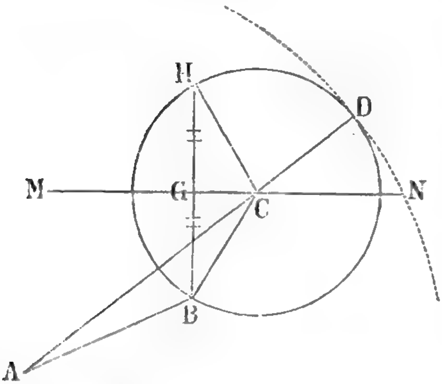
Чер. 659



$=\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, слѣд. $a=\frac{a-r}{\sqrt{5}}$; поэтому зад. возможна, если $\frac{a-r}{\sqrt{5}}<r$ или $=r$ или если $a<r(1+\sqrt{5})$ или $a=r(1+\sqrt{5})$.

44. Пусть C (чер. 660) искомая точка. Продолжимъ AC на $CD=BC$; тогда $AD=s$, и D лежитъ на окружн., описанной изъ A радіусомъ s. Если проведемъ $BG\perp MN$ и продолжимъ BG на $GH=BG$, то $CH=CB$, и C есть центръ окружн., проходящей черезъ B, H и D. Кромѣ того окруж., описанная изъ A рад. s, и окружн. C касаются въ D. Такъ какъ окружн. AD можно описать, B дана, а H можно найти, то зад. сводится на зад. 33 § 233.

Чер. 660.



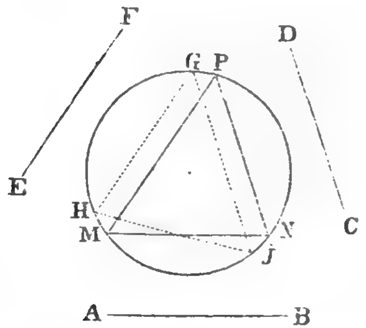
45. Рѣш. подобно предъидущей.

46. Пусть MPN (чер. 661) требуемый треуг. Черезъ точку, взятую на окружн., проведемъ $GH \parallel FE$ и $GJ \parallel DC$; уг. $HGJ=$уг. P искомаго треуг.; хорды MN и HJ равны; слѣд. чтобы найти MN, надо въ данномъ кругѣ построить хорду $= HJ$ и $\parallel AB$.

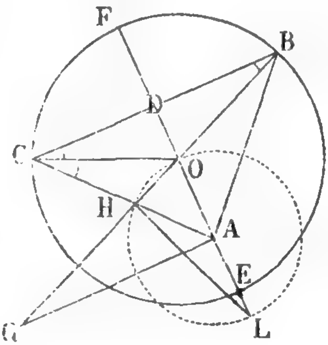
47. Зад. приводится къ построенію хорды, равной данной прямой и проходящей черезъ данную точку.

48. Пусть (чер. 662) искомый путь будетъ $ABCA$. По закону

Чер. 661.



Чер. 662.

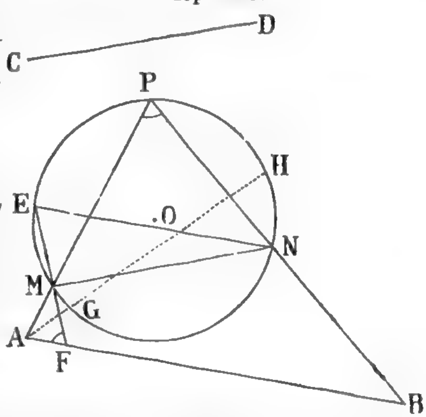


отраженія, радіусы OB и OC раздѣлятъ уг. ABC и ACB пополамъ. Но треуг. OBC равнобедр., слѣд. уг. $ABC=ACB$ и треуг.

ABC тоже равнобедр.; а потому діаметръ EF, проходящій черезъ вершины O и A этихъ треуг. будетъ $\perp BC$. Продолжимъ BO до пересѣченія въ G съ $AG \perp EF$ и опишемъ изъ A рад. AO окружн. OHL. Треуг. ABG и AOH будутъ равнобедр. (ибо уг. $G = OBC$ какъ перекрестные), слѣд. $GH = OB$; но $GH = OG - OH$; поэтому разность отрѣзковъ OG и OH представитъ радіусъ даннаго круга. Съ другой стороны, проведя LH, получимъ прямоуг. треуг. $LHO \infty GAO$; слѣд. $\frac{HO}{OA} = \frac{OL}{OG} = \frac{2OA}{OG}$, или $OH \, . \, OG = 2OA^2$, гдѣ OA есть разстояніе данной точки A отъ центра даннаго круга. Найдя такую линію m, чтобы $m^2 = 2AO^2$, можно построить OG и OH. Для рѣшенія зад. проведемъ $AG \perp EF$, опишемъ изъ O окруж. рад. OG, соединимъ O съ G, отложимъ OH, изъ A проведемъ ACH и т. д.

49. Пусть MNP (черт. 663) требуемый треуг. Проведемъ $NE \parallel AB$ и соединимъ E и M хордой EM. Пусть F будетъ точка, гдѣ продолженіе прямой EM встрѣтитъ AB. Если эта точка будетъ извѣстна, то задачу легко рѣшить; дѣйствительно, уг. ENM = углу между AB и CD и слѣд. хорда EM будетъ опредѣлена по величинѣ; а точка F поможетъ опредѣлить ея положеніе; зная же хорду EM и слѣд. точку M, построимъ и требуемый треуг. Чтобы опредѣлить F, замѣтимъ, что уг. $NEM = MFA$ какъ перекрестные, а уг. $NEM = P$ какъ опирающіеся на дугу MN; слѣд. уг. P = уг. MFA и треуг. $PAB \infty MAF$; поэтому $AM \, . \, AP = AF \, . \, AB$. Проведя произвольную сѣкущую AGH, будемъ имѣть $AG \, . \, AH = AF \, . \, AB$ (ибо $AG \, . \, AH = AM \, . \, AP$), и AF мы опредѣлимъ какъ четвертую пропорц. къ AG, AH и AB. На основаніи послѣдняго равенства заключаемъ, что G, H, B, F лежатъ на одной окружности; слѣд. F можно опредѣлить, проведя окружность черезъ G, H и B, изъ которыхъ B дана, а G и H лежатъ на произвольной сѣкущей, проведенной изъ A.

Чер. 663.



50. Пусть (черт. 664) MNP требуемый треуг. Проведя $NE \parallel BA$ и хорду EMF, которая пересѣчетъ AB въ F, приведемъ задачу къ опредѣленію точки F; точка же F опредѣлится такъ же, какъ и въ предъид. зад. Затѣмъ, вписавъ въ кругъ треуг. EMN, у котораго двѣ стороны MN и EM проходятъ черезъ C и F, а третья EN параллельна AB, легко рѣшимъ и данную задачу.

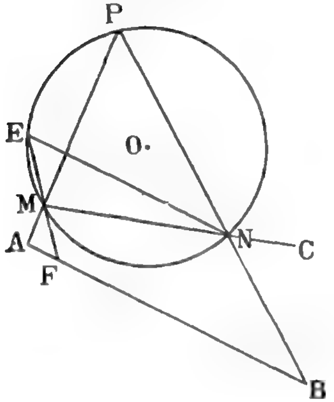
51. Пусть (черт. 665) $AC{:}BC = BC{:}AB$. Проведя изъ A касательную AD, получимъ $AC{:}AD = AD{:}AB$, слѣд. $BC = AD$.

§ 234 (стр. 183).

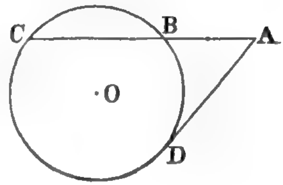
1. Разстояніе параллелей отъ сторонъ прямоуг. $= \frac{1}{4}(a+b-p)$, гдѣ a и b суть стороны даннаго прямоуг.

2. $AB=a$, $AC=b$, $AX=x=\sqrt{ab}$.

Чер. 664.



Чер. 665.

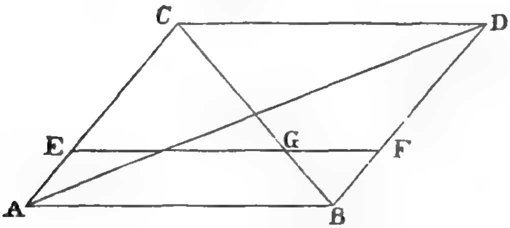


3. $AB=a$, $AC=b$, $AX=x=\dfrac{ab}{a+b}$.

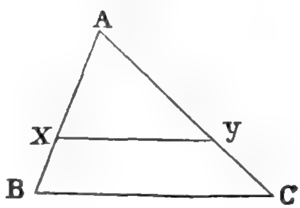
4. $BD=b$ (чер. 666), $BF=x$; $\dfrac{x}{b}=\dfrac{FG}{CD}=\dfrac{m}{2m+n}$.

5. $\dfrac{AX}{AB}=\dfrac{AY}{AC}=\dfrac{XY}{BC}$ (чер. 667); $\dfrac{AY+XY}{AC+BC}=\dfrac{AX}{AB}$; полагая $AX=x$, найдемъ $x=\dfrac{bc}{a+b}$.

Чер. 666.



Чер. 667.



6. На чер. 667-мъ $\dfrac{AX}{AB}=\dfrac{AY}{AC}$; $\dfrac{AX+AY}{AB+AC}=\dfrac{AX}{AB}$; $\dfrac{x+b-x}{c+b}=\dfrac{x}{c}$.

7. $\dfrac{BX}{CY}=\dfrac{c}{b}$ (чер. 667); $\dfrac{m}{x}=\dfrac{c+b}{c}$, гдѣ $x=BX$.

8. $BX=x=\frac{cm}{c-b}$. **9**. $XY^2=AB\,.\,AX$ (чер. 667); $AX=$ $=\frac{c.XY}{a}$; $XY^2=\frac{c^2.XY}{a}$; $XY=x=\frac{c^2}{a}$.

10. $XY=x=\frac{bc}{a}$ (см. зад. 9).

11. $AX=x=\frac{a(a+b+c)}{a+c}$, гдѣ $a=AC$, $b=CD$, $c=DB$.

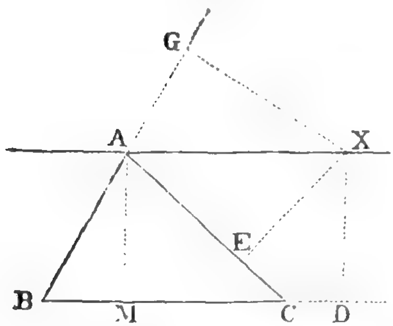
12. $AX=x=\frac{(a+b)(a+b+c)}{a+2b+c}$, гдѣ $a=AC$, $b=CD$, $c=DB$.

13. $AX=x=\frac{a+c}{2}+\frac{bc}{a+c}$.

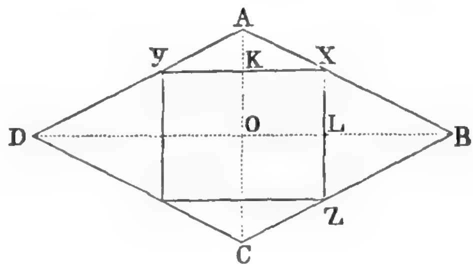
14. $AX=x=\frac{a+2b+c}{2}-\frac{b(b+c)}{a+2b+c}$.

15. Проведя въ треуг. ABC (чер. 668) прямую $AM\perp BC$, получимъ треуг. $ABM\infty AGX$, слѣд. $\frac{AB}{AM}=\frac{AX}{XG}$ или $\frac{c}{XD}=\frac{x}{XG}$, полагая $AX=x$. Треуг. $AMC\infty AXE$, слѣд. $\frac{AM}{AC}=\frac{XE}{AX}$ или $\frac{XD}{b}=\frac{XE}{x}$. Раздѣливъ одну пропорцію на другую, найдемъ $\frac{cb}{XD^2}=\frac{x^2}{XG.XE}$: Но по условію $XD^2=XG.XE$, слѣд. $x=\sqrt{bc}$.

Чер. 668.



Чер. 669.



16. По условію задачи (чер. 668) $XG^2=XE\,.\,XD$; $AMB\infty AGX$, слѣд. $\frac{AM}{AB}=\frac{GX}{AX}$, откуда $AM=XD=\frac{c.GX}{AX}$. Изъ подобія AMC и AXE имѣемъ $\frac{AM}{AC}=\frac{XE}{AX}$, откуда $XE=\frac{AX.XD}{b}$; поэтому $XD.XE=\frac{c.GX.XD}{b}=XG^2$, или $XG=\frac{c.XD}{b}$; а $XG=\frac{XD.AX}{c}$, слѣд. $\frac{XD.AX}{c}=\frac{XD.c}{b}$, или $AX=\frac{c^2}{b}$.

17. Означивъ черезъ a касательную, проведенную изъ A, найдемъ внѣшній отрѣзокъ сѣкущей $=x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

18. $\frac{AX}{AB}=\frac{KX}{OB}$ (чер. 669); $\frac{BX}{AB}=\frac{XL}{AO}$; слѣд. $\frac{AX}{BX}=\frac{AO}{OB}$ или $\frac{x}{a-x}=\frac{e}{f}$, откуда $x=\frac{ae}{e+f}$, гдѣ a сторона, e и f діагонали ромба.

19. Изъ урав. $x^2-(^1/_2y)^2=h^2$ и $\frac{x}{y}=\frac{h}{h_1}$ найдемъ $x=\frac{h^2}{\sqrt{h^2-(^1/_2h_1)^2}}$; $y=\frac{hh_1}{\sqrt{h^2-(^1/_2h_1)^2}}$.

20. Основаніе $=\frac{(p+h)(p-h)}{p}$; сторона $=p-\frac{(p+h)(p-h)}{2p}$.

21. Катетъ $b=\frac{(s+c)(s-c)}{2s}$ въ первомъ случаѣ и $b=\frac{(c+d)(c-d)}{2d}$ во второмъ случаѣ.

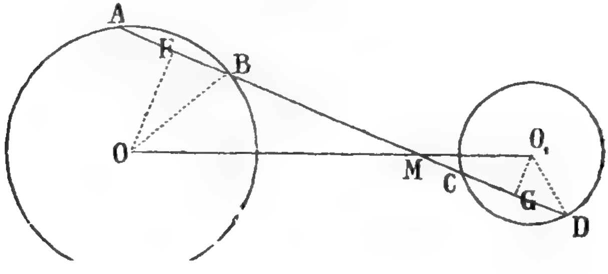
22. $BX=x=\frac{a(2r+a)}{2(r+a)}$, гдѣ r рад. даннаго круга.

23. $BX=x=\frac{a(2r-a)}{2(r-a)}$, гдѣ r рад. даннаго круга.

24. Если половина прямой MM_1 равна a, разстояніе искомой точки отъ средины $MM_1=x$, то $x=\sqrt{\frac{s^2}{2}-a^2}$.

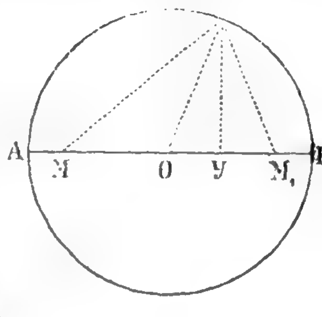
25. Пусть $AB=CD$ (чер. 670); проведя $OF\perp AB$ и $O_1G\perp CD$ и положивъ $OM=a$, $O_1M=a_1$, $OF=x$, $O_1G=y$, изъ подобія OFM и O_1GM получимъ $\frac{y}{x}=\frac{a_1}{a}$. Проведя радіусы $OB=r$ и $O_1D=r_1$, получимъ $x^2=r^2-(^1/_2AB)^2$; $y^2=r_1^2-(^1/_2CD)^2$, и слѣд. $x^2-y^2=r^2-r_1^2$. Изъ этого урав. и урав. $\frac{y}{x}=\frac{a_1}{a}$ найдемъ $x=\frac{a\sqrt{r^2-r_1^2}}{\sqrt{a^2-a_1^2}}$.

Чер. 670



26. Пусть (чер. 671) $XY \perp AB$; $OY = x$; $OM = OM_1 = a$; $OX = r$; по условію $r^2 = MX.M_1X$; а изъ треуг. MOX и M_1OX найдемъ $MX^2 = a^2 + r^2 + 2ax$; $M_1X^2 = a^2 + r^2 - 2ax$, слѣд. $r^2 = \sqrt{(a^2 + r^2)^2 - 4a^2x^2}$, откуда $x = \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{a^2}{4}}$.

Чер. 671.



27. $AX = x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + c^2}$, гдѣ $c = AB$.

28. Разстояніе другой вершины треуг. отъ вершины B квадрата $= 2a \pm \sqrt{2a^2}$, гдѣ a—сторона квадрата.

29. $BX = x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$, гдѣ $a = AB$, а BX представляетъ продолженіе хорды за точку B.

30. 1) Катеты суть $^1/_2s \pm \sqrt{^1/_2a^2 - {^1/_4}s^2}$;

2) Катеты суть $\sqrt{^1/_2a^2 - {^1/_4}d^2} \pm {^1/_2}d$.

31. Разстояніе вершины искомаго квадрата отъ смежной вершины даннаго $= {^1/_2}a \pm \sqrt{^1/_2b^2 - {^1/_4}a^2}$. Вопросъ возможенъ при $b^2 > {^1/_2}a^2$, т. е. когда b больше катета равнобедр. треуг., котораго гипотенуза $= a$.

32. Пусть центръ искомаго круга будетъ X; проведя прямую AX, потомъ $XC \perp BC$ и $XZ \perp AB$ и положивъ $AZ = x$, $AB = 2r$, по § 217 получимъ $AX^2 = 2rx$; но $AX = XC = BZ = 2r - x$, слѣд. $(2r - x)^2 = 2rx$, откуда $x = 3r \pm \sqrt{(3r)^2 - (2r)^2}$.

33. $AX = x = -\frac{(n+1)a}{2n} \pm \sqrt{\left[\frac{(n+1)a}{2n}\right]^2 + \frac{a^2}{n}}$.

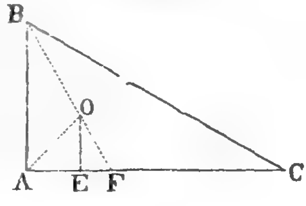
34. Другая сторона трапеціи $= -\frac{b}{3} \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{9} + \frac{h^2}{3}}$.

Глава VIII.

§ 269 (стр. 202).

1. $AB = 5$; $BC = 13$ (чер. 672); $AC = 12$; O—центръ впис. круга; изъ проп. $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}$ найдемъ $AF = {^{10}/_3}$; изъ подобія BAF и OEF опредѣлимъ радіусъ $OE = AE = 2$.

Чер. 672.



2. Высота треуг. $= 24$; радіусъ r будетъ катетъ треуг., котораго гипот. $= 24 - r$, а другой катетъ $= 26 - 10$; $r = 6^2/_3$.

3. Половина основанія есть сред. проп. между высотой треуг. и разностью діаметра и высоты; $r = 14^1/_{12}$.

4. $^1/_2\sqrt{7^2+2,4^2}=3,7$. **5**. $\frac{2,6\,.\,3,9}{\sqrt{2,6^2+3,9^2}}=2,16...$

8. $\frac{a}{\sqrt{3}}=5$ съ точн. 0,01. **9**. $\frac{a}{\sqrt{2}}=15$ съ точн. 0,01.

10. $^1/_2 a(\sqrt{5}+1)=12,3$ съ точн. 0,01.

11. $x_6=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; $x_{10}=\frac{r\sqrt{2}\,(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$. Сдѣлавъ знаменателя раціональнымъ, получимъ $x_{10}=\frac{r}{20}(\sqrt{5}-1)(5-\sqrt{5})\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}=$
$=^1/_{20}r(6\sqrt{5}-10)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=^1/_{10}r\sqrt{(3\sqrt{5}-5)^2(10+2\sqrt{5})}=$
$=^1/_{10}r\sqrt{400-160\sqrt{5}}=^2/_5 r\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$.

12. $^1/_6 b\sqrt{3}$; $^1/_2 b$; $^1/_2 b\sqrt{3}$; $^1/_2 b\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **13**. $2\sqrt{R^2-r^2}$.

14. $\frac{ab}{2\sqrt{b^2-a^2}}$. **15**. $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **16**. $\sqrt{r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

17. $\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

18. $^1/_2 R$; $^1/_2 R\sqrt{2}$; $^1/_2 R\sqrt{3}$; $^1/_4 R\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

19. 6,86 съ точн. 0,01. **20**. 15; 25,95.

21. Сторона 6-ка образуетъ съ большей и меньшей діагоналями прямоугол. треугол.; бо́льшая діагон.=діаметру опис. круга=$2R$; $R=s(2-\sqrt{3})=0,945....$ **22**. 10,8; 9,34....

23. $^1/_{10}d(2\sqrt{3}+\sqrt{2})=0,731$ съ точн. 0,001.

24. Проведя (чер. 357) $FQ \perp AO$ и $FP \perp DG$, получимъ $AF^2=FQ^2+AQ^2$; но $FQ=OP$, $AQ=AO-FP$; поэтому, полагая $AF=x$, получимъ
$x^2=OP^2+FP^2+AO^2-2AO.FP$.
Но $OP^2+FP^2=OF^2=1$ и $AO=1$, слѣд.
$x^2=2-2FP....(1)$.

Такъ какъ $DFP \backsim DEO$, то $\frac{FP}{d}=\frac{DP}{DO}$, или $\frac{FP}{d}=\frac{DO+OP}{DO}$;

а $DO=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$, слѣд. $\frac{FP}{d}=\frac{\sqrt{3}+OP}{\sqrt{3}}$; отсюда

$OP=\sqrt{3}\left(\frac{FP}{d}-1\right)$. Подставивъ это выраженіе вмѣсто OP въ урав. $OP^2+FP^2=1$, получимъ

$3\left(\frac{FP}{d}-1\right)^2+FP^2=1$, или $(3+d^2)FP^2-6d.FP+2d^2=0$, откуда

$FP=\frac{d(3+\sqrt{3-2d^2})}{3+d^2}$. Мы здѣсь для FP взяли бо́льшій корень урав., ибо сумма корней должна быть равна $\frac{6d}{3+d^2}$, т. е. должна быть меньше $2d$, а FP должна быть больше d. Подставивъ найденную для FP величину въ уравн. (1), получимъ

$$x^2=2-\frac{2d(3+\sqrt{3-2d^2})}{3+d^2};\text{ но } d=1-\frac{4}{n},\text{ слѣд.}$$

$$x^2=2-\frac{n-4}{2}\cdot\frac{3n+\sqrt{n^2+16n-32}}{(n-1)^2+3}.$$

Полагая здѣсь $n=3$, получимъ $x=\sqrt{3}=$ сторонѣ прав. вписан. треугольн.; при $n=4$ величина $x=\sqrt{2}=$сторонѣ квадрата; для $n=5$ получимъ $x=\sqrt{\frac{61-\sqrt{73}}{38}}$; при $n=6$ найдемъ $x=1=$стор. прав. 6—ка. Вычисливъ величину x при $n=5$, найдемъ $x=1,1785\ldots$, что весьма близко подходитъ къ величинѣ стороны прав. впис. 5—ка$=1,17849\ldots$. Такимъ образомъ построеніемъ, указаннымъ въ задачѣ, можно пользоваться для вписыванія въ кругъ прав. мног. (нѣкоторыхъ точно, но большинства только приблизительно), о чемъ мы уже и говорили въ § 264.

25. Полагая (чер. 357) $FG=x$, радіусъ$=1$, $EO=d=\frac{4}{n}$, получимъ $\frac{2}{x}=\frac{x}{1-OP}$, откуда $x^2=2-2OP$. Подобно тому, какъ въ предъид. задачѣ, найдемъ $OP=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3-2d^2}-d^2}{3+d^2}$; а такъ какъ $d=\frac{4}{n}$, то $x^2=2-2OP=2-2\sqrt{3}\cdot\frac{n\sqrt{3n^2-32}-16}{3n^2+16}$.

Эта формула, какъ и въ предъид. зад., даетъ приближенныя величины для сторонъ прав. впис. многоуг., по крайней мѣрѣ начиная съ 8—угол.; слѣд. построеніе, указанное въ задачѣ, можетъ служить для вписыванія въ кругъ прав. мног—въ.

§ 270 (стр. 204).

2. См. § 238. **3**. Линія, соединяющая точку пересѣченія перпендикуляра и дуги, соотвѣтствующей противоположному внутреннему углу треуг., съ его вершиной, раздѣлитъ этотъ уголъ пополамъ.

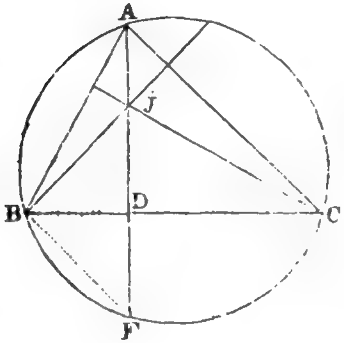
4. Треуг. BIF (чер. 673) равнобедр., ибо уг. $F=$уг. $ACB=$уг. I.

5. Пусть (чер. 674) $AD\perp AC$. Соединимъ D съ C и B; DC будетъ діаметръ, слѣд. $DBC=90^0$; $BD\parallel AA_1$, которая $\perp BC$; слѣд. $AD=BF$. **6**. $OK:DA=CK:CA$; а $DA=BF$ (см. зад. 5).

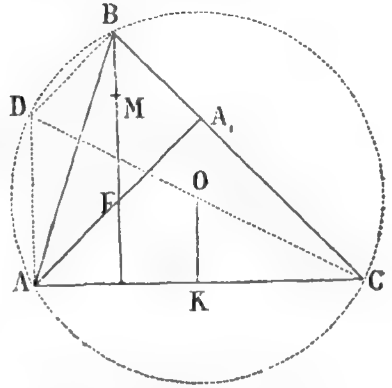
7. Если M средина BF, то фигура $BOKM$ (чер. 674) есть параллелогр. (см. зад. 6).

8. Соединивъ средину F (чер. 675) прямой HO, соединяющей центръ описаннаго круга O съ точкой H пересѣченія высотъ, съ срединой K отрѣзка AH и съ срединой D стороны BC, получимъ треуг. $KHF=DOF$, ибо $HF=FO$ по условію, $KH=OD$ по теоремѣ 6-й § 270 и уг. $KHF=DOF$. Слѣд. $KF=FD$ и KFD есть линія прямая. Поэтому въ прямоуг. треуг. A_1KD точка F есть средина гипотенузы KD и равно отстоитъ отъ всѣхъ вершинъ его

Чер. 673.

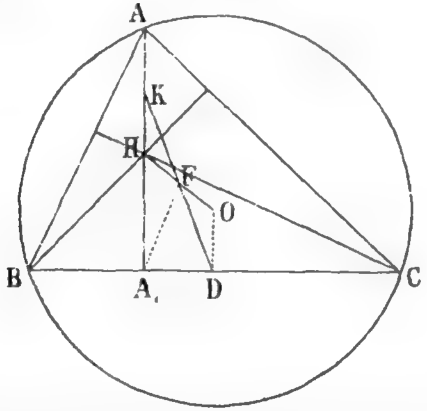


Чер. 674.



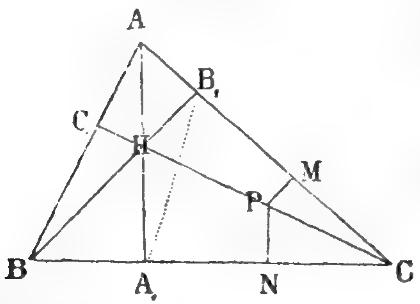
A_1, K и D; разстояніе это $=\frac{1}{2}KD=\frac{1}{2}$ рад. описан. круга (см. теор. 7 § 270).

Чер. 675.



9. Центръ P (чер. 676) круга, описаннаго около треуг. A_1B_1C, будетъ лежать въ срединѣ линіи CH. Дѣйствительно, перпендикуляръ къ A_1C, возставленный изъ ея средины N, и перпендикуляръ къ B_1C, возставленный изъ ея средины M, пересѣкутся въ точкѣ P, которая есть средина HC (ибо $A_1HC \infty NPC$ и $B_1HC \infty MPC$); слѣд. центръ круга, описаннаго около треуг. A_1B_1C, лежитъ на кругѣ, проходящемъ черезъ основанія высотъ.

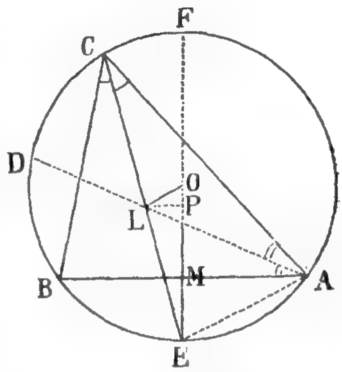
Чер. 676.



10. Теор. 5 § 270.

11. Прямыя AL и CL (чер. 677), дѣлящія пополамъ углы A и C тр—ка, раздѣлятъ пополамъ и дуги BDC и BEA въ точкахъ D и E; слѣд. сумма дугъ AE и CD равна дугѣ DBE; а потому уг ALE=уг. DAE, слѣд. треуг. EAL равнобедр. и $AE=LE$. Если O центръ описан. круга, то $EOF\perp AB$ въ ея срединѣ M, ибо E средина дуги; слѣд. $AE^2=EF.EM=$ $=LE^2$. Проведя $LP\perp EF$, получ. $LO^2=LE^2+OE^2-2OE(EM+$ $+MP)$. Сложивъ это равенство съ равенствомъ $LE^2=EF.EM$ и означивъ рад. круг. описан. и вписан. R и r, а разстояніе ихъ центровъ d, получимъ $d^2=R(R-2r)$.

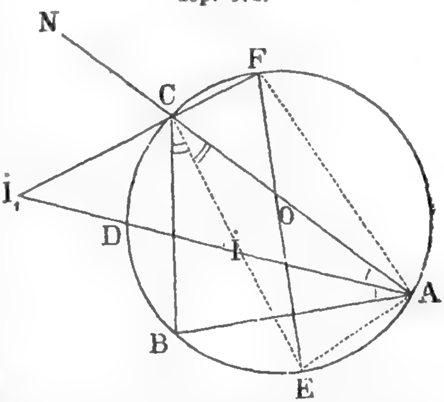
Чер. 677.



12. Доказ. отъ противнаго.

13. Центръ I_1 (чер. 678) круга, касательнаго къ сторонѣ BC и къ продолженіямъ двухъ другихъ сторонъ, будетъ лежать на пересѣченіи прямой AI, дѣлящей пополамъ уг. A, съ продолженіемъ хорды CF, которая перпендикулярна къ линіи CI, дѣлящей пополамъ уг. C, ибо CF раздѣлитъ пополамъ уг. NCB, смежный съ уг. C. Легко видѣть, что уг. $EAI=CII_1$, а слѣд. и уг. $IAF=II_1C$, ибо эти послѣдніе углы дополняютъ первые до 90⁰; слѣд. треуг. FAI_1 равнобедр. и $I_1F=AF$. Зная это, можно, какъ и въ зад. 11-й, вывести, что $d=R(R+2r_1)$, гдѣ d есть разстояніе центровъ O и I_1, а r_1—радіусъ круга I_1.

Чер. 678.



14. Если (чер. 679) $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $^1/_2(a+b+c)=p$, то

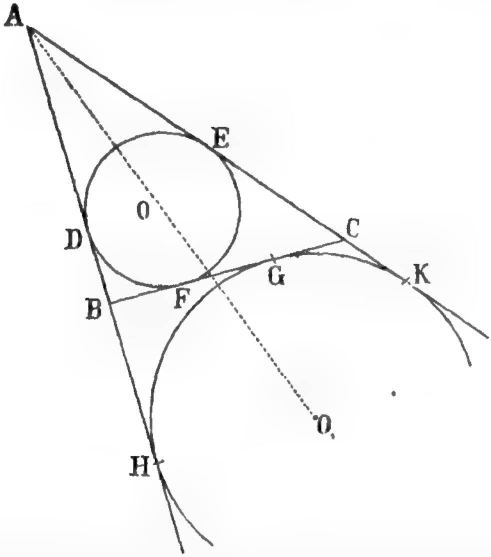
1) $2p=AB+BG+AC+CG=AB+BH+AC+CK=$ $=AH+AK=2AH$ и слѣд. $AH=p$ или $AD+DB+BH=p$.

2) $2p=AD+AE+BD+BF+CF+CE=2AD+2BF+2CF$ $=2AD+2BC$ и слѣд. $AD=p-a$.

15. 1) Уг. IBI_1 и ICI_1 (чер. 680) прямые, ибо линіи, дѣлящія пополамъ смежные внутренній и внѣшній углы тр—ка, взаимно перпендикулярны; слѣд. около 4-ка IBI_1C можно описать кругъ, и II_1 будетъ его діаметромъ. Центръ круга, находясь въ срединѣ II_1, долженъ лежать также на перпендикулярѣ A_2OA_1, возставленномъ изъ средины BC, ибо окружность должна проходить черезъ B и C; слѣд.

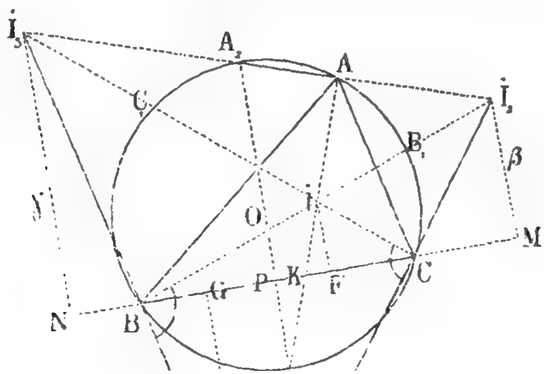
центръ будетъ въ точкѣ пересѣченія II_1 и A_1A_2; эти линіи пересѣ-

Чер. 679.



кутся на окружности описаннаго круга, такъ какъ обѣ онѣ проходятъ черезъ ея точку A_1. 2) Доказ. подобнымъ образомъ.

Чер. 680.



16. Означимъ R радіусъ опис. круга, r—рад. внутренняго впис. круга, α,β,γ—радіусы внѣшнихъ впис. круговъ, касательныхъ къ сторонамъ BC, AC и AB треуг. ABC (чер. 680); такъ какъ $GI_1K \infty PA_1K$ и $A_1PK \infty IKF$, то

$$\frac{I_1G}{A_1P}=\frac{I_1K}{A_1K} \text{ и } \frac{IF}{A_1P}=\frac{IK}{A_1K}, \text{ откуда } \frac{\alpha-r}{A_1P}=\frac{I_1K-IK}{A_1K}=\frac{2A_1K}{A_1K}=2$$

(такъ какъ $I_1A_1=IA_1$ по теор. 15 § 270) и слѣд. $A_1P=\frac{\alpha-r}{2}$. Затѣмъ изъ трапеціи I_3NMI_2 имѣемъ $A_2P=\frac{\beta+\gamma}{2}$, слѣд. $AA_2=2R=$ $=\frac{\alpha+\beta+\gamma-r}{2}$.

17. Доказ. на основаніи теоремъ 11, 13 и 16 § 270.

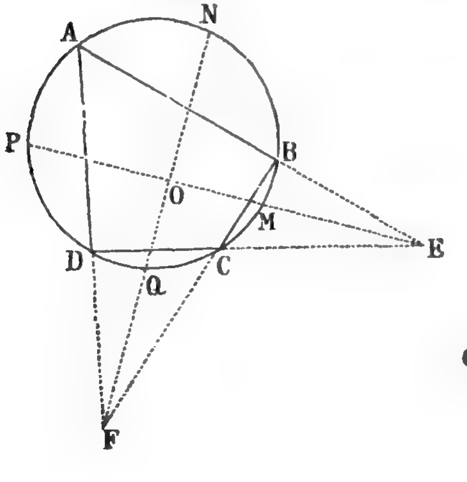
18. Въ теор. 16-й § 270 мы имѣли (чер. 680) $A_1P=\frac{\alpha-r}{2}$, слѣд. $OP=R-\frac{\alpha-r}{2}$. Означивъ разстоянія сторонъ треуг. отъ центра опис. круга через a_1, b_1, c_1, изъ предъид. равенства получимъ $2a_1=$ $=2R+r-\alpha$. Подобнымъ образомъ найдемъ $2b_1=2R+r-\beta$; $2c_1=$ $=2R+r-\gamma$. Сложивъ эти три равенства и воспользовавшись теор. 16-й, найдемъ $a_1+b_1+c_1=R+r$.

19. Если s есть сумма квадратовъ разстояній, то (чер. 679) $s=AD^2+BD^2+CF^2+3r^2$; но (теор. 14 § 270) $AD=p-a$; $BD=p-b$; $CF=BC-BF=BH+BD-BF=BH=p-c$; слѣд. $s=(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+3r^2$, или $s=a^2+b^2+c^2+3r^2-p^2$.

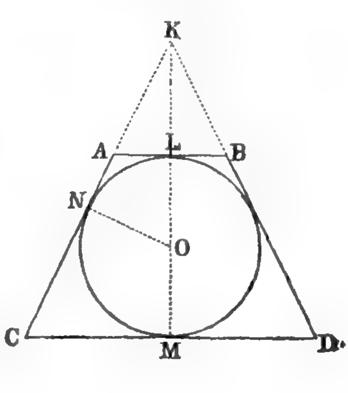
20. Основываясь на свойствахъ внутр. и внѣшнихъ угловъ треуг. и 4—ка, можно показать, что въ 4—кѣ, образованномъ указаннымъ способомъ, сумма противоположныхъ угловъ$=2d$.

21. Такъ какъ (чер. 681) EP дѣлитъ уг. AED пополамъ, то дуга

Чер. 681.



Чер. 682.

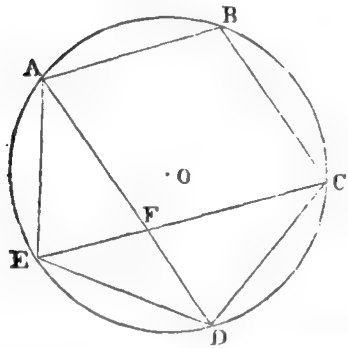


$AP-BM=DP-CM$; по такой же причинѣ дуга $AN-DQ=BN-$ $-CQ$; сложивъ эти два равенства, найдемъ $PN-BM-DQ=DP+$ $+BN-MQ$, или $PN+MQ=PQ+MN$; слѣд. $PON=POQ=90^0$.

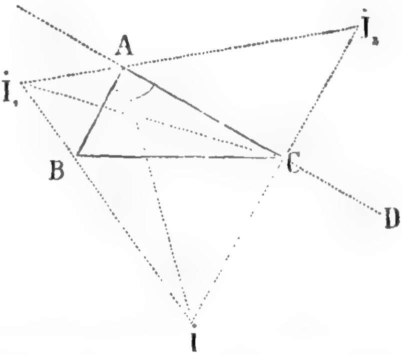
22. $KCM \infty KNO \infty KAL$ (чер. 682); слѣд. $\frac{CM}{ON}=\frac{KM}{KN}$; $\frac{ON}{AL}=$ $=\frac{KN}{KL}$; но $\frac{KM}{KN}=\frac{KN}{KL}$; слѣд. $\frac{CM}{ON}=\frac{ON}{AL}$.

23. Равнобедр. треуг. EDA и EDF (чер. 683) подобны; слѣд. $DF:DE=AE:AD$; но $DE=AE=AF$, ибо треуг. AEF равнобедр.

Чер. 683.



Чер. 684.



25. Помощью пиѳагоровой теоремы легко вывести, что одна часть радіуса представитъ сторону прав. впис. 10—ка.

§ 271 (стр. 206).

1. Центръ внѣшняго круга, касательнаго къ сторонѣ BC (чер. 684), долженъ лежать на прямой AI, дѣлящей пополамъ уг. A, и на прямой CI, дѣлящей пополамъ внѣшній уг. BCD тр—ка ABC. Всѣ центры будутъ вершинами треуг., стороны котораго проходятъ черезъ A, B, C.

2. Вписавъ въ уг. m даннымъ рад. r окруж. и описавъ изъ вершины m рад. h другую окруж., надо провести къ этимъ окружн. общія внѣшнія касательныя. Рѣшеній два. Задача невозможна, если окружн. не имѣютъ общихъ точекъ.

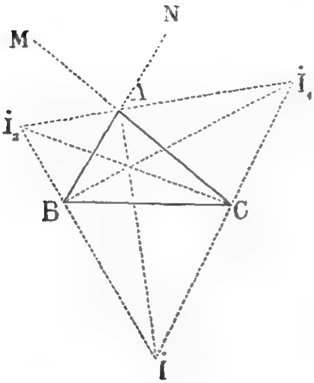
3. Задача невозможна, когда прямыя, соединяющія концы A и B съ центромъ O вписаннаго круга, перпендикулярны между собою.

4. Приводится къ проведенію двухъ внѣшнихъ и одной внутренней касательной.

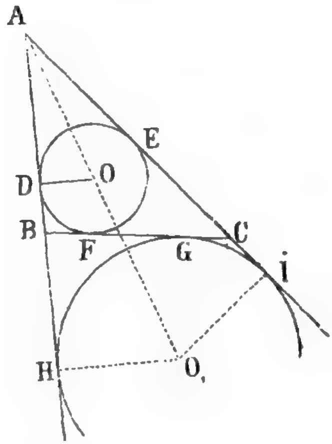
5. Рѣш. подобно предъид.

6. Пусть (чер. 685) ABC требуемый треуг.; AI, BI_1, CI_2 дѣлятъ углы A, B, C пополамъ; соединивъ A съ I_1 и I_2, найдемъ, что AI_1 и AI_2 дѣлятъ пополамъ углы NAC и MAB, смежные съ A; слѣд. $AI_1 \perp AI$ и $AI_2 \perp AI$, т. е. линія I_1AI_2 прямая. Для отысканія вершины A, надо изъ I опустить перпендикуляръ на прямую, соединяющую I_1 и I_2.

Чер. 685.



Чер. 686.



7. Пусть (чер. 686) ABC требуемый треуг.; вписавъ въ него кругъ O и описавъ внѣшній кругъ O_1, касательный къ $BC=b$, получимъ $AH=AI$, $AD=AE$, слѣд. $DH=EI$ или $BD+BH=EC+CI$, или $BF+BG=CF+CG$, или $2BF+FG=2CG+FG$, откуда $BF=CG$; поэтому $EI=DH=BF+BG=BC=b$. Слѣд. для построенія требуемаго треуг. надо построить уг. $A=m$, вписать въ него кругъ O радіуса r; отложить отъ точекъ прикосновенія D и E разстоянія $DH=EI=b$; описать кругъ O_1, касательный къ сторонамъ угла A въ точкахъ H и I; провести къ O и O_1 общую внутр. касательную.

8. Если ABC (чер. 687) требуемый треуг., то $BM+CN=BP+CP=BC$ и потому $AB+AC-BC=AM+AN=2AM$ или $2AM=s-b$, а $AM=\frac{1}{2}(s-b)$. Итакъ AM извѣстна; извѣстна также и $OM=r$; по этимъ даннымъ можно построить прямоуг. треуг. AOM; слѣд. мы будемъ знать уг. MAO, а потому и уг. $BAC=2MAO$, и задача приведется къ предъид.

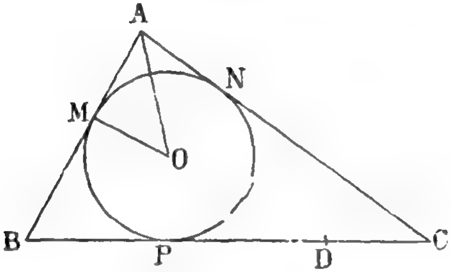
9. Пусть ABC (чер. 687) требуемый треуг.; тогда $AM=AN$, слѣд. $CN-BM=d$, а потому $CP-BP=d$, и если мы отложимъ отъ C на линіи CB отрѣзокъ $CD=d$, то P будетъ средина остатка.

10. Если ABC (чер. 686) требуемый треуг., т. е. если уг. $A=m$, $AB+BC+AC=2p$ и $OD=r$, то по теоремѣ 14-й § 270 найдемъ $AH=AI=p$. Отсюда легко вывести способъ построенія.

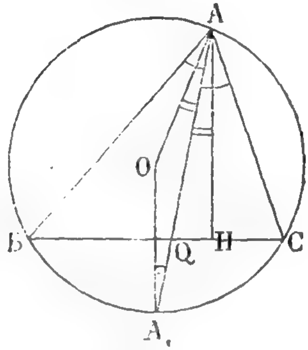
11. Пусть ABC (чер. 688) требуемый треуг.; тогда, описавъ около него кругъ, продолживъ линію AQ, дѣлящую уг. A пополамъ, до пересѣченія съ окружностью въ A_1 и соединивъ центръ круга O съ A и A_1, получимъ равнобедр. треуг. OAA_1, слѣд. уг. OAQ=уг. OA_1Q; но

$OA_1Q=QAH$; слѣд. и уг. $OAQ=QAH$. Поэтому для построенія требуемаго треуг. надо сперва построить прямоуг. треуг. AQH, въ

Чер. 687.



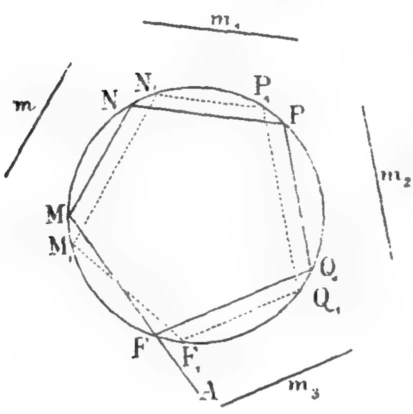
Чер. 688.



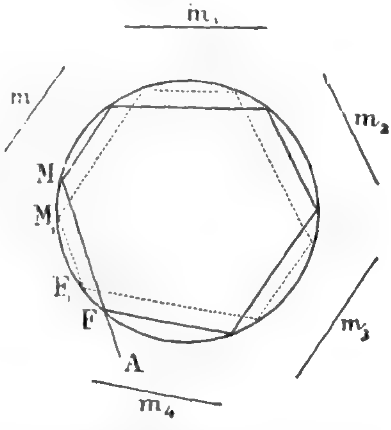
которомъ гипотенуза $AQ=p$, а катетъ $AH=h$; затѣмъ при A на линіи AQ построить уг. $OAQ=QAH$; отложить на его сторонѣ $AO=r$; описать изъ O рад. OA окружн.; продолжить QH до пересѣченія съ этой окружн.

12. Пусть число сторонъ нечетное, напр. 5, и требуемый многоуг. есть $MNPQF$ (чер. 689); взявъ на окружности произвольную точку M_1 и вписавъ въ окружность многоуг. $M_1N_1P_1Q_1F_1$, стороны ко-

Чер. 689.



Чер. 690.

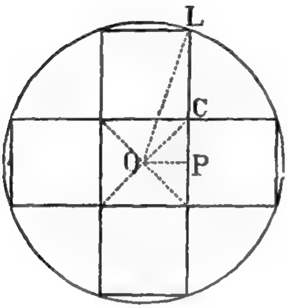


тораго соотвѣтственно параллельны m, m_1, m_2, m_3, найдемъ, что дуги M_1F_1 и MF равны между собою, ибо $M_1F_1=MF-MM_1+FF_1$; а дуга $MM_1=NN_1=PP_1=QQ_1=FF_1$, такъ какъ каждая изъ этихъ дугъ съ послѣдующей и съ предъидущей заключается между параллельными хордами MN и M_1N_1, NP и N_1P_1 и т. д. Поэтому и хорда $M_1F_1=MF$. Слѣд. для рѣшенія зад. надо вписать, начиная отъ произвольной точки M_1, многоуг. $M_1N_1P_1Q_1F_1$, всѣ стороны котораго, за исключеніемъ послѣдней, соотвѣтственно параллельны m, m_1, m_2,...; затѣмъ изъ A провести сѣкущую AM (предполагая, что A внѣ круга), такъ чтобы внутренняя часть ея FM была равна M_1F_1; изъ M провести $MN \parallel m$ и т. д.

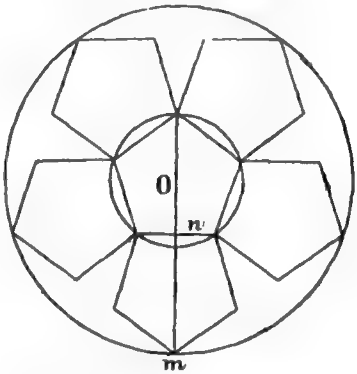
Если число сторонъ четное, то, поступая какъ и въ предъид. случаѣ, найдемъ, что (чер. 690) $M_1F_1 \parallel MF$, ибо дуги MM_1 и F_1F равны между собою; слѣд. надо изъ A провести сѣкущую $\parallel M_1F_1$.

13. Пусть радіусъ круга$=R$, сторона квадрата$=x$; изъ треуг. OPL (чер. 691) имѣемъ $^1/_4x^2+^9/_4x^2=R^2$, откуда $R:x=x:^2/_5R$.

Чер. 691



Чер. 692.



Изъ треуг. OCP найдемъ $OC=OP\sqrt{2}=\sqrt{^1/_5R^2}$; т. е. полудіагональ квадрата есть средняя пропорц. между радіусомъ и его пятой частью. Зная сторону или діагональ, легко построить квадратъ.

14. mo (чер. 692)$=mn+no$, или $R=r+a+a=r+2a$, гдѣ R есть радіусъ даннаго круга; r—радіусъ круга, описаннаго около 5—ка; a—апоѳема 5—ка. Такъ какъ $a=^1/_4r(\sqrt{5}+1)$, то $R=r+2a=$ $=r+^1/_2r(\sqrt{5}+1)=^1/_2r(3+\sqrt{5})$, а слѣд. $r=\dfrac{R}{^1/_2(3+\sqrt{5})}=$ $=^1/_2R\ (3-\sqrt{5})$; т. е. r есть меньшая часть радіуса R, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ осношеніи.

15. Положивъ рад. даннаго круга$=R$; сторону 6—ка$=$рад. круга, описаннаго около 6—ка,$=r$; апоѳему$=a$, найдемъ $R=3a+z$, гдѣ z опредѣлится изъ пропор. $\dfrac{2R-z}{^1/_2r}=\dfrac{^1/_2r}{z}$; отсюда $z=R-\sqrt{R^2-(^1/_2r)^2}$, Но $a=^1/_2\,r\sqrt{3}$, слѣд. $R=3a+z=^3/_2\,r\sqrt{3}+R-\sqrt{R^2-(^1/_2r)^2}$, откуда $R:r=r:^1/_7R$.

Глава IX.

§ 298 (стр. 225).

1. 56. **2**. 40 кв. саж. 3 кв. ф. 72 кв. дюй.
3. $13^1/_2$ саж. **4**. 316 саж. 1 арш. **5**. 14,7.

6. 12; 8; урав: $(36-x).(16+y)=36.16$ и $36-x=16+y$.
7. 77 саж. 6 ф. **8.** $x^2=4x$. **9.** 4 ф.
10. $4\frac{1}{2}$ ф. **11.** $13\frac{1}{2}$; $9\frac{9}{10}$.
12. $2\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{5}$. **13.** 540; 8,64; 28,632786.

14. 9,4815. **15.** $\dfrac{b^2h}{2\sqrt{b^2-h^2}}$; $17\frac{181}{420}$; 7185,05.

16. $\dfrac{c^2\sqrt{c^2-p^2}}{2p}$; 129,792; 81,67.

17. $\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{pq}=1568{,}32$.

18. $\dfrac{(p^2+h^2)h}{2p}=30240000$.

19. $c=\dfrac{2s}{b}=0{,}3$; $a=\dfrac{\sqrt{b^4+4s^2}}{b}=0{,}5$; $h=\dfrac{2bs}{\sqrt{b^4+4s^2}}=0{,}24$;

$p=\dfrac{4s^2}{b\sqrt{b^4+4s^2}}=0{,}18$; $q=\dfrac{b^3}{\sqrt{b^4+4s^2}}=0{,}32$.

20. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4s}\pm\sqrt{a^2-4s}\right)=2884$ и 2163.

21. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. **22.** $2\sqrt{\dfrac{s\sqrt{3}}{3}}$; $\sqrt{s\sqrt{3}}$.

23. $\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2-b^2}$; 360; 4122,2.

24. $h\sqrt{a^2-h^2}=983{,}178$.

25. $h=\dfrac{2s}{b}=56$; $a=\dfrac{\sqrt{b^4+16s^2}}{2b}=65$.

26. $b=\dfrac{2s}{h}=70$; $a=\dfrac{\sqrt{h^4+s^2}}{h}=41\frac{2}{9}$.

27. $\dfrac{b^2h_1}{4\sqrt{b^2-h_1^2}}=528{,}59\ldots$ **28.** $\dfrac{h^2h_1}{\sqrt{4h^2-h_1^2}}=3{,}73\ldots$

29. $\dfrac{(p^2-h^2)h}{2p}=19980{,}718$. **30.** $\sqrt{\dfrac{bh}{2}}=29\frac{1}{6}$.

31. 10,57... **32.** $a\sqrt{2}$. **33.** $\dfrac{bm}{h+m}$.

34. $\dfrac{bm}{h-m}$ **35.** 13,968. **36.** 17,25...

37. 39,09... **38** 47,87...
39. $\frac{1}{2}(hm+bn+mn)$; $\frac{1}{2}(hm+bn-mn)$; $\frac{1}{2}(hm-bn-mn)$; $\frac{1}{2}(bn-hm-mn)$.

40. 2100. **41.** $\dfrac{bh}{a+b+c}$.

42. 8,5...; 0,77...; 8,04...
43. $(3-2\sqrt{2})\,s^2=17{,}158$. **44.** $(3+2\sqrt{2})\,d^2=582{,}84$.
45. 1) $2m(a+b-2m)$; 2) $2m(a+b+2m)$.
46. $m=\frac{1}{2}(b-a)$ и $b>a$. **47.** 34 кв. ф. 104 кв. дюйм.

48. 4. **49** $6\frac{1}{5}$. **50.** 74 кв. саж.; 4 кв. ф.; 11 саж. 3 ф. 8 дюйм. **51.** 4 ф. 6 д.

52. Разстояніе искомой точки отъ вершины$=\frac{2a-mn}{n}$

53. $\frac{1}{2}(b+d-2m)$. **54.** 864; 4190. **56.** 596.

57. 1770,14. **58.** 5433.

60. 84; 360; 84; 24; . . . . .

61. 7080,353; 0,0795; 210,36; 86787.

62 $\frac{1}{4}ab\sqrt{3}=20,7$. . . . **63.** $\frac{1}{4}ab=1,87$.

64. $\frac{1}{4}ab\sqrt{2}=1,4$. . . . **65.** $\frac{1}{4}ab\sqrt{3}=3,4$. . . .

66. $\frac{b}{2}\sqrt{p\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+b^2}\right)}=253,92$. . . . .

67. $\frac{1}{4}(m^2-a^2)=43,75$. **68.** $\frac{1}{4}(a^2-d^2)=375$.

69. $\frac{1}{2}h(\sqrt{h^2+m^2}-h)=144$. **70.** $\frac{1}{2}h(\sqrt{h^2+d^2}+h)=600$.

71. $\frac{m^2h}{4(m+h)}=416\frac{2}{3}$.

72. $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4s}\pm\sqrt{a^2-4s})=21,6$ и 6,3.

73. $\sqrt{m^2-4s}=205$; $\frac{1}{2}(m\pm\sqrt{m^2-8s})=200$ и 45.

74. $\sqrt{d^2+4s}=407$; $\frac{1}{2}(d+\sqrt{d^2+8s})=885$; $\frac{1}{2}(-d+\sqrt{d^2-8s})=$ $=132$.

75. $\frac{p^2-s}{p}=148$; $\frac{p^2+s\pm\sqrt{(p^2+s)^2-8p^2s}}{2p}=140$ и 48.

76. $\frac{2(2m^2-5a^2)\mp3m\sqrt{5a^2-m^2}}{25}=120$.

77. $\frac{2(5a^2-2d^2)+3d\sqrt{5a^2-d^2}}{25}=67,2$.

78. 34,32. **79.** $\frac{1}{3}h(2m-\sqrt{m^2+3h^2})=126720$.

80. $b=\frac{1}{2}(m\pm\sqrt{m^2-8s})=600$ и 220; $h=\frac{1}{2}(m\mp\sqrt{m^2-8s})=$ 220 и 600; $a=\frac{1}{4}\sqrt{10(m^2-4s)\pm6m\sqrt{m^2-8s}}=372,2$ и 610.

81. $\frac{sa_1^2}{a^2}=333$. **82.** 24,5.

83. $10\frac{2}{3}$; 8; $6\frac{2}{3}$. **84.** $\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-p^2}=46$ кв. с. 34 кв. ф.

85. 10 с. 4,8 ф.; 13 с. 1,5 ф.; 8 с. 0,1 ф. **86.** 47,04.

87. $$s=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}+$$
$$+\sqrt{\frac{c+d+e}{2}\left(\frac{c+d+e}{2}-c\right)\left(\frac{c+d+e}{2}-d\right)\left(\frac{c+d+e}{2}-e\right)}$$

88. 4516,6

89. $\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-s}=112$ и 94

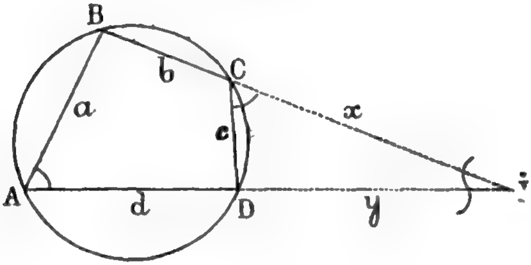
90. $\frac{1}{2}(\sqrt{e^2+2s}\pm\sqrt{e^2-2s})=38,5$ и 13,2.

91. $\sqrt{a^2+s}\pm\sqrt{a^2-s}=77$ и $26{,}4$.

92. $\dfrac{b+d}{4(d-b)}\sqrt{(a+d+c-b)(a-d+c+b)(a+d-c-b)(-a+d+c-b)}$ (см. зад. 55 § 231).

93. Треуг. $IAB\infty ICD$ (чер. 693); слѣд. $\dfrac{IC}{IA}=\dfrac{c}{a}$; $\dfrac{ID}{IB}=\dfrac{c}{a}$.

Чер. 693.



Если $IC=x$, $ID=y$, то $IB=x+b$; $IA=y+d$; слѣд. $\dfrac{x}{y+d}=\dfrac{c}{a}$; $\dfrac{y}{x+b}=\dfrac{c}{a}$. Отсюда опредѣлимъ x и y и тогда будемъ знать IB и IA. Площ. s четыреугольника $ABCD$ опредѣлится какъ разность площ. треуг. IAB и ICD. Получимъ $s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, гдѣ $p={}^1/_2(a+b+c+d)$.

94. $r=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$; $r_a=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$;

$r_b=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b}$; $r_c=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-c}$.

95. Проведя (чер. 694) діаметръ BOF, опустивъ на b высоту $BD=h$ и соединивъ F съ C, получимъ треуг. $ADB\infty FCB$; слѣд. $\dfrac{BF}{AB}=\dfrac{BC}{BD}$, откуда $R=\dfrac{abc}{2bh}=\dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

96. $h=\dfrac{2r.r_b}{r_b-r}$. Выведется изъ формулъ $(a+b+c)r=bh$ и $(a+c-b)r_b=bh$, выражающихъ равенство различныхъ выраженій площади тр—ка, и гдѣ h есть высота, опущенная на сторону b.

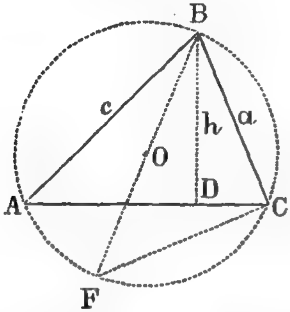
97. $h=\dfrac{2r_b\cdot r_c}{r_b+r_c}$. Выведется сложеніемъ пропорцій $\dfrac{a-b+c}{a}=\dfrac{h}{r_b}$ и $\dfrac{a+b-c}{a}=\dfrac{h}{r_c}$; пропорціи эти получимъ изъ формулъ $(a-b+c)r_b=ah$ и $(a+b-c)r_c=ah$, представляющихъ равенство различныхъ выраженій площади треуг—ка и гдѣ h есть высота, опущенная на сторону a.

98. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

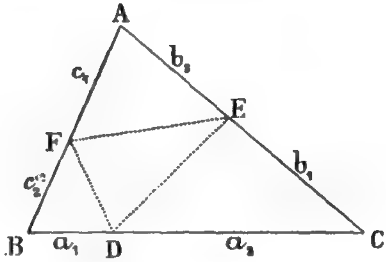
99. $\frac{\text{пл. } ADE}{\text{пл. } ABC}=\frac{m^2}{(m+n)^2}$; $\frac{\text{пл. } BDF}{\text{пл. } ABC}=\frac{n^2}{(m+n)^2}$; $\frac{\text{пл. } DECF}{\text{пл. } ABC}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

100. $\frac{c-2m}{c}$.

Чер. 694.



Чер. 695.

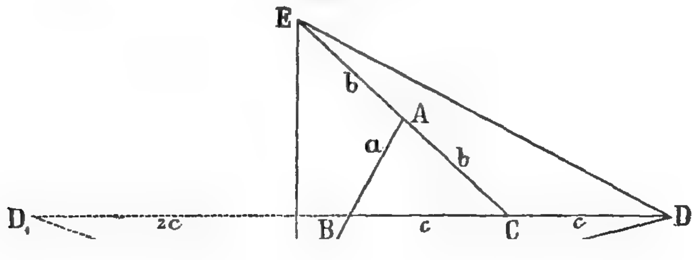


101. $\frac{\text{пл. } DEF}{\text{пл. } ABC}=\frac{\text{пл. } ABC-(\text{пл. } AFE+\text{пл. } ECD+\text{пл. } FBD)}{\text{пл. } ABC}$ $=1-\frac{\text{пл. } AFE+\text{пл. } ECD+\text{пл. } FBD}{\text{пл. } ABC}$ (см. чер. 695). Опредѣливъ по § 290-му отношеніе площ. треуг. AFE, ECD и FBD къ площ. треуг. ABC, найдемъ $\frac{\text{пл. } DEF}{\text{пл. } ABC}=\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2}{abc}$.

102. Для рѣшенія задачи, надо поступать подобно тому, какъ въ пред. зад., имѣя въ виду, что площади тр—ковъ, у которыхъ два угла составляютъ дополненія до двухъ прямыхъ, относятся какъ произведенія сторонъ, заключающихъ эти углы.

103. $\frac{\text{пл. } DEF}{\text{пл. } ABC}=\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } ABC}+\frac{\text{пл. } DBF}{\text{пл. } ABC}+\frac{\text{пл. } FEA}{\text{пл. } ABC}+$ $+\frac{\text{пл. } ECD}{\text{пл. } ABC}$ (см. чер. 696); $\frac{\text{пл. } DBF}{\text{пл. } ABC}=\frac{BD.BF}{a.c}$, ибо пл. $BDF=$

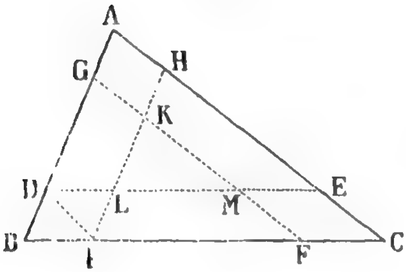
Чер. 696



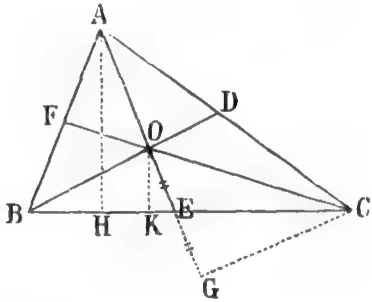
$=$пл. BD_1F, а треуг. BD_1F имѣетъ съ треуг. ABC по равному углу; слѣд. $\frac{\text{пл. } DBF}{\text{пл. } ABC}=\frac{2ac}{ac}=2$; а $\frac{\text{пл. } DEF}{\text{пл. } ABC}=7$.

104. $BID \infty BAC$ (чер. 697), слѣд. $\frac{\text{пл. } BID}{\text{пл. } ABC}=\frac{n^2}{(m+n)^2}$, а потому $\frac{\text{пл. } BILD}{\text{пл. } ABC}=\frac{2n^2}{(m+n)^2}$; $\frac{\text{пл. } KLM}{\text{пл. } ABC}=\frac{(m-2n)^2}{(m+n)^2}$; $\frac{\text{пл. } LIKM}{\text{пл. } ABC}=$

Чер. 697.



Чер. 698.



$=\frac{n(2m-3n)}{(m+n)^2}$.

105. Изъ выраженій площади треуг.

$s=\frac{1}{2}ah_a$, $s=\frac{1}{2}bh_b$, $s=\frac{1}{2}ch_c$ найдемъ $b=\frac{ah_a}{h_b}$, $c=\frac{ah_a}{h_c}$. Вставивъ величины b и c въ урав.

$$\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

опредѣлимъ изъ него a; умноживъ a на $\frac{1}{2}h_a$, получимъ площадь$=$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}}$$

106. $\frac{OK}{AH}=\frac{OE}{AE}$ (чер. 698); а $OE=\frac{1}{3}AE$, слѣд. пл. $OBC=$ $=\frac{1}{3}$ пл. ABC. Продолжимъ AE на $EG=OE$ и соединимъ G съ C; тогда плош. $OBC=OGC$, слѣд. $OGC=\frac{1}{3}ABC$. Въ треуг. OGC сторона $OG=\frac{2}{3}m_a$, $OC=\frac{2}{3}m_c$, $GC=\frac{2}{3}m_b$ (ибо $GC:OD=AC:AD$). Опредѣливъ плош. треуг. OGC по его сторонамъ и умноживъ ее на 3, найдемъ пл. $ABC=$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a-m_b+m_c)(-m_a+m_b+m_c)}.$$

107. $s=\frac{1}{2}r(a+b+c)$; $s=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$;
$s=\frac{1}{2}r_b(a-b+c)$; $s=\frac{1}{2}r_c(a+b-c)$.

Отсюда имѣемъ

$$a+b+c=\frac{2s}{r};\ -a+b+c=\frac{2s}{r_a};$$

$$a-b+c=\frac{2s}{r_b};\quad a+b-c=\frac{2s}{r_c}.$$

Вставивъ эти выраженія въ формулу площ. треуг. по его сторонамъ, получимъ $s=\sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}$.

108. $^1/_4 na\sqrt{4r^2-a^2}$.

109. $^3/_4 r^2\sqrt{3}$; $2r^2$; $^3/_2 r^2\sqrt{3}$; $^5/_8 r^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$

$=^5/_8 r^2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})}=^5/_4 r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

110. $^1/_4 a^2\sqrt{3}$; a^2; $^3/_2 a^2\sqrt{3}$; $^5/_4 a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

111 $^2/_3\sqrt{s\sqrt{3}}$; $^1/_2\sqrt{2s}$; $^2/_3\sqrt{2s\sqrt{3}}$; $^1/_5\sqrt{s\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}$.

112. $^2/_3\sqrt{3s\sqrt{3}}$; $\sqrt{s}$; $^1/_3\sqrt{2s\sqrt{3}}$; $^1/_5\sqrt{2s\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}$.

113. $2r^2\sqrt{2}$; $3r^2$.

114. $3a^2\sqrt{3}$; $4a^2$; $2a^2\sqrt{3}$; $2a^2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$.

115. $AD=x=c\sqrt{n}=9$. **116.** 29,39. **117.** 10,062.

118. $AD=x=c\sqrt{\frac{m}{m+n+p}}$; $AF=y=c\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}}$;

$x=173,2$; $y=244,9$.

119. $x=5,1429$; $y=8,908$.

120. $AD=x=c\sqrt{\frac{s_1}{s}}=21^2/_3$. **121.** $x=12,07\ldots$

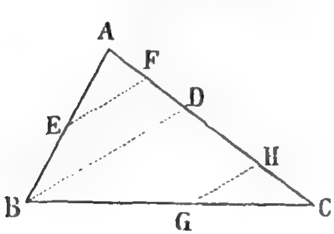
122. $AF=x=\frac{mbc}{(m+n)AD}=465$. **123.** $x=32$.

124. Задача 124 должна быть выражена такъ: Изъ точки D на сторонѣ AB треуг. ABC провести прямую DE такъ, чтобы она образовала съ сторонами AB и AC треугольникъ, площадь котораго $=s_1$? При этомъ условіи $AE=x=\frac{bc}{AD}\cdot\frac{s_1}{s}=10^5/_7$. **125.** $x=100$.

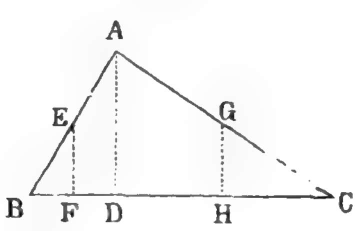
126. $\frac{\text{пл. } AEF}{\text{пл. } ABC}=\frac{m}{m+n+p}=\frac{AE.AF}{AB.AC}$ (чер. 699). Но $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}$;

слѣд. $\frac{m}{m+n+p}=\frac{AF^2}{AC.AD}$ и $AF=x=\sqrt{\frac{mb.AD}{m+n+p}}$.

Чер. 699.



Чер. 700.



Такъ же найдемъ $CH=y=\sqrt{\frac{pb.CD}{m+n+p}}$; $x=19,35\ldots$; $y=17,3$.

128. $x=10,94$; $y=22,91$. **129.** $x=73,03$; $AH=137,63$.

130. $\frac{\text{пл. } BEF}{\text{пл. } ABC}=\frac{m}{m+n+p}=\frac{BE.BF}{ca}$ (чер. 700); но $\frac{BE}{BF}=\frac{c}{BD}$, а $BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$; слѣд. $\frac{m}{m+n+p}=\frac{2BF^2}{a^2+c^2-b^2}$, а $BF=$ $=\sqrt{\frac{m(a^2+c^2-b^2)}{2(m+n+p)}}$. Такъ же найдемъ $CH=\sqrt{\frac{p(a^2+b^2-c^2)}{2(m+n+p)}}$; $BF=122,9$; $CH=163,9$.

131. $BF=13,67$; $BH=23,74$.

132. $BE=\frac{2mb}{m+n}=326,4$.

133. $BE=\frac{2mb}{m+n+p}=90$; $DF=\frac{2pa}{m+n+p}=366$.

134. $BE=x=\frac{2mb}{m+n}-c=221,6$.

135. $x=52,25$. **136.** $BE=x=\frac{2s_1}{h}-c=200$.

137. $x=55,8\ldots$

138. $BE=x=\frac{2mb}{m+n+p}-c=12$; $CF=y=\frac{2pb}{m+n+p}-d=40$.

139. $x=19,55$; $y=79,95$.

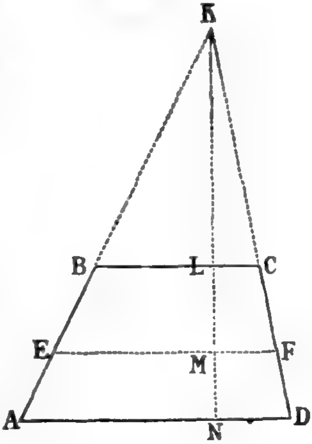
140. $BE=x=\frac{m(b+d)}{2(m+n)}=36$. **141.** $x=45,7\ldots$

142. $BE=x=\frac{m(b+d)}{2(m+n+p)}$; $=y=\frac{n(b+d)}{2(m+n+p)}$; $x=44$; $y=58^2/_3$. **143.** $x=43,625$; $y=65,4375$.

144. $\frac{\text{пл. } EBCF}{\text{пл. } ABCD}=\frac{m}{m+n}=\frac{^1/_2(EF+d).LM}{^1/_2(b+d).LN}$ (чер. 701). Но $\frac{KN}{KL}=\frac{b}{d}$; поэтому $\frac{LN}{KL}=\frac{b-d}{d}$. Такъ же найдемъ $\frac{LM}{KL}=\frac{EF-d}{d}$. Отсюда $\frac{LM}{LN}=\frac{EF-d}{b-d}$; слѣд. $\frac{m}{m+n}=\frac{EF^2-d^2}{b^2-d^2}$;

$$EF=x=\sqrt{\frac{mb^2+nd^2}{m+n}}=96,84.$$

Чер. 701.



145. $x=113,59$.

146. $x=174,02$.

147. $x=323,6$. **148.** $x=69,8$.

149. Подобно тому, какъ въ зад. 144-й, найдемъ

$$EF=x=\sqrt{\frac{mb^2+(n+p)d^2}{m+n+p}}=117,72;$$

$$GH=y=\sqrt{\frac{(m+n)b^2+pd^2}{m+n+p}}=126,71.$$

150. $x=63{,}81$; $y=75{,}98$.

151. $EF=x=\sqrt{d^2+\frac{2s_1(b-d)}{h}}=126{,}4$.

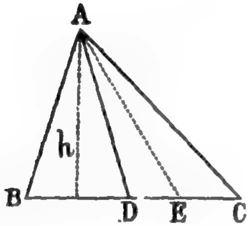
152. $x=66{,}09$.

153. Если часть ABD (чер. 702) цѣнностью по 20 коп. за кв. саж., то линія AE, дѣлящая треуг. требуемымъ образомъ, пойдетъ внутри ACD. Получимъ урав.

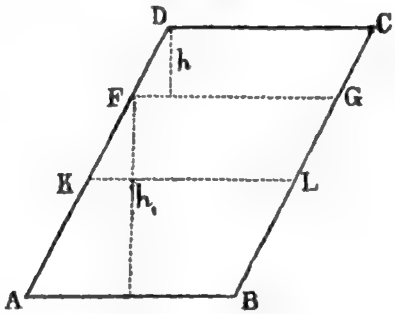
$BD.{}^1/_2h\,.\,20+DE.{}^1/_2h.\;30=(DC-DE).\;{}^1/_2h.\;30$, или $12.20+DE.30=12.30-DE.30$, откуда $DE=2$, слѣд. $BE=14$, $EC=10$.

154. Пл. $FDCG$ (чер. 703) $=FG.h=400\,h$; пл. $AFGB=$

Чер. 702.



Чер. 703.



$=AB.\;h_1=400h_1$; но $\frac{h_1}{h}=\frac{AF}{FD}=\frac{200}{100}$, слѣд. пл. $AFGB=800h$. Стоимость пл. $FDCG=400h.72$, а стоимость пл. $AFGB=800h.96$; слѣд. искомая линія KL должна проходить между AB и FG, и кромѣ того должно быть

пл. $FGCD.72+$пл. $KLGF.96=$пл. $ABKL.96$,

или $400h.72+400.\frac{200-x}{100}.\,h.96=400.\,\frac{x}{100}.\;96$, гдѣ черезъ x означена AK. Получимъ $x=137{,}5$.

155. Стоимость всего поля$=$
$={}^1/_2(12+9).8.21+{}^1/_2(9+6).\;8.7=2184$; слѣд. каждый изъ искомыхъ прямоугольниковъ долженъ стоить 1092. Цѣнность искомаго прямоуг. $AXYD$ выразится ${}^1/_2(XH+9).\;\;x.21+{}^1/_2(HY+9).\;\;x.7$. Но $\frac{XH}{AG}=\frac{OX}{OA}$, или $\frac{XH-AG}{AG}=\frac{OX-OA}{OA}$ или $\frac{XH-9}{9}=\frac{x}{OA}$; а изъ пропорціи $\frac{BF}{AG}=\frac{OB}{OA}$ или $\frac{BF-AG}{AG}=\frac{OB-OA}{OA}$ или $\frac{12-9}{9}$ $=\frac{8}{OA}$ найдемъ $OA=24$ и слѣд. $XH=\frac{3x+72}{8}$; а $HY=\frac{72-3x}{8}$; поэтому стоимость искомаго прямоуг. выразится

$$\frac{9+{}^1/_8(72+3x)}{2}\cdot x\cdot 21+\frac{9+{}^1/_8(72-3x)}{2}\cdot x\cdot 7=$$
$={}^1/_{16}(144+3x)21x+{}^1/_{16}(144-3x)7x=1092$, откуда $x=-48+52,15\ldots$

156. $x=5,75$. **157**. Искомая линія должна идти внутри отдѣленнаго треуг.; $x=0,75$.

158. Искомая линія должна идти внутри трапеціи; $x=10,21$.

159. $x=8,44$. **160**. $x=10$.

§ 299 (стр. 235).

1. Данный треуг. составляетъ $^1/_2$ того и другаго прямоуг.

2. Подобно предъид. **3**. Провести высоты въ обоихъ треуг.

4. Наложить одинъ треуг. на другой, совмѣстивъ по равной сторонѣ. **5**. $\frac{ah}{2}$ будетъ maximum при $h=b$.

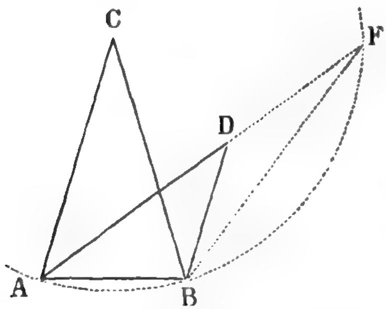
6. На основаніи выраженій площ. треуг. и прямоуг. и теоремы: наклонная больше перпендикуляра.

7. На общемъ основ. описать дугу, вмѣщающую уг. при вершинѣ.

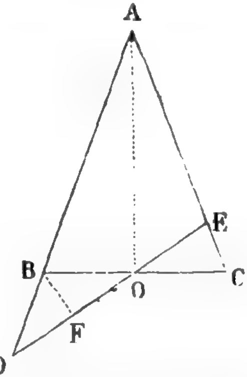
8. Изъ вершины C (чер. 704) равнобедр. треуг. описываемъ окружн., а сторону AD разностор. треуг. продолжаемъ до пересѣченія съ окружн. въ F; тогда уг. $AFB={}^1/_2ACB={}^1/_2ADB$; слѣд. треуг. DBF равнобедр. и $AD+DB=AF$; а $AF<AC+CB$.

9. Равнобедр. треуг. ABC (чер. 705)$=ABOE+OEC$; разностор. треуг.$=ABOE+BOD$; а $BOD>OEC$.

Чер. 704.



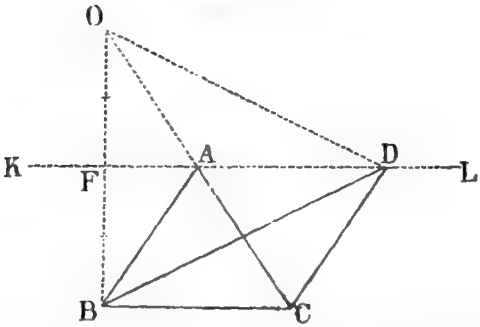
Чер. 705.



10. Всѣ такіе треуг. (чер. 706) имѣютъ вершины на линіи $KL\parallel$ основанію BC. Проведя $BFO\perp KL$, отложивъ $FO=BF$ и соединивъ O съ A и D, найдемъ, что периметръ равнобедр. треуг. ABC равенъ $BC+CO$, а перим. разност. треуг. BDC равенъ $BC+CDO$.

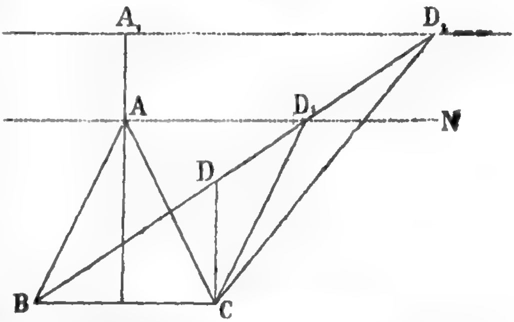
11. На основ. предъид. теоремы.

Чер. 706.



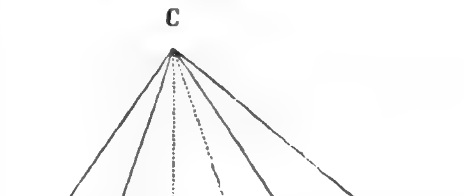
12. BAC (чер. 707) равнобедр. треуг.; BDC разностор., и периметры ихъ равны. Вершина D должна лежать между BC и $AN \parallel BC$, потому что еслибъ она была на AN, напр. въ D_1, то площ. BD_1C равнялась бы площ. BAC, и (см. зад. 10 § 299) периметръ BD_1C былъ бы больше перим. BAC; а если бы D была выше AN, напр. въ D_2, то площ. BD_2C равнялась бы площ. треугольника BA_1C и перим. BD_2C былъ бы больше перим. BA_1C, а слѣд. и подавно больше перим. BAC. Если же D лежитъ между BC и AN, то пл. $BAC >$ пл. BDC.

Чер. 707.



13. Пусть (чер. 708) ACB равнобедр., A_1CB_1 разностор. треуг. Основанія ихъ имѣютъ общую часть A_1B, и чтобы доказать, что $AA_1 < BB_1$, перегнемъ чер. по перпендикуляру CD; тогда треуг. CAA_1 приметъ положеніе CBE. Такъ какъ уг. $ACA_1 =$ $=$ уг. B_1CB, то CB дѣлитъ уг. B_1CE пополамъ; слѣд. $\frac{BE}{BB_1} = \frac{CE}{CB_1}$, или $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CE}{CB_1}$; а $CE < CB_1$.

Чер. 708.



14. На основаніи равенства прямоуг. треуг. по гипотенузѣ и острому уг. **15**. Треуг. подобны; изъ отношенія ихъ площадей выведется равенство сторонъ между равными углами.

16. Надо опустить высоты на равныя стороны; высоты будутъ равны. Затѣмъ изъ равенства прямоуг. тр—ковъ, образованныхъ этими высотами, выведется равенство другихъ двухъ сторонъ, прилежащихъ къ равнымъ угламъ. **17**. Опустивъ высоты, которыя будутъ равны, изъ равенства образовавшихся прямоуг. тр—ковъ выведемъ равенство угловъ, заключенныхъ въ данныхъ треуг. между равными сторонами.

18. Слѣдуетъ изъ подобія треуг., образованныхъ отрѣзками высотъ.

20. Если a сторона квадрата, b и c стороны прям—ка, то $2a=$ $=b+c$ и слѣд. $a^2=bc+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$.

21. См. зад. 19 и 20 § 299.

22. Выводится изъ того, что $(a-b)^2>O$.

23. $x^2=ab$; $x=\sqrt{ab}$; $\sqrt{ab}<{}^1/_2(a+b)$.

26. На основ. выраженій площ. трап. и площ. треуг.

27. Чрезъ средину непараллельной стороны провести прямую || противоположной сторонѣ.

29. Назвавъ бóльшее основаніе a, меньшее—b, высоту бóльшаго треуг.—H, меньшаго—h, высоту трапеціи—h_1, найдемъ $H=\frac{ah_1}{a-b}$; $h=\frac{bh_1}{a-b}$; слѣд. площ. трап.$={}^1/_2aH-{}^1/_2bh={}^1/_2(a+b)h_1$.

30. На основ. выраженія площ. треуг.

31. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 суть средины сторонъ AB, BC, CD, DA четыреугольника $ABCD$; проведемъ діагональ AC; $A_1B_1 \parallel AC$, ибо A_1B_1 соединяетъ средины двухъ сторонъ треуг. ABC; также и $D_1C_1 \parallel AC$; слѣд. $A_1B_1 \parallel D_1C_1$; фигура $A_1B_1C_1D_1$ есть параллелограммъ; $A_1B_1C_1D_1$ прямою AC дѣлится на два параллелограмма, изъ коихъ одинъ$={}^1/_2$ треуг. ABC, другой$={}^1/_2ADC$ (ибо основаніе и высота каждаго параллелог. равны ${}^1/_2$ основ. и высоты соотвѣтствующаго треуг.).

32. Проведя черезъ всѣ вершины многоугольниковъ прямыя, параллельныя данной, получимъ равновеликіе треугольники и трапеціи.

33. Надо вывести выраженіе площ. такого многоугольника при помощи разсматриваемыхъ перпендикуляровъ.

34. Стороны тр—ка раздѣлятъ пополамъ ромбы, изъ которыхъ состоитъ 6—къ. **36**. Къ квадрату суммы катетовъ придать квадратъ разности ихъ. **37**. Основ. на теор. 20 § 299.

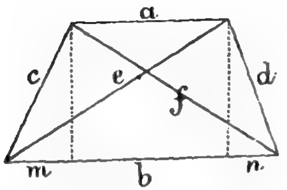
38. Сравнить квадраты полупериметровъ.

39. Выразить (чер. 709) e черезъ b, d и n, а f черезъ b, c и m.

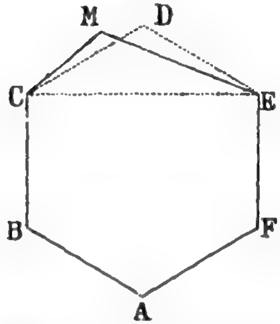
40. Пусть наибольшимъ будетъ многоуг. $ABCMEF$ (чер. 710), въ которомъ напр. $ME>MC$. Проведемъ CE и построимъ на ней равнобедр. треуг. CDE одинакаго периметра съ CME; по теор. 12-й

§ 299 пл. $CDE>$пл. CME и слѣд. пл. $ABCDEF>$пл. $ABCMEF$.

Чер. 709.

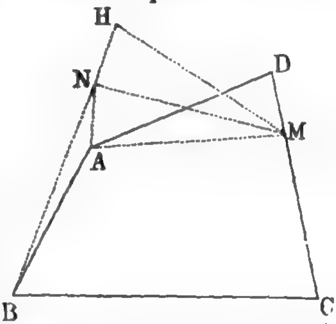


Чер. 710.



41. На основаніи предъид. теоремы остается доказать, что наибольшую площ. имѣетъ многоуг. равноугольный. Допустимъ обратное, напр. что многоуг. $ABCD$ (чер. 711) изъ всѣхъ одинакаго съ нимъ периметра многоугольниковъ имѣетъ площадь наибольшую, и что въ немъ уг. $A>$уг. D. Проведемъ AM такъ, чтобы уг. BAM былъ больше уг. AMC (что всегда возможно, если уг. $A>$уг D), и на линіи AM построимъ треуг. ANM $=ADM$; тогда многоуг. $ANMCB$ будетъ имѣть съ $ABCD$ одинакую площадь и одинакій периметръ. Кромѣ того уг. $NAM=$уг. AMD, слѣд. уг. $NAM+$уг. $MAB>$уг.$AMD+$ $+$уг. AMC, ибо уг. $MAB>$уг. AMC по построенію; слѣдоват. уг. $NAM+$уг.$MAB>180°$, а уг. $NAB<180°$. Соединивъ N съ B, получимъ многоуг. $BNMC$, котораго площадь больше площ. $ANMCB$, а периметръ меньше; слѣд. многоуг. $BNMC$ одинакаго числа сторонъ съ даннымъ $ABCD$ имѣетъ противъ даннаго бо́льшую площ. и меньшій периметръ. Поэтому, продолживъ BN и взявъ на ней точку H такъ, чтобы разность между $NH+HM$ и прямой MN равнялась разности периметровъ даннаго многоуг. $ABCD$ и многоуг. $BNMC$, мы получимъ новый многоуг. $BHMC$, имѣющій съ даннымъ одинакій периметръ и одинакое число сторонъ, но бо́льшую площадь, что и показываетъ невѣрность нашего допущенія.

Чер. 711.

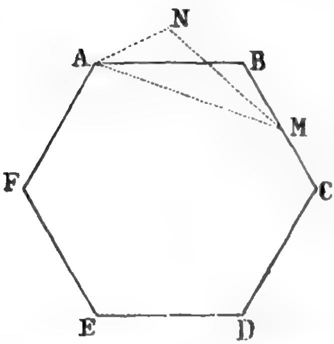


42. Допустивъ, что неправ. многоуг. имѣетъ наименьшій периметръ, мы могли бы построить прав. многоуг. одинакаго числа сторонъ и одинакаго периметра съ нимъ, но бо́льшей площади; слѣд. мы имѣли бы два прав. одноименныхъ многоуг. одинакаго периметра, но разной площади.

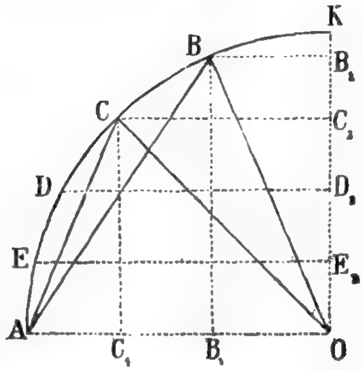
43. Всякій прав. многоуг. можно замѣнить равновеликимъ неправильнымъ, имѣющимъ съ нимъ одинакій периметръ, но большее число сторонъ; напр. прав. n—угольникъ $ABCDEF$ (чер. 712) можно замѣнить многоуг. $ANMCDEF$ съ $n+1$ сторонами, проведя AM изъ A въ произвольную точку M стороны BC и построивъ треуг. $ANM=ABM$. На основаніи этого теорема сводится къ предъид. **44**. Доказ. подобно 43. **45**. Доказ. подобно 40 на основаніи теор. 7 и 8 § 299.

46. Пусть (чер. 713) AB есть сторона прав. n—угольника, AC—

Чер. 712.



Чер. 713.

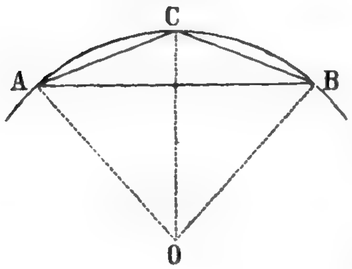


сторона прав. $n+1$—угольника. Проведемъ радіусы OA, OC, OB; площ. n—угольника$=n$ площ. AOB; площ. $n+1$—угол.$=(n+1)$ пл. треуг. AOC. Но основаніе у этихъ треуг. общее, слѣд. надо доказать, что $(n+1)$. $CC_1>n.BB_1$ или $CC_1>n$. B_2C_2, гдѣ CC_1 и BB_1 высоты треуг—въ, а B_2C_2 разность этихъ высотъ. Для этого замѣтимъ, что дуга $AB=\frac{1}{n}$, дуга $AC=\frac{1}{n+1}$ окружности; слѣд. дуга $BC=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ окружн.; слѣд. $AC : BC=n$. Отложимъ дугу BC на AC, и пусть D, E . . . суть точки, гдѣ будутъ падать концы этой дуги. Опустивъ изъ нихъ перпендикуляры на OK, получимъ
$C_2D_2>B_2C_2$; $D_2E_2>B_2C_2$ . . . . . . , а потому $C_2O>n$. B_2C_2 или $CC_1>n$. B_2C_2.

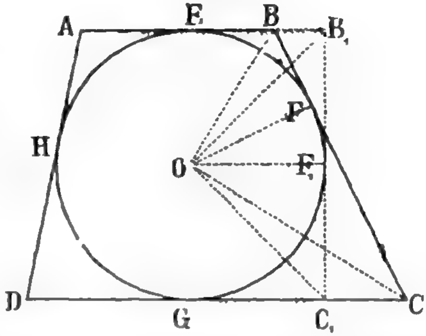
47. Пусть (чер. 714) AB сторона прав. n—ка; проведя радіусъ $OC\perp AB$, получимъ AC—сторону прав. $2n$—ка. Такъ какъ площ. $ACBO=\frac{1}{2}AB.OC=\frac{1}{2}AB.R$, то площ. прав. $2n$—ка$=s_{2n}=$ $=\frac{1}{2}R.n.AB=p_n.\frac{1}{2}R$, гдѣ $p_n=n.AB$ есть перим. прав. n—ка; слѣд. $p_n=\frac{2}{R}s_{2n}$; а s_{2n} увеличивается съ увелич. n (см. пред. теор.).

48. Пусть наименьшій периметръ имѣетъ неправ. многоуг. $ABCD$ (чер. 715). Изъ его сторонъ по крайней мѣрѣ одна, напр. BC, не дѣлится въ точкѣ касанія E пополамъ. Замѣнимъ эту сторону стороной B_1C_1, которая въ точкѣ касанія F_1 дѣлится пополамъ, и проведемъ изъ центра прямыя OB, OB_1, OC, OC_1; тогда получимъ уг. $ABC+$уг. $DCB=$уг. AB_1C_1+уг. DC_1B_1. Но уг. $OBC=$ $=\frac{1}{2}$ уг. ABC; $OB_1C_1=\frac{1}{2}AB_1C_1$.., поэтому уг. $OBC+OCB=$

Чер. 714.



Чер. 715.



$= OB_1C_1+OC_1B_1$, а слѣд. и остальные углы треуг. BOC и B_1OC_1 равны. А такъ какъ эти треуг. имѣютъ одинакія высоты OF и OF_1, притомъ треуг. B_1OC_1 равнобедр., то площ. $B_1OC_1<$площ. BOC и слѣд. $B_1C_1<BC$, или $B_1F_1+F_1C_1<BF+FC$, а потому

$$B_1E+B_1F_1+F_1C_1+C_1G<BE+BF+FC+CG$$

и $AD+AB_1+B_1C_1+C_1D<AD+AB+BC+CD$;

т. е. периметръ неправ. многоуг. всегда можетъ быть уменьшенъ; потому наименьшій периметръ имѣетъ многоуг. правильный.

49. На основаніи предъид. теор. доказ. подобно теор. 43 § 299.

§ 300 (стр. 237).

1. Основаніе искомаго треуг. извѣстно; вершина должна лежать на линіи, параллельной основанію, находящейся отъ него въ разстояніи высоты AD даннаго треуг., и на окружности, описанной радіусомъ b_1 изъ точки C_1, соотвѣтствующей точкѣ C даннаго треуг. Рѣшеній два, одно или ни одного, смотря по тому, будетъ ли $b_1>AD$, $b_1=AD$, $b_1<AD$.

2. Рѣш. подобно 1-й. **3**. Высота искомаго треуг. есть 4-я пропорц. къ AC, BD и a_1, гдѣ AC и BD суть основаніе и высота даннаго треуг. **4**. Рѣш. подобно 3-й. **5**. Основаніе искомаго треуг. есть 4-я пропорц. къ BC, h и h_1, гдѣ BC основаніе, h—высота даннаго треуг., h_1—разстояніе данной точки M отъ основанія даннаго треуг. **6**. Основаніе треуг.$=$суммѣ основаній.

7. См. зад. 6-ю. **8**. Изъ средины стороны, равной основанію, возставить перпендикуляръ; отложить на немъ высоту даннаго треуг., соединить полученную точку съ концами взятой стороны.

9. Рѣш. на основаніи зад. 1-й. **10**. Вершина треуг. опредѣлится пересѣченіемъ линіи, идущей изъ конечной точки основанія подъ уг. B, и параллели къ основанію, проведенной на разстояніи, которое равно 4-й пропорц. къ h, a и a_1, гдѣ h и a основаніе и высота даннаго треуг.

11. Вершина треуг. на такой же параллели, какъ въ предъид. зад., и на окружности, описанной изъ конечной точки основанія радіусомъ b_1. Рѣшеній два, одно или ни одного.

12. Рѣш. подобно 11-й. **13.** Рѣш. подобно 11-й.

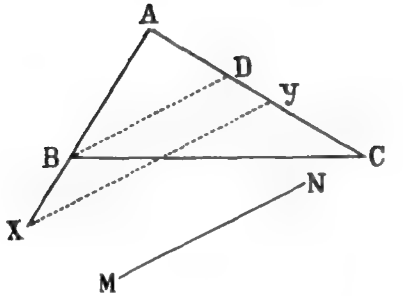
14. Основаніе искомаго треуг. есть 4-я пропорц. къ BC, h и h_1, гдѣ h высота даннаго треуг.; h_1—разстояніе O отъ BC.

15. На основаніи теоремы объ отношеніи площадей тр—ковъ, имѣющихъ по равному углу, найдемъ, что сторона равнобедр. треуг. есть сред. пропорціон. между сторонами AB и AC даннаго треуг.

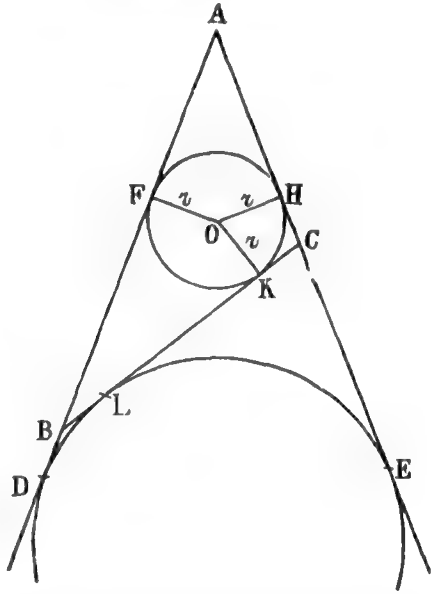
16. AXY (чер. 716) искомый треуг.; $BD \parallel MN$; $\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } ABC}=\frac{AD}{AC}$; $\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } AXY}=\frac{AD^2}{AY^2}$; $AY^2=AD.AC$.

17. Если ABC (чер. 717) искомый треуг., то $AB+BC+AC=$

Чер. 716.



Чер. 717.



$=AB+BL+CL+AC=AB+BD+CE+AC=AD+AE$ $=2AD$; слѣд. $AD=p$. Площ. $ABC=pr$, гдѣ r—рад. впис. круга; слѣд. $pr=\frac{bh}{2}$ и $r:h=b:2p$, гдѣ b есть основаніе, h—высота даннаго треугольника. Поэтому, построивъ r, надо радіусомъ r описать кругъ, касательный къ сторонамъ угла A; отложить $AD=p$; описать кругъ, касательный къ AE и къ AD въ точкѣ D; провести общую внутреннюю касательную.

18. Означивъ основаніе и высоту даннаго треуг. ABC черезъ b и h, основаніе и высоту треуг. MON черезъ b_1 и h_1, основаніе искомаго треуг. через x, получим $\frac{x^2}{b_1^2}=\frac{bh}{b_1h_1}$, или $x^2=b_1.\frac{bh}{h_1}=b_1y$, полагая $\frac{bh}{h_1}=y$. Построив y, а затѣм x, надо на x построить треуг. ∞MON.

19. Рѣш. основано на томъ, что параллелограммы съ равными основаніями и высотами равновелики. Рѣшеній два, одно, или ни одного, смотря по тому, будетъ ли m больше, равно или меньше высоты параллелограмма, за основаніе котораго принимаемъ линію AB.

20. См. предъид. зад.

21. Другая сторона искомаго параллелограмма есть 4-я пропорц. къ линіи m и сторонамъ даннаго параллелогр.

22. Основаніе искомаго параллелогр. есть 4—я пропорц. къ основанію и высотѣ даннаго и высотѣ искомаго.

23. Рѣш. подобно зад. 7-й § 300.

25. Другая діагональ ромба вдвое больше высоты параллелограмма, соотвѣтствующей сторонѣ, принятой за первую діагональ ромба.

26. Сторона искомаго квадрата $=\frac{a}{\sqrt{3}}={}^1/_3\sqrt{(2a)^2-a^2}$, гдѣ a сторона даннаго квадрата.

27. Задача приводится къ построенію треуг. по гипотенузѣ и высотѣ, которая есть 4—я пропорц. къ d, ${}^1/_2d$ и m, гдѣ d есть діагональ даннаго квадрата.

28. На основаніи выраженія площади трапеціи.

29. Приводится въ зад. 21-й § 300.

30. Если x и y стороны прям—ка, то $xy=m^2$, $x+y=p$, и зад. приводится къ зад. 11 § 233. Задача возможна, если $m<{}^1/_2p$.

31. Построивъ квадратъ m^2, равновеликій данному прямоуг., приведемъ задачу къ предъид.

32. $x=\frac{m^2}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{a}\right)^2-2m^2}$, гдѣ x есть разстояніе точки пересѣченія искомой линіи съ стороной угла BAC отъ его вершины A, а a—разстояніе точки O отъ стороны уг. BAC.

33. Пусть треуг. AED (чер. 718) требуемый; проведемъ $OM\perp AC$, $ON\perp AB$ и $OK\parallel AB$; положимъ $ON=OM=b$; $OK=AK=a$; $AE=y$, $AD=x$. Такъ какъ треуг. $AED=AOD+AOE$, то площ. $AED=m^2={}^1/_2bx+{}^1/_2by$; слѣд. $bx+by=2m^2$. Такъ какъ $AED\infty KOD$, то $\frac{y}{a}=\frac{x}{x-a}$ и слѣд. $bx+\frac{abx}{x-a}=2m^2$.

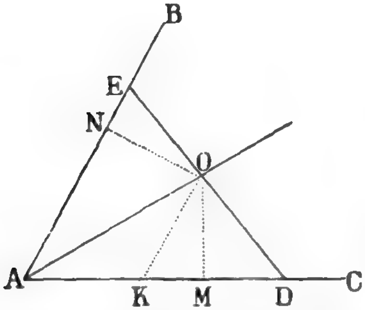
34. Рѣш. подобно зад. 32-й § 300.

35. Пусть MN (чер. 719) требуемая линія. Проведемъ $OD\parallel AB$; проведемъ через M,N,D окружность и продолжимъ DO до пересѣченія съ окружностью въ F; тогда $OD.OF=OM.ON=m^2$; опредѣливъ отсюда OF, найдемъ точку N, описавъ на OF дугу, вмѣщающую уголъ, равный уг. BAC, ибо уг. $ONF=MDF=BAC$.

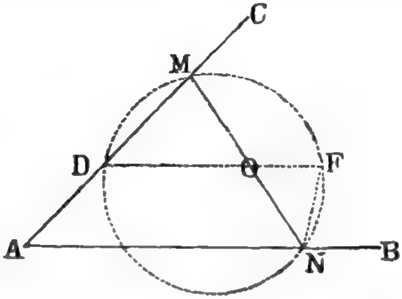
36. Пусть (чер. 720) $MN=l$ и площ. $AMN=m^2$. Если $AN=x$,

$AM=y$ и $MP\perp AC$, то $l^2=x^2+y^2-2x.AP$; $x.MP=2m^2$. Взявъ на

Чер. 718.

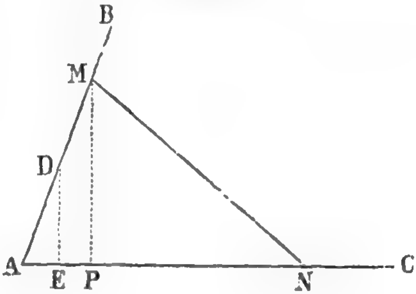


Чер. 719.



AM точку D и проведя $DE\perp AC$, будемъ имѣть $AD=a$, $AE=c$, $DE=b$—линіи, вполнѣ опредѣляемыя положеніемъ точки D и которыя слѣд. можно принять за данныя. Такъ какъ $AMP \infty ADE$, то $AP=\frac{cy}{a}$; $MP=\frac{by}{a}$; слѣд. $l^2=x^2+y^2-$ $-2x.\frac{cy}{a}$; $x.\frac{by}{a}=2m^2$.

Чер. 720.



Отсюда получимъ

$(x+y)^2=l^2+\frac{4m^2(a+c)}{b}$;

$(x-y)^2=l^2-\frac{4m^2(a-c)}{b}$; а потому

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2+\frac{4m^2(a+c)}{b}}+\sqrt{l^2-\frac{4m^2(a-c)}{b}}\right].$$

37. Проведя FD (чер. 388), нужно замѣнить треуг. FDG равновеликимъ ему такъ, чтобы вершина этого послѣдняго находилась на периметрѣ. Для этого изъ G проводимъ параллель къ FD до пересѣченія съ DE въ H. Если GH не пересѣчетъ DE между D и E, то надо DE продолжить и потомъ относительно полученной площади повторить то же построеніе.

38. Раздѣлить сторону на n равныхъ частей.

39. Приводится къ пред. зад.

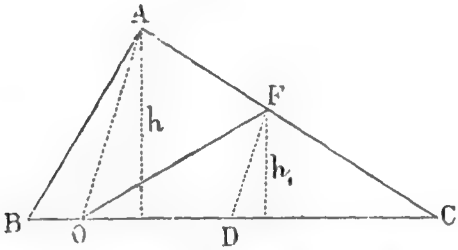
40. На BC отъ B отложить $BD=\frac{BC}{n}$, на AC отъ A отложить $AE=\frac{AC}{n-1}$, на DC отложить $DF=\frac{DC}{n-2}$ и т. д.; A соединить съ D, D съ E, E съ F и т. д.

41. Искомая точка должна находиться отъ каждой стороны на разстояніи $^1/_3$ соотвѣтствующей высоты; поэтому параллели, проведенныя изъ нея къ сторонамъ треуг., должны отсѣкать на другихъ сторонахъ третьи части.

42. Разстояніе искомой точки отъ C есть 4-я пропорц. къ BC, h и $2h_1$, гдѣ h высота даннаго треуг., h_1—разстояніе точки M отъ BC.

43. D (чер. 721) средина BC; $DF \| AO$; OF—искомая, ибо $\frac{\text{пл. } FOC}{\text{пл. } ABC}=\frac{OC.h_1}{BC.h}=\frac{1}{2}$, такъ какъ $\frac{h_1}{h}=\frac{CD}{OC}$.

Чер. 721

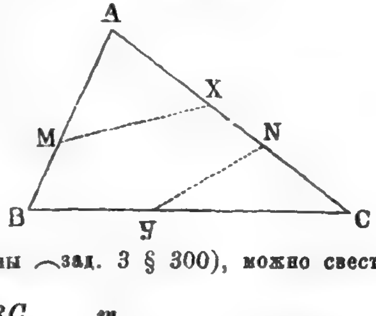


44. Линію BC раздѣлить на n равныхъ частей; изъ точекъ дѣленія провести параллели къ линіи OA; точки пересѣченія этихъ параллелей съ двумя другими сторонами соединить съ O. Доказ. подобно предъид.

45. Принявъ AD за основаніе искомаго треуг., опредѣлимъ его высоту изъ пропорціи $\frac{h_1}{h}=\frac{EF}{AD}$, гдѣ h есть высота треуг. EFG, соотвѣтствующая сторонѣ EF.

46. Проведемъ черезъ M (чер. 722) прямую MX, отсѣкающую отъ треуг. ABC часть $AMX={}^1/_3\ ABC$ (зад. 44), а изъ N прямую NY, отсѣкающую отъ ABC часть $ABYN={}^2/_3\ ABC$; MX и NY будутъ требуемыя. Если же эти линіи пересѣкутся внутри треуг., то надо изъ M провести линію, отсѣкающую $^2/_3\ ABC$, а изъ N—линію, отсѣкающую $^1/_3\ ABC$.

Чер. 722.



47. Раздѣлить BC въ отношеніи $m:n$.

48. Построивъ на MB треуг. MBD, равновеликій ABC, такъ, чтобы уг. B остался безъ перемѣны (зад. 3 § 300), можно свести задачу къ предъид.

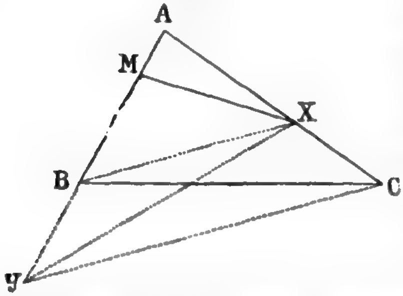
49. По условію задачи $\frac{\text{пл. } OBC}{\text{пл. } ABC}=\frac{m}{m+n+p}$; слѣд. разстояніе O отъ BC относится къ высотѣ треуг. ABC какъ $m:(m+n+p)$. Поэтому искомая точка должна находиться на параллели къ BC, дѣлящей высоту треуг., а слѣд. и сторону AB, въ отношенiи $m:(m+n+p)$. Точно также искомая точка должна находиться на параллели къ AC, дѣлящей сторону AB въ отношенiи $n:(m+n+p)$.

50. Рѣш. подобно 48-й § 300.

51. Построивъ на AM и NB, не измѣняя уг. A и B, треугольники, равновеликiе ABC, приведемъ зад. къ зад. 47-й § 300. Въ случаѣ, если линiя, отдѣляющая отъ построеннаго на AM треугольника часть, находящуюся ко всему треуг. въ отношенiи $m:(m+n+p)$, пересѣчетъ продолженiе AC, надо эту точку перенести на периметръ треуг. ABC, какъ это указано въ зад. 37-й.

52. Пусть (чер. 723) MX требуемая прямая; проведемъ $CY \parallel BX$ и соединимъ Y съ X; тогда пл. $BCX =$ пл. BYX и $\frac{\text{пл. } AMX}{\text{пл. } BYX} =$

Чер. 723.



$= \frac{m}{n} = \frac{AM}{BY}$. Опредѣливъ BY, найдемъ X, проведя изъ B параллель къ YC.

53. Обозначивъ черезъ X точку на сторонѣ AB, изъ которой надо провести параллель, будемъ имѣть $\frac{AX^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$; слѣд. зад. приводится къ построенiю сред. пропорц.

54. Означивъ черезъ X, Y, Z, U.... точки на AB, черезъ которыя надо проводить параллели, будемъ имѣть $\frac{AX^2}{AB^2} = \frac{1}{m}$; $\frac{AY^2}{AB^2} = \frac{2}{m}$; $\frac{AZ^2}{AB^2} = \frac{3}{m}$,...; слѣд. для отысканiя X, Y, Z... надо построить среднiя пропорц.

55. Рѣш. подобно предъид.

56, **57**, **58**-я зад. приводятся къ 53, 54, 55-й зад. § 300, если данный треуг. ABC обратить въ равновеликiй ему, замѣнивъ BC линiей, параллельной MN (зад. 16 § 300).

59. Приводится къ зад. 55 § 300.

60. Приводится къ зад. 56 § 300 или можетъ быть рѣшена построенiемъ сред. пропорц. между CB и $^1/_2$ разстоянiя точки пересѣченiя высоты съ CB отъ C или отъ B.

61. Отдѣливши линiей $XY \parallel BC$ отъ треуг. ABC часть $AXY = {}^1/_3 ABC$ (зад. 55 § 300), надо треуг. AXY раздѣлить на двѣ равновеликiя части линiей, перпендикулярной къ XY (зад. 60 § 300).

62. Приводится къ зад. 55 и 38 § 300.

63. Проведя изъ A дiагональ AC, приведемъ зад. къ зад. 38 § 300. Если надо раздѣлить на $2n$ частей, то надо каждый треуг. раздѣлить на n частей; а если число частей будетъ $2n+1$, то каждый треуг. надо раздѣлить на $2n+1$ частей и соединять эти части по двѣ.

64. Каждую изъ параллельныхъ сторонъ раздѣлить на n равныхъ частей. Можно также раздѣлить среднюю линiю на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленiя провести линiи въ произвольныхъ направлиніяхъ, но такъ, чтобы онѣ внутри трапеціи не пересѣкались между собой и не пересѣкали непараллельныхъ сторонъ ея, а съ параллельными сторонами пересѣкались.

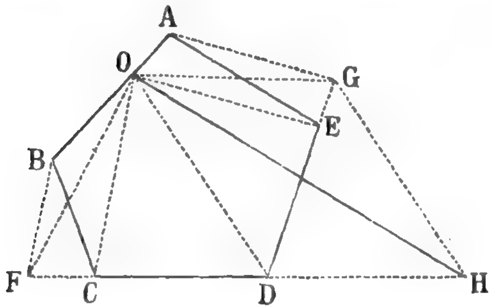
65. Раздѣлить среднюю линію на n равныхъ частей; линіи, проходящія черезъ вершину и точки дѣленія, будутъ требуемыя, если онѣ пересѣкаютъ параллельную сторону трапеціи, не прилежащую къ данной вершинѣ. Точки же пересѣченія продолженія параллельной стороны съ этими линіями нужно перенести на периметръ трапеціи (см. зад. 37 § 300). **66**. См. зад. 65 § 300.

67. Раздѣлить одну изъ параллельныхъ сторонъ на n равныхъ частей

68. Среднюю линію раздѣлить на n равныхъ частей; изъ вершины провести линію черезъ первую точку дѣленія до пересѣченія съ одной изъ параллельныхъ сторонъ; изъ точки пересѣченія провести линію черезъ вторую точку дѣленія и т. д.

69. Проведя (чер. 724) изъ O линіи въ C и D, раздѣлимъ мно-

Чер. 724.



гоуг. на треуг—ки OCD и OBC и 4—къ $AODE$. Проведемъ $BF \parallel OC$, тогда OFC равновеликъ OBC. Четыреуг. $AODE$ обратимъ въ треуг. ODG; затѣмъ ODG обратимъ въ ODH; OFH есть требуемый треуг.

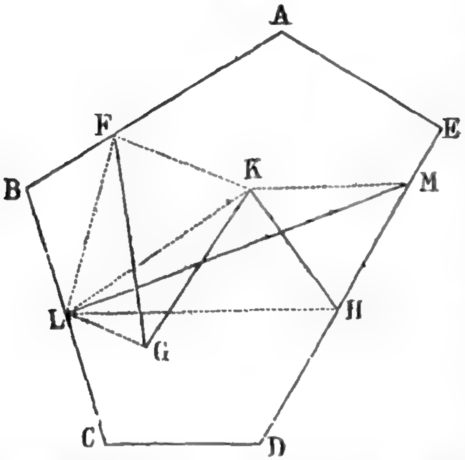
70. Пусть $ABCD$ данный 4—къ; обративъ его въ треуг. AFB, вершина котораго F лежала бы на сторонѣ BC, раздѣлимъ основаніе на n равныхъ частей, и тѣ точки, которыя помѣстятся на FC, перенесемъ на периметръ четыреугольника (см. зад. 37 § 300).

71. См. зад. 70 § 300.

72. Въ уг. BAE проведемъ линію FG, образующую треуг. AFG, равновеликій KLM; потомъ точки F и G перенесемъ на периметръ многоуг.

73. Пусть $FGKH$ (чер. 725) данная ломаная; соединимъ F съ K и построимъ треугол. FKL, равновеликій FKG и имѣющій вершину въ L на периметрѣ многоугол. $ABCDE$ по ту же сторону отъ FK, какъ и G; тогда ломаную FGK мы замѣнимъ прямой LK. Чтобъ замѣнить ломаную LKH прямою, проведемъ LH и построимъ на ней треуг. LHM, равновеликій LHK и имѣющій вершину въ M, по ту же сторону отъ LH, какъ и K. Линія LM будетъ требуемая.

Чер. 725.



74. См. зад. 70 § 300.

75. См. зад. 70 § 300.

76. Приводится къ дѣленію треуг. въ отношеніи $m:n$ и къ зад. 37 § 300.

77. См. зад. 76 § 300.

78. Раздѣлить въ отношеніи $m:n$ сторону, которая должна пересѣкаться съ дѣлящей прямой.

79. Основаніе раздѣлить въ отношеніи $m:n$.

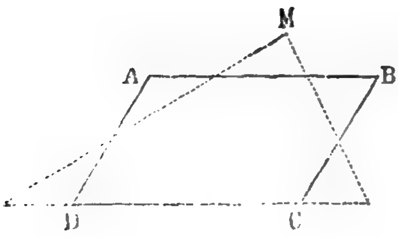
80. Приводится къ подобной зад. о треуг. и къ зад. 37 § 300.

81. Рѣш. подобно предъид. помощью зад. 69 § 300.

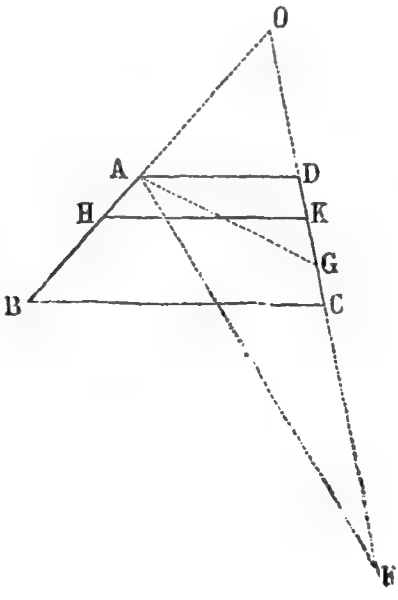
82. Проведя изъ M (чер. 726) линіи, дѣлящія пополамъ двѣ противоположныя стороны AD и BC, получимъ трапецію, равновеликую параллелограмму и непараллельныя стороны которой пересѣкаются въ M; поэтому приведемъ зад. къ зад. 79 § 300.

83. Проведя черезъ средины противоположныхъ сторонъ линіи, параллельныя MN, приведемъ зад. къ зад. 78 § 300.

Чер. 726.



Чер. 727.



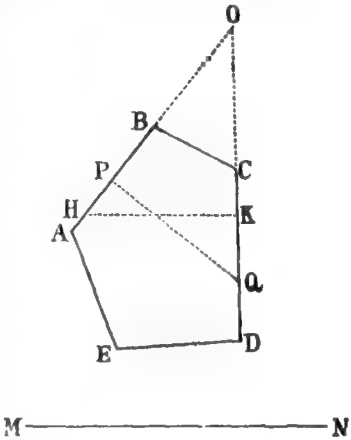
84. См. зад. 82 § 300. **85**. См. зад. 83 § 300.

86. См. зад. 83 § 300. **87**. Продолжимъ BA и CD (чер. 727) до пересѣченія въ O; построимъ треуг. ADF, равновеликій $ABCD$, и раздѣлимъ его линіей AG въ отношеніи $m:n$; тогда останется обратить треуг OAG въ равновеликій ему OHK, основаніе котораго $\| BC$ (зад. 16 § 300).

88. Искомая часть $=\dfrac{m}{m+n}$ всего многоуг. (см. § 295).

89. Взявъ на AB (чер. 728) произвольную точку P, проведемъ линію PQ, дѣлящую многоуг. $ABCDE$ въ отношеніи $m:n$ (зад. 81 § 300); затѣмъ, продолживъ AB и CD до пересѣченія въ O, построимъ треуг. OHK, равновеликій OPQ и основаніе котораго $HK \| MN$ (зад. 16 § 300). Еслибы точка H пришлась на продолженіи стороны BA, то ее надо перенести на периметръ многоуг. $ABCDE$ въ точку L стороны AE (зад. 37 § 300); потомъ построить треуг., равновеликій O_1KL (гдѣ O_1 точка пересѣченія AE и CD) и имѣющій основаніе, параллельное MN.

Чер. 728.



90. Продолжить стороны AB и CD до пересѣченія въ O и обратить треуг. OAD въ равновеликій съ основаніемъ $\| BC$ (зад. 16 § 300).

91. Приводится къ зад. 90 и 87 § 300.

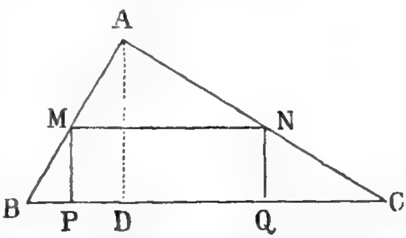
92. Предположивъ задачу рѣшенною и продолживъ BD и CE до пересѣченія въ O, увидимъ, что треуг. ODE равновеликъ OAC; слѣд. задача приводится къ зад. 16 § 300.

93. Приводится къ зад. 55 и 64 § 300.

94. Изъ A провести прямую AM въ средину M прямой BC и оба треуг. MAB и MAC раздѣлить въ отношеніи 1:3.

95. $MNPQ$ (чер. 729) искомый прямоуг.; $AD \perp BC$; $\dfrac{MP}{AD}=\dfrac{BM}{AB}$; $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{AM}{AB}$; отсюда $BM.AM=\dfrac{m^2.AB^2}{AD.BC}$. Если p есть сред. пропорц. между AD и BC, а x сред. проп. между BM и AM, то $x^2=\dfrac{m^2.AB^2}{p^2}$, $x=\dfrac{m.AB}{p}$. Найдя p, а потомъ и x, опишемъ на AB полуокружность и проведемъ параллель къ AB на разстояніи x отъ нея; изъ точки пересѣченія этой параллели съ окруж-

Чер. 729.



ностью опустимъ на AB перпендикуляръ; тогда и опредѣлится точка M—вершина искомаго прямоуг. Задача вообще допускаетъ 2 рѣшен.

96. Если a,b,c суть стороны, а h_a, h_b, h_c высоты треуг., то $ah_a=bh_b=ch_c$, откуда $a:h_b=b:h_a=c:\frac{h_a h_b}{h_c}$; слѣд. искомый треуг. подобенъ такому треуг., стороны котораго суть высоты h_b, h_a и четвертая пропорц. къ высотамъ. Построивъ этотъ треуг., легко построить и искомый, зная, что въ подобныхъ треуг. высоты пропорціональны основаніямъ.

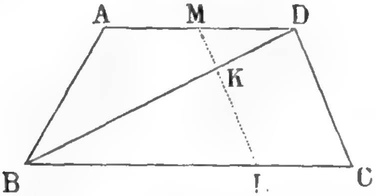
97. Приводится къ зад. 73 и 16 § 300.

98. Описать на a дугу, вмѣщающую уг. A, и провести линію, параллельную a, на разстояніи $h=\frac{2m^2}{a}$ отъ нея.

99. Сторона 6—ка$=\sqrt{\frac{2ab}{3\sqrt{3}}}$.

100. Пусть (чер. 730) $BC=b$, $AD=d$. $BL=x$; $ABD-MKD$ $=BCD-BKL$; но пл. $ABD=\frac{1}{2}dh$; пл. $BCD=\frac{1}{2}bh$;

Чер. 730.



$\frac{\text{пл. } MKD}{\text{пл. } BKL}=\frac{MD^2}{x^2}$; $\frac{\text{пл. } BKL}{\text{пл. } BCD}=\frac{x^2}{b^2}$; пл. $BKL=\frac{x^2}{b^2}$.пл.$BCD=\frac{x^2h}{2b}$; слѣд. пл. $MKD=\frac{MD^2}{x^2}$. пл. $BKL=\frac{MD^2.h}{2b}$, и $\frac{dh}{2}-\frac{MD^2.h}{2b}=$ $=\frac{bh}{2}-\frac{x^2h}{2b}$, или $\frac{d}{2}-\frac{(b-x)^2}{2b}=\frac{b}{2}-\frac{x^2}{2b}$, откуда $x=b-\frac{1}{2}d$.

101. Стороны$=p\pm\sqrt{p^2-m^2}$.

102. Пусть (чер. 731) $DEF=\frac{1}{2}ABC$; $AB=a$, $BD=x$; пл. $BDE=\frac{1}{6}$ пл. ABC; по § 290 имѣемъ $\frac{x(a-x)}{a^2}=\frac{1}{6}$, откуда $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{6}\sqrt{3a^2}$.

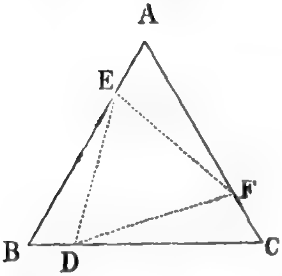
103 Пусть (чер. 732) пл. $AMN=$пл. $MBNC$ и $AM+MN+$ $+NA=BM+MN+NC+CB$; если $AM=x$, $AN=y$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, то $\frac{xy}{bc}=\frac{1}{2}$; $x+y=$полупериметру$=p$; x и y суть корни урав. $z^2-pz+\frac{1}{2}bc=0$.

Глава XI.

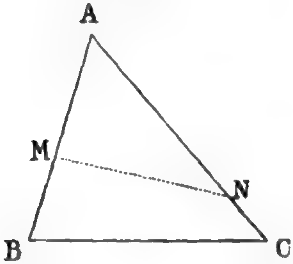
§ 341 (стр. 266).

7. 2. **8.** 22°30'. **9.** $7^1/_2$. **10.** 2625.
12. $31^1/_2$. **13.** 1575. **14.** 784. **15.** $1^1/_2$ арш.

Чер. 731.



Чер. 732.



16. 75 с. 3 ф. **17.** $150^1/_3$. **18.** 7 дюйм. **19.** 22.
20. $36^2/_3$. **21.** 1. **22.** 14 саж. **23.** 256.
24. $^4/_3$. **25.** 14 саж. **26.** 88. **32.** 97020 р.
35. 343. **36.** 30°. **38.** 1 ф. 13 л. **39.** 1 арш.
42. 6 ф. 6 л. **45.** 616. **47.** 42 дес. 2325 кв. с.
50. 62,83 кв. ф.; 15,7075 кв. д.; 1319,43.
51. 1,5; 79,5... **52.** 99,771; 15,1839.
53. 22°55'8",3; 68°45'25". **54.** 76,4.
55. 314,15 кв. ф.; 19,6343 кв. д.; 138540,15.
56. 7,0683 кв. ф.; 19894,9 кв. д.
57. 8 и 50,264 ф.; 6,77.. и 42,53...
58. 8796,2 кв. ф.; 374,06. **59.** 7482,878; 136,655.
60. $16^2/_3$; 63°39'49",8. **61.** 2291,9.

62. $n=\frac{90l^2}{s\pi}=19°53'41'',8$; $r=57,6$.

63. $r=\sqrt{\frac{360s}{n\pi}}=14,22$; $l=\sqrt{\frac{sn\pi}{90}}=12,53$.

64. $l=\frac{n}{180}\sqrt{S\pi}=1,3797$; $s=\frac{nS}{360}=0,4363$.

65. $n=\frac{180l}{\sqrt{S\pi}}=95°29'44'',8$; $s={}^1/_2l.\sqrt{\frac{S}{\pi}}=120$.

66. $n=\frac{360s}{S}=207°21'36''$; $l=2s\sqrt{\frac{\pi}{S}}=64,56$.

67. $l=\frac{n}{360}.c=88,6$; $s=\frac{n}{360}.\frac{c^2}{4\pi}=4654,09$.

68. $n=\frac{4.360.s\pi}{c^2}=2°36'$; $l=\frac{4s\pi}{c}=4,039$.

69. $n=\frac{360l}{c}=81^\circ$; $s=\frac{lc}{4\pi}=1833{,}5$.

70. $^1/_2(^1/_2\pi-1)=0{,}2854$; $^1/_2\left(\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}\right)=0{,}039$; $^1/_{12}(2\pi-3\sqrt{3})$ $=0{,}0906$; $^1/_{12}\cdot 0{,}1415=0{,}0118$; $^1/_{12}(4\pi-3\sqrt{3})=0{,}614$; $^1/_{12}(5\pi-3)=$ $=1{,}0589$; $^1/_{48}(2\pi+5-\sqrt{125})=0{,}0025$. **71.** 2.

72. 10,995 и 9,62...; 2,221... и 0,3927; 2,1739 и 0,377; $\pi(\sqrt{5}+1)$ и $^1/_2\pi(3+\sqrt{5})$.

73. 12,566. **74.** 2,4 ф. **75.** $\frac{1}{20\pi}-\frac{1}{32\pi^2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

76. $\frac{1}{10}-\frac{1}{8\pi}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. **77.** 0,32929. **78.** 5 и 3.

79. 50,264. **80.** 22,6188. **81.** 60°. **82.** 3,6.

83. $\sqrt{^1/_2}$. **84.** 0,408; 0,707. **85.** 354,64...

86. 263,886. **87.** $^2/_3\pi-{}^1/_2\sqrt{3}=1{,}2283$.

88. $^7/_6\pi-\sqrt{3}=1{,}93\ldots$ **89.** $2\pi+1$; $\pi-1$; 1.

90. $^1/_3$, $^1/_3\sqrt{2}$, $^1/_3\sqrt{3}$...... $^1/_3\sqrt{8}$.

§ 342 (стр. 271).

1. На основанія выраженія длины дуги, содержащей извѣстное число градусовъ.

3. Хорда, заключенная въ меньшемъ кругѣ, будетъ половиною всей хорды.

4. На основанія выраженія окружности по радіусу.

5. Надо показать, что сумма полукруговъ=площади квадранта.

6. Надо показать, что площ. описаннаго полукруга=площ. квадранта.

7. На основанія зад. 50-й § 232.

8. Окружность, описанная на касательной, будетъ=каждой изъ данныхъ; поэтому надо въ нее вписать квадратъ и доказать, что онъ=площади, заключенной между тремя окружностями.

9. На основанія свойства перпендикуляра, опущеннаго изъ точки окружности на діаметръ, и выраженія площади круга.

10. Искомая площадь состоитъ изъ сегмента, равнаго каждому изъ двухъ остальныхъ, и треугольника, равновеликаго треугольнику одного изъ секторовъ, которые получимъ, соединивъ точки дѣленія съ центромъ.

11. Надо вычислить площадь каждаго отрѣзка и потомъ взять требуемыя отношенія.

12. Площ. $AKBPENA$ (чер. 733)$=AKB+EPB-ANE=$

$$={}^1/_2\pi r^2+{}^1/_2\pi\frac{r^2}{n^2}-{}^1/_2\pi r^2\frac{(n-1)^2}{n^2}={}^1/_2\pi\left[r^2+\frac{r^2}{n^2}-r^2\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]=$$

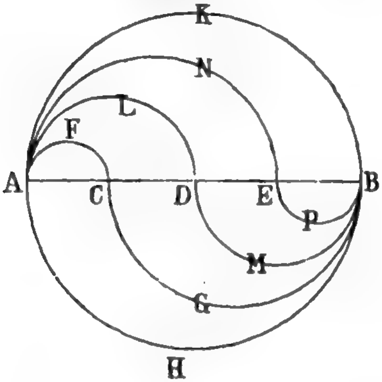
$$={}^1/_2\pi r^2\left(\frac{n^2+1-n^2+2n-1}{n^2}\right)={}^1/_2\pi r^2\cdot\frac{2n}{n^2}=\frac{1}{n}\pi r^2.$$

Площ. $ANEPBMDLA = ANE + DMB - ALD - EPB =$

$$= {}^1/_2\pi\frac{(n-1)^2}{n^2}r^2 + {}^1/_2\pi\frac{4}{n^2}r^2 - {}^1/_2\pi\frac{(n-2)^2}{n^2}r^2 - {}^1/_2\pi\frac{r^2}{n^2} =$$

$$= {}^1/_2\pi r^2\frac{(n^2-2n+1+4-n^2+4n-4-1)}{n^2} = {}^1/_2\pi r^2\frac{2n}{n^2} = \frac{1}{n}\pi r^2 \text{ и т. д.}$$

Чер. 733.



§ 343 (стр. 272).

1. На основаніи отношенія окружностей.

2. Радіусъ $= r \pm r_1$. **3**. Изъ урав. $\pi x^2 = n\pi r^2$ найдемъ $\frac{x}{nr} = \frac{r}{x}$.

5. Радіусы круговъ будутъ среднія пропорціональныя между r и $\frac{r}{n}$, между r и $\frac{2}{n}r$, между r и $\frac{3}{n}r$....

ЧАСТЬ II.

Глава I и II.

§ 392 (стр. 299).

1. Число сочетаній изъ n по 3, т. е. $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

2. Наибольшее число = числу сочетаній изъ n по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

3. $\sqrt{a^2-b^2}$. **4**. $\sqrt{\frac{b^2n^2-c^2m^2}{n^2-m^2}}$. **5**. $\sqrt{(a-b)^2+c^2} = 1^1/_{60}$.

6. $a.\frac{p+q}{p} = 4{,}95$ или $\frac{aq}{p} = 1{,}05$. **7**. $\frac{sn^2}{m^2}$.

8. 30°. **9**. $b.\frac{a_1}{a}=5,2$. **10**. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=29$.

11. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}=3,9$.

12. Въ задачѣ пропущено условіе, что линія, соединяющая вершины угловъ, перпендикулярна къ плоскостямъ этихъ угловъ. Искомая длина$=\sqrt{a^2+c^2+b^2}=173$.

14. Чтобы три прямыя лежали въ одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы наибольшій уг.$=$суммѣ двухъ остальныхъ.

15. Плоскость $\perp AB$ и проходящая черезъ средину AB.

16. Линія сѣченія плоскости P съ плоскостью $\perp MN$ и проходящей черезъ средину MN.

17. Плоскость, параллельная даннымъ и дѣлящая разстояніе между ними въ отношеніи $m:n$.

18. $\sqrt{r^2+a^2+b^2}=32,18$.

§ 449 (стр. 330).

1. 125. **2**. $a\sqrt{b^2+c^2}=75$: другія площади$=123,5$ и 117.

3. $\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{2}p)^2-s}$; $\sqrt{d^2+2s-p^2}$. **4**. $\sqrt{2s^2}=10$.

5. Пусть (чер. 734) $OO_1=p$; проведемъ черезъ O_1 плоскость $\parallel$ основаніямъ; она пересѣчетъ плос. AN по $FK \parallel AB$, и BS будетъ $=p$. Треуг. $SKB=NKR$, слѣд. $NC=2p$; поэтому $BN=$ $=\sqrt{4p^2+\frac{1}{16}u^2}$; а площ. $AN=AB.BN=\frac{1}{4}u\sqrt{4p^2+\frac{1}{16}u^2}=$ $=\frac{1}{2}u\sqrt{p^2+\frac{1}{64}u^2}$; 1) 15; 2) 0,65.

6. Плоскость, проходящая черезъ конечныя точки реберъ, выходящихъ изъ A (чер. 735), пересѣчетъ грани куба по равностор. треуг. BCD; плоскость же, проходящая черезъ конечныя точки реберъ, выходящихъ изъ противоположной вершины, пересѣчетъ кубъ по равностор. треуг. $B_1C_1D_1$; плос. $BCD \parallel$ плос. $B_1C_1D_1$. Третья плоскость, дѣлящая пополамъ разстояніе между BCD и $B_1C_1D_1$ и параллельная имъ, раздѣлитъ пополамъ ребра B_1C и BC_1, B_1D и BD_1, C_1D и CD_1; поэтому она пройдетъ черезъ 6 точекъ E, F, G, H, I, K —средины реберъ куба—и представитъ прав. 6—къ. Дѣйствительно, $EF=FG=\ldots$ по равенству прямоуг. треуг. $ECF, FD_1G, GBH\ldots$; каждый уг. шестиугольника$=120^\circ$, ибо напр. уг. $KIH=180^\circ-$ $-$уг. $CBD=180^\circ-60^\circ$. Если сторону 6—ка назовемъ a, то сторона треуг. будетъ $2a$; площ. треуг.$=a^2\sqrt{3}$; площ. 6—ка$=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$; отношеніе площадей$=1\frac{1}{2}$.

7. $\sqrt{h^2+\frac{1}{3}a^2}=11,4$.

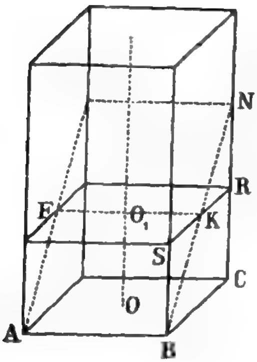
8. $\sqrt{3(b^2-h^2)}=0,5$ съ точн. 0,01.

9. $\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}=3,14\ldots$ **10**. $\frac{3}{8}a^2\sqrt{3}$.

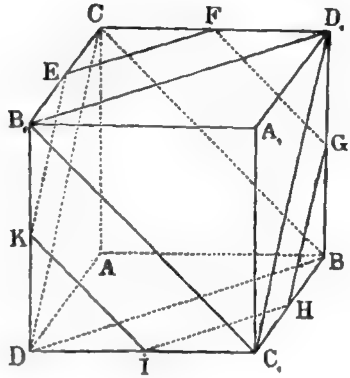
11. $\frac{h[\sqrt{2(B+b)}-2\sqrt{b}]}{2(\sqrt{B}-\sqrt{b})}=7,26$. **12**. $h:\left(1+\sqrt[4]{\frac{B}{b}}\right)=\frac{6}{7}$.

13. $\frac{ah}{a+h}=2,4$. **14**. Соединивъ вершину пирамиды съ срединами сторонъ основанія и средины этихъ сторонъ соединивъ последовательно между собою, получимъ пирамиду, на ребрахъ которой

Чер. 734.



Чер. 735.



будутъ лежать верхнія вершины куба; означивъ b сторону ея основанія, найдемъ, что ребро куба$=\frac{bh}{b+h}$; но $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$, гдѣ a сторона основ. данной пирамиды; слѣд. ребро куба$=\frac{ah}{a+h\sqrt{2}}$.

15. $\frac{n}{\sqrt{48-12n^2}}={}^1/_6$. **16.** ${}^4/_3\sqrt{2}$. **17.** $\frac{ab}{a+b}=1,875$.

18. ${}^1/_9(\sqrt{B}+2\sqrt{b})^2=19,6$; ${}^1/_9(2\sqrt{B}+\sqrt{b})^2=25,6$.

19. $B={}^1/_4a^2\sqrt{3}=315,6$; $S_1=3ah=2592$; $S={}^1/_2a(6h+a\sqrt{3})=$ $=3223,3$.

20 $h=\frac{S_1}{3a}=54$; $B={}^1/_4a^2\sqrt{3}=3055,3$; $S=S_1+{}^1/_2a^2\sqrt{3}=$ $=19718,6$.

21. $B={}^1/_4a^2\sqrt{3}=27,712$; $S_1=S-{}^1/_2a^2\sqrt{3}=744,576$; $h=$ $=\frac{2S-a^2\sqrt{3}}{6a}=31,024$.

22. $a=2\sqrt{\frac{B\sqrt{3}}{3}}=12,34$; $S_1=2h\sqrt{3B\sqrt{3}}=555,5$; $S=$ $=2(B+h\sqrt{3B\sqrt{3}})=687,5$.

23. $a=\frac{S_1}{3h}=8$; $B=\frac{S_1^2\sqrt{3}}{36h^2}=27,712$; $S=S_1+\frac{S_1^2\sqrt{3}}{18h^2}=223,424$.

24. $a=-h\sqrt{3}+\sqrt{{}^2/_3S\sqrt{3}+3h^2}=7,965$;
$S_1=3h(\sqrt{{}^2/_3S\sqrt{3}+3h^2}-h\sqrt{3})=215,055$;
$B={}^1/_2(S-S_1)=27,472$.

25. $S=S_1+2B=462$; $a=2\sqrt{\frac{B\sqrt{3}}{3}}=9,54$;

$h=\frac{S_1}{2\sqrt{3B\sqrt{3}}}=12,79$.

26. $B=\frac{S-S_1}{2}=300$; $a=\sqrt{\frac{2(S-S_1)\sqrt{3}}{3}}=26,321$;

$h=\frac{S_1}{\sqrt{6(S-S_1)\sqrt{3}}}=36,47$.

27. $S_1=S-2B=228,8$; $b=\sqrt{2(c^2\pm\sqrt{c^4-4B^2})}=$
$=\sqrt{c^2+2B\pm2\sqrt{(c^2+2B)(c^2-2B)}+c^2-2B}=$
$=\sqrt{c^2+2B}\pm\sqrt{c^2-2B}=7,8$; $h=\frac{S-2B}{2c+b}=11$.

28. $h=\frac{S_1}{a+b+c}=35$; $B=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=122,9$;
$S=S_1+2B=2205,8$.

29. $S_1=S-2B=800$; $c=\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{(ab+2B)(ab-2B)}}=$
$=17,804$; $h=\frac{S-2B}{a+b+c}=18,69$.

30. $a=\frac{S_1}{4h}=12$; $B=\frac{S_1^2}{16h^2}=144$; $S=S_1+\frac{S_1^2}{8h^2}=1056$.

31. $b=\frac{S-2ah}{2(a+h)}=5$; $B=\frac{a(S-2ah)}{2(a+h)}=40$; $S_1=S-\frac{a(S-2ah)}{a+h}=$
$=234$.

32. $S=S_1+2B$; a и b равны $\frac{S_1}{4h}\pm{}^1/_2\sqrt{\frac{S_1^2}{4h^2}-4B}$;
$S=3240$; $a=30$; $b=20$.

33. $B={}^1/_2 d\sqrt{(2a+d)(2a-d)}=120$; $h=\frac{S_1}{4a}=14$; $D=\frac{dS_1}{4a}=140$;
$S=S_1+d\sqrt{(2a+d)(2a-d)}=968$.

34. $d=\sqrt{2a^2-2\sqrt{a^4-B^2}}=\sqrt{a^2+B}-\sqrt{a^2-B}$ (см. зад. 27);
$d=20,14$; $h=\frac{D}{d}=32,17$; $S_1=\frac{4aD}{d}=2574$; $S=\frac{4aD}{d}+2B=3270$.

35. $h=\frac{S_1}{2(a+b)}=18$; $D=\frac{dS_1}{2(a+b)}=468$;
$B=2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=240$; $S=S_1+2B=1704$.

36. $S_1=2h(a+b)=244,8$; $S=2h(a+b)+2B=342$;
$d=\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{(ab+B)(ab-B)}}=11,7$; $D=dh=93,6$.

37. $k=\sqrt{c^2-d^2}=12$; $B=ks=300$; $S_1=2h(s+c)=2880$;
$S=S_1+2B=3480$, причемъ $s={}^1/_2(a+b)$; $d={}^1/_2(a-b)$.

38. $B=ks=31,08$; $S_1=S-2ks=204,4$; $c=\sqrt{k^2+d^2}=3,5$;

$h=\frac{S-2ks}{2(s+c)}=7$, гдѣ $s=\frac{1}{2}(a+b)$, $d=\frac{1}{2}(a-b)$.

39. $S_1=6ah=10,7856$; $S=6a(h+\frac{1}{4}a\sqrt{3})=11,6003$.

40. $\frac{1}{4}(u^2-4d^2)\sqrt{2}+\frac{1}{16}(u\mp\sqrt{8d^2-u^2})^2=97,61$ или $112,36$

41. $\frac{2d^2(ab+bc+ac)}{a^2+b^2}=846$.

42. $a^2(\sqrt{2}-1)+4ah=250,35$.

43. $\sqrt{\frac{S}{5(2+\sqrt{5+2\sqrt{5}})}}$ **44**. $a(a+2h\sqrt{2})$.

45. $h=\sqrt{k^2-\frac{1}{2}a^2}=49,132$; $b=\sqrt{k^2-\frac{1}{4}a^2}=57,052$; $B=a^2=$ $=3364$; $S_1=2ab=6618$; $S=a(a+2b)=9982$.

46. $k=\sqrt{h^2+\frac{1}{2}a^2}$; $b=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}a^2}$; $B=a^2$; $S_1=2a\sqrt{h^2+\frac{1}{4}a^2}$; $S=B+S_1$; $k=15,556$; $b=13,892$; $B=196$; $S_1=388,9$; $S=584,9$.

47. $b=\frac{2C}{a}=12$; $B=a^2=256$; $S_1=4C=384$; $S=4C+a^2=640$;

$k=\sqrt{\frac{4C^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}=14,422$; $h=\sqrt{\frac{4C^2}{a^2}-\frac{a^2}{4}}=8,9443$.

48. $S_1=S-a^2=576$; $b=\frac{S-a^2}{2a}=16$; $B=a^2=324$;

$k=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}=18,357$; $h=\sqrt{b^2-\frac{1}{4}a^2}=13,229$.

49. $a=\sqrt{2(k^2-h^2)}=9,4868$; $b=\sqrt{\frac{1}{2}(h^2+k^2)}=7,6485$; $B=2(k^2-h^2)=90$; $S_1=2\sqrt{(k^2+h^2)(k^2-h^2)}=145,12$; $S=235,12$.

50. $a=\sqrt{B}=24$; $b=\sqrt{k^2-\frac{1}{4}B}=16$; $h=\sqrt{k^2-\frac{1}{2}B}=10,583$; $S_1=2\sqrt{B(k^2-\frac{1}{4}B)}=768$.

51. $a=\sqrt{\frac{1}{2}S+k^2-\sqrt{(\frac{1}{2}S+k^2)^2-\frac{1}{2}S^2}}=36$; $b=\frac{S}{2a}-\frac{a}{2}=24$;

$h=\sqrt{k^2-\frac{1}{2}a^2}=15,874$; $B=a^2=1296$; $S_1=2ab=1728$.

52. $a=\sqrt{B}=14$; $k=\sqrt{h^2+\frac{1}{2}B}=17,972$; $b=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}B}=$ $=16,553$; $S_1=2\sqrt{B(h^2+\frac{1}{4}B)}=463,484$; $S=S_1+B=659,484$.

53. $a=\sqrt{S+b^2}-b=42$; $S_1=2b.(\sqrt{S+b^2}-b)=2940$;

$B=(\sqrt{S+b^2}-b)^2=1764$; $k=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}(\sqrt{S+b^2}-b)^2}=40,816$;

$h=\sqrt{b^2-\frac{1}{4}(\sqrt{S+b^2}-b)^2}=28$.

54. $a=\sqrt{B}=18$; $b=\frac{2C}{\sqrt{B}}=20$; $k=\sqrt{\frac{4C^2}{B}+\frac{B}{4}}=21,932$;

$h=\sqrt{\frac{4C^2}{B}-\frac{B}{4}}=17,86$; $S_1=4C=720$; $S=B+4C=1044$.

55. $S_1=\frac{5}{2}ab=525$; $B=\frac{1}{4}a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}=247,75$;
$S=S_1+B=772,75$; $k=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}=18,5$;
$h=\sqrt{b^2-\frac{1}{20}a^2(5+2\sqrt{5})}=15,428$.

56. $S_1 = 5b\sqrt{k^2-b^2} = 2700$; $h = \sqrt{k^2 - \dfrac{8(k^2-b^2)}{5-\sqrt{5}}} = 29{,}492$;
$S = S_1 + (k^2-b^2)\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = 4248{,}43$.

57. $k = \sqrt{a^2+h^2} = 40$; $b = \sqrt{{}^3/_4a^2+h^2} = 38{,}157$;
$S_1 = 3a\sqrt{{}^3/_4a^2+h^2} = 2747{,}3$; $S = S_1 + {}^3/_2a^2\sqrt{3} = 4243{,}8$.

58. $a = \sqrt{k^2+2C} - \sqrt{k^2-2C} = 16$;
$b = {}^1/_2(\sqrt{k^2+2C} + \sqrt{k^2-2C}) = 15$; $S_1 = 6C = 720$;
$h = \sqrt{2\sqrt{k^4-4c^2}-k^2} = 5{,}7445$; $S = 6C + {}^3/_2a^2\sqrt{3} = 1385{,}1$.

59. $2b\sqrt{3(b^2-h^2)} + 2\sqrt{3}(b^2-h^2)$.

60. $k = \sqrt{l^2 + {}^1/_4(a-\alpha)^2} = 14{,}318$; $S_1 = {}^3/_2l(a+\alpha) = 630$.
$S = {}^3/_2l(a+\alpha) + {}^1/_4\sqrt{3}(a^2+\alpha^2) = 832{,}65$.

61. Сторона верхняго основ. $= a = \sqrt{5625} = 75$; сторона нижняго основ. $= A = \dfrac{100}{100-66^2/_3}\cdot 75 = 225$; апоө. усѣч. пирам. $= l =$
$= \sqrt{(66^2/_3)^2 + \left(\dfrac{225-75}{2}\right)^2}$; поверхн. $S = \dfrac{4(A+a)}{2}l + A^2 +$
$+ a^2 = 116457{,}9$.

62. ${}^3/_4a^2$. **63.** ${}^3/_4(b^2-a^2)$. **64.** ${}^1/_4S_1a = 819{,}2$.

65. $S_1 = \dfrac{4V}{a} = 468$; $S = \dfrac{2(2V+a^2)}{a} = 630$.

66. $\dfrac{S_1^2}{16h} = 2304$.

67. $S_1 = 4\sqrt{Vh} = 884$; $S = \dfrac{2V}{h} + 4\sqrt{Vh} = 1222$.

68. $\dfrac{4V}{\sqrt{B}} = 551{,}2$. **69.** $\dfrac{abS_1}{2(a+b)} = 240$.

70. $\dfrac{2V(a+b)}{ab} = 988$. **71.** $2\left(ah + \dfrac{V}{a} + \dfrac{V}{h}\right) = 883{,}68$.

72. $\dfrac{aS_1B}{2(a^2+B)} = 6766{,}425$.

73. $S - 2a\left[\dfrac{Sa-2V}{4a^2} - \sqrt{\left(\dfrac{Sa-2V}{4a^2}\right)^2 - \dfrac{V}{a}}\right]$

74. $\dfrac{S_1}{4h} \pm {}^1/_2\sqrt{\dfrac{S_1^2}{4h^2} - \dfrac{4V}{h}} = 33$ и 27.

75. a и b равны $\dfrac{S_1(S-S_1)}{8V} \pm {}^1/_2\sqrt{\dfrac{S_1^2(S-S_1)^2}{16V^2} - 2(S-S_1)}$,
т. е. 16 и 12; $h = \dfrac{2V}{S-S_1} = 13$.

76. ${}^1/_2dh\sqrt{(2a+d)(2a-d)} = 1440$.

77. $S=\frac{4aD}{d}+d\sqrt{(2a+d)(2a-d)}=1152;$

$V=\frac{1}{2}D\sqrt{(2a+d)(2a-d)}=2592.$

78. $S=\frac{8aV}{d\sqrt{(2a+d)(2a-d)}}+d\sqrt{(2a+d)(2a-d)}=228.$

79. $S=4ah+\frac{D}{h^2}\sqrt{(2ah+D)(2ah-D)}=705,92;$

$V=\frac{D}{2h}\sqrt{(2ah+D)(2ah-D)}=1029,6.$

80. $d=\frac{2\sqrt{(aD+V)(aD-V)}}{D}=16;$

$S=\frac{2aD^2}{\sqrt{(aD+V)(aD-V)}}+\frac{4V\sqrt{(aD+V)(aD-V)}}{D^2}=1104.$

81. $V=\frac{1}{2}d\sqrt{(\frac{1}{2}S_1+dh)(\frac{1}{2}S_1-dh)}=1080;$

$S=S_1+d\sqrt{\left(\frac{S_1}{2h}+d\right)\left(\frac{S_1}{2h}-d\right)}=708.$

82. $S=\frac{2D(a+b)}{d}+4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=3136;$

$V=\frac{2D}{d}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=11760.$

83. $\frac{V(a+b)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}}+4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=6315.$

84. $V=h[\frac{1}{2}S-h(a+b)]=1203,84;$

$D=h\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{[ab+\frac{1}{2}S-h(a+b)].[ab-\frac{1}{2}S+h(a+b)]}}=222.$

85. $\frac{(8V+a^3)\sqrt{3}}{2a}=585,416.$

86. $a=\frac{4V\sqrt{3}}{S_1}=13,856;\ h=\frac{S_1^2}{12V\sqrt{3}}=13,856;$

$B=\frac{12V^2\sqrt{3}}{S_1^2}=83,136.$

87. $\frac{4V(2c+b)}{b\sqrt{(2c+b)(2c-b)}}+\frac{1}{2}b\sqrt{(2c+b)(2c-b)}=2180.$

88. $\frac{2V}{h}+h\left(b+\frac{\sqrt{16V^2+b^4h^2}}{bh}\right)=672.$

89. $\frac{B(S-2B)}{b+2\sqrt{\frac{4B^2}{b^2}+\frac{b^2}{4}}}=8448.$

90 $S=(a+b+c)h+2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=1645,7;$

$h=\frac{V}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$

91. $\dfrac{B(S-2B)}{a+b+\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{(ab+2B)(ab-2B)}}}=1439{,}1.$

92. $S_1=(a+b+c)h;\ V=Bh;\ B=\dfrac{V}{h};$

$(b+c)h=S_1-ah;\ b+c=\dfrac{S_1}{h}-a=m;$

$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=\dfrac{16V^2}{h^2};$

$\dfrac{S_1}{h}\left(\dfrac{S_1}{h}-2a\right)\Big[a-(b-c)\Big]\Big[a+(b-c)\Big]=\dfrac{16V^2}{h^2};$

$b-c=\sqrt{\left(a+\dfrac{4V}{\sqrt{S_1(S_1-2ah)}}\right)\left(a-\dfrac{4V}{\sqrt{S_1(S_1-2ah)}}\right)}$

$=n=\sqrt{(a+f)(a-f)};\ f=\dfrac{4V}{\sqrt{S_1(S_1-2ah)}}=$

$=\dfrac{4V}{\sqrt{(a+m)h(ah+mh-2ah)}}=\dfrac{4V}{h\sqrt{(m+a)(m-a)}};$

$b+c=m;\ b-c=n;\ b=\frac{1}{2}(m+n);\ c=\frac{1}{2}(m-n);$

$B=48;\ b=17{,}385;\ c=9{,}615.$

93 $\dfrac{S_1.\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{c^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}}{a+b+2c}=15840.$

94. $(a+b+2c)\cdot\dfrac{2V}{(a+b)\sqrt{c^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}}+$

$+(a+b)\sqrt{c^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}=5220.$

95. $h.\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{c^2-d^2}=13650$, гдѣ $c=\dfrac{S_1}{2h}-\dfrac{a+b}{2};\ d=\dfrac{a-b}{2}.$

96. $\dfrac{k(a+b)[S-k(a-b)]}{2(a+b)+\sqrt{4k^2+(a-b)^2}}=217{,}56.$

97. $S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}a\sqrt{k^2-\frac{1}{4}a^2}=464{,}29;$

$V=\frac{1}{12}a^2\sqrt{3k^2-a^2}=505{,}84.$

98. $S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}a\sqrt{h^2+\frac{1}{12}a^2}=392{,}299;$

$V=\frac{1}{12}a^2h\sqrt{3}=374{,}12.$

99. $S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}ab=1857{,}2;$

$V=\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-\frac{1}{4}a^2}=4046{,}8.$

100. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{\frac{2}{3}S\left(\dfrac{2S}{a^2}-\sqrt{3}\right)}=384{,}13.$

101. $S=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,[k^2-h^2+\sqrt{(k^2-h^2)(k^2+3h^2)}]=537{,}1;$

$V=\frac{1}{4}h\sqrt{3(k^2-h^2)}=643{,}03.$

102. $\dfrac{hS^2\sqrt{3}}{3(9h^2+2S\sqrt{3})}=254{,}5.$

103. $k=\sqrt{\frac{9V^2}{B^2}+\frac{4B}{3\sqrt{3}}}=19,48;$

$S_1=3\sqrt{\frac{B}{\sqrt{3}}\left(\frac{9V^2}{B^2}+\frac{B}{3\sqrt{3}}\right)}=355,5...$

104. $k=\sqrt{\frac{9V^2}{a^4}+\frac{a^2}{2}}=99,64;\ S_1=2a\sqrt{\frac{9V^2}{a^4}+\frac{a^2}{4}}=15160.$

105. $S=4(k^2-b^2)+4b\sqrt{k^2-b^2}=756;$
$V=\frac{4}{3}(k^2-b^2)\sqrt{2b^2-k^2}=857,22.$

106. $V=\frac{S^2h}{6(S+2h^2)}=3072;\ k=\sqrt{h^2+\frac{S^2}{4(S+2h^2)}}=23,324.$

107. $S=\frac{5}{2}a\sqrt{h^2+\frac{1}{20}a^2(5+2\sqrt{5})}+\frac{1}{4}a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})};$
$V=\frac{1}{12}a^2h\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}.$

108. $S=3a\sqrt{k^2-\frac{1}{4}a^2}+\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}=2387,1;$
$V=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(k^2-a^2)}=6734,3.$

109. $S_1=3ab=1440;\ V=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2-\frac{3}{4}a^2)}=5756.$

110. $S=3a\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{4V^2}{3a^4}}+\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}=665,6.$

111. $k=\sqrt{\frac{2V\sqrt{3}}{3h}+h^2}=22,8;\ S=3ab+B,$

где $a=\sqrt{\frac{2V\sqrt{3}}{3h}}$, $b=\sqrt{k^2-\frac{1}{4}a^2}$, $B=\frac{3V}{h}$.

112. $\frac{1}{12}h(a^2+\alpha^2+a\alpha)\sqrt{3}=2182,3.$

113. $S=2l(a+\alpha)+a^2+\alpha^2=1658;\ V=\frac{1}{3}h(a^2+\alpha^2+a\alpha)=4074.$

114. $S=3d^2=1452;\ V=\frac{1}{4}d^3\sqrt{2}=3764.$

115. $S=3D\sqrt{2}=2036;\ V=\frac{1}{2}D\sqrt{D\sqrt{2}}=6252.$

116. $\frac{1}{6}S\sqrt{\frac{1}{6}S}=6859.$ **117.** $6\sqrt[3]{V^2}=1536.$

118. $a^2\sqrt{3}=997,5;\ \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}=1629.$ **119.** $3r^2\sqrt{3};\ \frac{1}{4}r^3\sqrt{6}.$

120. $\frac{3}{2}h^2\sqrt{3};\ \frac{1}{8}h^3\sqrt{3}.$ **121.** $6\sqrt[3]{V^2\sqrt{3}}$

122. 768. **123.** 0,6. **124.** $\frac{a\sqrt{\frac{1}{6}S}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}};\ \frac{b\sqrt{\frac{1}{6}S}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}.$

125. 10; 15; 20. **126.** $6\sqrt{3}:8:5\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.$

127. $a^3\cdot\frac{1}{8}(27\sqrt{2}-22\sqrt{3}).$ **128.** $\frac{1}{6}ab\sqrt{c^2-a^2}.$

129. $\frac{5}{6}a^3.$ **130.** $p\left(\frac{B\sqrt{Bb-b^2}}{3b}\right)=0,04965.$

131. 253,7 и 4,3. **132.** Ребра ниж. осн 12 и 8; ребра верх. осн. 3 и 2; боков. ребро $=16,7$

133. Обозначивъ черезъ b верхнее основ. пирам., получимъ $\frac{2,4}{3}\cdot(1,8+\sqrt{1,8b}+b)=2,52$; отсюда $\sqrt{1,8b}=1,35-b$; слѣд. $b=0,45$. Но $\frac{1,8}{0,45}=\frac{(2,4+x)^2}{x^2}$, гдѣ x есть высота дополнительной пирамиды; поэтому $x=2,4$; а объемъ$=0,36$.

134. $\frac{VB\sqrt{B}}{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}$. **135**. $\frac{m^3}{n^3-m^3}$. **136**. $\frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$.

137. ${}^1/_4\sqrt[3]{4}\sqrt{4l^2-a^2-b^2}$. **138**. 4,9; 1,2; 0,9 съ точн. 0,1.

139. $\frac{{}^7/_4a^2+ab+{}^1/_4b^2}{{}^7/_4b^2+ab+{}^1/_4a^2}=\frac{217}{271}$.

140. $4:(4\sqrt[3]{4}-3):(4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{4})$.

141. ${}^1/_{48}a^3\sqrt{2}$; ${}^1/_{16}a^3\sqrt{2}$. **142**. 95,17 децим. **143**. $\frac{c}{d}$.

144. 56,7. **145**. 6 р. 96 к. **146**. 2 метр.

147. $a\sqrt[3]{\frac{1}{n}}$; $a\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$; $a\sqrt[3]{\frac{3}{n}}$. **148**. 4; 6.

149. 112. **150**. $\frac{Bh\sqrt{B}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$; $\frac{bh\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$.

152. 36 руб. **153**. 24 кв. ф. **154**. 7.
156. 2 арш. **157**. 3; 6. **158**. 8. **160**. $220^1/_2$.
161. 104. **162**. 8232. **163**. 15,75. **164**. $6^3/_4$.
166. 6 дюйм. **167**. 1894,4. **170**. 347,55 килогр.

171. Октаэдръ можно раздѣлить на двѣ равныхъ прав. четыреуг. пирамиды, которыхъ площ. основ.$=a^2$; высота каждой пирамиды $=\sqrt{a^2-{}^1/_2a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$; слѣд. $V=2a^2\cdot{}^1/_3\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}={}^1/_3a^3\sqrt{2}$.

§ 494 (стр. 364).

1. $hr\sqrt{2}$ **2**. ${}^1/_4r\sqrt{3(r^2+4h^2)}$. **3**. π.

4. $\frac{h}{c}\sqrt{(R+r+c)(-R+r+c)(R-r+c)(R+r-c)}=1760$. Для опредѣленія основанія прямоугольника сѣченія имѣемъ ${}^1/_4x^2=R^2-y^2$, ${}^1/_4x^2=r^2-(c-y)^2$, гдѣ x—основаніе, а y—перпендикуляръ, опущенный изъ центра большаго круга на хорду пересѣченія окружностей.

5. Изъ урав. $s=hx$ и $d^2=h^2+x^2$, гдѣ x есть основаніе сѣченія, найдемъ $h={}^1/_2(\sqrt{d^2+2s}\pm\sqrt{d^2-2s})$; $x={}^1/_2(\sqrt{d^2+2s}\mp\sqrt{d^2-2s})$; $r=\sqrt{{}^1/_4x^2+c^2}$; $h=15$ и 8; $x=8$ и 15; $r=5$ и 16,15....

6. ${}^1/_2s\sqrt{3}$. **7**. 6. **8**. ${}^1/_2r\sqrt{r^2+2h^2}$.

9. $\frac{Rr}{R+r}$. **10.** $\sqrt{l^2 - {}^1/_4(a-b)^2}$. **11.** 25.

12. ${}^3/_5$; ${}^4/_5$. **13.** $\frac{3r}{m+9}(m \pm \sqrt{9-8m})$. **14.** 2187,68.

15. 39,93. **16.** 1,96. **17.** 802,3. **18.** 10.

19. ${}^1/_2\left(\sqrt{h^2+\frac{2s}{\pi}}-h\right)$. **20.** $\pi a^2\sqrt{2}$ **21.** πa^2. **22.** r.

23. $x={}^1/_4\left(\sqrt{d^2+\frac{2s}{\pi}}\pm\sqrt{d^2-\frac{2s}{\pi}}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Въ данномъ частномъ случаѣ $x={}^1/_4 d\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{3}\pm 1\right)$.

24. $2\pi R^2\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(3-\frac{m}{n}\right)=220$. **25.** $11m$.

26. ${}^4/_3\pi r(h+r)+rh\sqrt{3}$; ${}^2/_3\pi r(h+r)+rh\sqrt{3}$.

27. ${}^2/_5\pi r(r+h)+4rh$. **28.** 320. **29.** 10 съ точн. 0,01.

30. 5325. **31.** 1,1; 0,3. **32.** $\frac{c^2\sqrt{2}}{4\pi}$. **33.** πh^2.

34. 2. **35.** $\frac{\pi d h^2}{2(h-d)}$. **36.** $2\pi r(h+r\sqrt{2})$. **37.** ${}^4/_3 r$.

38. $h\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{m}{2\pi r\sqrt{r^2+h^2}}}$.

39. ${}^1/_{38}\pi(u^2+u\sqrt{u^2-12h^2}+12h^2)$

40. $\frac{\sqrt{\pi(m+b-a)(m-b+a)}}{\pi(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$.

41 $\pi r\left[r\left(1+\frac{m}{n}\right)+\left(1+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\sqrt{h^2+r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-1\right)^2}\right]$;

$\pi r\left[\left(1+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\sqrt{h^2+r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-1\right)^2+2h+r\left(\frac{m}{n}-1\right)}\right]$.

42. Если x есть рад. сѣченія, z—высота дополнительнаго конуса, y—разстояніе сѣченія отъ верхняго основ. даннаго конуса, k—образующая усѣчен. конуса, составляющаго верхнюю часть даннаго, то будемъ имѣть $x=\sqrt{{}^1/_2(R^2+r^2)}$; $\frac{z}{z+h}=\frac{r}{R}$; $\frac{z+y}{z}=\frac{x}{r}$;

$k^2=y^2+(x-r)^2$; $y=\frac{h}{R-r}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(R^2+r^2)}-r\right]$;

$k=\frac{1}{R-r}\left[\sqrt{{}^1/_2(R^2+r^2)}-r\right]\sqrt{(R-r)^2+h^2}$;

бок. пов. верхней части усѣч. конуса$=\pi k(x+r)=$

$=\frac{\pi}{R-r}\left(\frac{R^2-r^2}{2}\right)\sqrt{(R-r)^2+h^2}={}^1/_2\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}=$ половинѣ бок. пов. даннаго конуса.

43. 252. **44.** $2\pi m$. **45.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **46.** $4\pi a^2\sqrt{2}$.

47. 2122,0835. **48.** $\frac{p^2}{\pi}+4\pi d^2$. **49.** 421.

50. πa^2. **51.** $3\pi a^2$. **52.** 1 : 2 : 3.

53. $\frac{4\pi r^2}{h^2}\left[h^2+2r(r-\sqrt{r^2+h^2})\right]$. **54.** $^1/_8\pi u(u\pm\sqrt{8d^2-u^2})$.

55. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2. **56.** $^{22}/_3\sqrt{3}$.

57. $^1/_4(4\sqrt{2-\sqrt{2}}+3\sqrt{10-7\sqrt{2}})$. **58.** 325,18.

59. 176. **60.** $\frac{2\pi ar^2}{a+r}$. **61.** $3r$.

62. $\frac{ar}{R-r}$; $\frac{2\pi r^2(a+r-R)}{a}$.

63. $2\pi R(\sqrt{R^2-r_1^2}\pm\sqrt{R^2-r_2^2})$. **64.** $\sqrt{^{11}/_8r^2}={}^{11}/_2$.

65. $\frac{n^2-1}{n^2}$.

66. $\pi(R+r)l=\pi(R^2+r^2)$; $(R-r)^2=l^2-h^2$; $R-r=35$; $R=r+35$, слѣд. $37(r+35+r)=(r+35)^2+r^2$; $r=7$; $R=42$. Называя x радіусъ шара, а y—разстояніе центра шара отъ верхняго основанія конуса, получимъ $x^2=r^2+y^2$; $x^2=R^2+(h-y)^2$. Подставивъ въ два послѣдвія урав. найденныя нами величины R и r и исключивъ изъ обоихъ урав. y, получимъ урав. $24\sqrt{x^2-49}=42^2+95$ или $576x^2=(1764+95)^2+28224$, откуда $x=77,7$.

67. 536,8. **68.** 56,5. **69.** $1^2/_3$; 2.

70. 192. **71.** $\frac{r(2h-r)}{h}=4,8$.

72. $\pi(r+x)^2(h-x)=\pi(r-x)^2(h+x)=\pi r^2h$; слѣд.
$(r^2+2rx+x^2)(h-x)=(r^2-2rx+x^2)(h+x)$.
отсюда $x=0$ и $x=\sqrt{r(2h-r)}$; слѣд. $[r+\sqrt{r(2h-r)}]^2.[h-\sqrt{r(2h-r}]=r^2h$, или $h^2-2rh+r^2-{}^1/_2rh=0$,
откуда $h=2r$ и $^1/_2r$; а $x=\sqrt{r(2h-r)}=r\sqrt{3}={}^1/_2h\sqrt{3}$ и $x=0$.

74. 2. **75.** 3; 2. **76** 64π.

77. 1000. **78** 2. **79.** $v=\pi r^2h$; $v_1=\pi r_1^2h$; $2\pi xh=2\pi(rh+r_1h)$; $x=r+r_1$; $\pi x^2h=\pi\left(\sqrt{\frac{v}{\pi h}}+\sqrt{\frac{v_1}{\pi h}}\right)^2$. $h=(\sqrt{v}+\sqrt{v_1})^2=2,43$.

80. 4523,76 и 1884,9: рад. цил.$=12$ и 5; высота$=10$ и 24.

81. $\frac{\pi k\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}$, гдѣ $p={}^1/_2(a+b+c)$.

82. $(^1/_6\pi-{}^1/_4\sqrt{3})r^2h$; $(^5/_6\pi+{}^1/_4\sqrt{3})r^2h$.

83. 235,5. **84.** 3. **85.** 22,6. **86.** 15400.

87. 15400. **88.** $l=14\sqrt{11}$; $h=1,4.3.11$; $v=1043,504$.

89. $\frac{1}{2}r\sqrt{s(s-2\pi r^2)}$. **90.** $\frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$. **91.** $\frac{1}{3}m\sqrt{\pi m}$.

92. $\frac{1}{12}\pi(l^2-d^2)(\sqrt{2l^2-d^2}-d)$; $\frac{1}{2}\pi l[\sqrt{2l^2-d^2}-d]$.

93. $h=\frac{1}{4}\left[m\pm\sqrt{m^2-\frac{24v}{\pi m}}\right]$.

94. Обратно пропорціональны осямъ вращенія.

95. $6:2\sqrt{3}:3$. **96.** $1:\sqrt{3}:2$. **97.** 1232.

98. 2. **99.** $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi\sqrt{11}}}$.

100. $\frac{360^\circ}{\sqrt{1+\frac{\pi h^3}{3v}}}$. **101.** $798\frac{2}{7}$.

102. $R=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{v\sqrt{3}}{3\pi d}-\frac{d^2}{12}}$; $r=-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{v\sqrt{3}}{3\pi d}-\frac{d^2}{12}}$.

103. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. **104.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$. **105.** $\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$.

106. $10\pi; 28\pi$. **107.** $\frac{3a\sqrt{3}}{\pi}$.

108. $\frac{1}{27}\pi a^3\sqrt{6}$: $\frac{1}{108}\pi a^3\sqrt{6}$. **109.** $1846\frac{2}{3}$.

110. 2. **111.** 263472.

112. $\pi l(r_1+r_2)=s$; $(r_1-r_2)^2=l^2-h^2$.

113. 4; 6. **114.** 7; 5.

115. x—рад. искомаго круга; y—разстояніе этого круга отъ меньшаго основ. усѣч. конуса; z—высота дополнительнаго конуса;

$\frac{1}{3}\pi y(x^2+r^2+rx)=\frac{1}{2}\pi(h-y)(R^2+x^2+Rx)$; $\frac{z}{z+h}=\frac{r}{R}$;

$z=\frac{rh}{R-r}$; $\frac{y+z}{z}=\frac{x}{r}$; $y=\frac{z(x-r)}{r}=\frac{h(x-r)}{R-r}$; $h-y=\frac{h(R-x)}{R-r}$;

$(x-r)(x^2+rx+r^2)=(R-x)(R^2+Rx+x^2)$ или $x^3-r^3=R^3-x^3$;

слѣд. $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(R^3+r^3)}=\sqrt[3]{562,5}=8,25\ldots$

116. $\frac{v\sqrt{3}}{2\pi}$. **117.** 71. **118.** $\frac{1}{12}\pi(R-r)^2h$.

119. 128,4.... **120.** 1. **121.** $\frac{1}{3}\pi r^3(2+3\sqrt{2})$.

122. 1047,816. **123.** 4,2. **124.** $\frac{1}{6}s\sqrt{\frac{s}{\pi}}$.

125. $2\pi\sqrt[3]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$. **127.** 3. **128.** 4410.

129. $5\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{3}$. **130.** $1:2:3$. **131.** $r\sqrt[3]{12}$.

132. $^1/_3\sqrt{\frac{s}{\pi}}$. **133**. $\frac{3(2m-n)}{4n}$; $^7/_6$. **134**. $\frac{r}{\sqrt{3}}$.

135. 2. **136**. $^4/_3\pi.9=\frac{\pi h^3}{3.48}$.

137. r—рад. осн. кон., x—рад. шара; $r=\sqrt{l^2-h^2}=25$; объемъ кон.$=20\pi.25^2$; площ. сѣченія конуса по оси равна $25.60=(65+25).x$, слѣд. $x=^{50}/_3$; об. кон.—об. шара$=19877^{11}/_{27}$.

138. $r\sqrt[3]{15}$. **139**. 4.
140. 6; 4. **141**. $55864^2/_7$. **142**. $17514^2/_{21}$; $44295^3/_7$.
143. $9:12:16$; $9:12\sqrt{2}:32$. **144**. $^1/_4$.
145. $\pi a^2\sqrt{3}$: $^1/_4\pi a^3$. **146**. $6\pi ab\pm\pi a^2\sqrt{3}$; $^1/_4\pi a^2(2b\sqrt{3}\pm a)$.
147. πa^3. **148**. $^7/_{12}\pi a^3\sqrt{3}$. **149**. 77. **152** 55.
153. 7 д. **154**. 92 р. 40 к. **155**. 3 д. **156**. 2.
157. 6. **158**. 5. **159**. 8 кв. д. **160**. 462.
161. 80°. **162**. 8. **163** $^{11}/_7$. **164**. 7 вершк.
165 $^{14}/_{11}$. **166**. $201^1/_7$. **167** 80°. **168**. 10 пд. $^1/_2$ф.
171. 7700 р. **177** 41604710 р. 40 к. **178**. 15 пд. 14,6 ф.
179. 4. **180**. 103,73. **185** $15^3/_4$ дюйм. **186**. 2 верш.
187. 1069 р. 20 к. **188**. $115^1/_2$. **190**. 2 верш.
191. 7 дюйм. **192**. 2 дюйм. **193**. 7600. **194**. 616.
195. 24. **196**. 0,3675. **198**. $45^4/_7$. **199**. 1694.
200. $^4/_3$. **201**. 294. **202**. 64,68. **203** 2 дюйм.
204. 9702. **205**. 24. **206**. 231; $269^1/_2$. **207**. $^2/_3$.
208. 2,56. **211**. $24^2/_3$.

Конецъ.